ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

1280

Н.А. Черников

Кинетическая теория релятивистского газа

Автореферат диссертации, представленный на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

1963

Н.А. Черников

1280

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ГАЗА

Автореферат диссертации, представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна 1963 г.

Релятивистская кинетическая теория привлекала внимание еще на заре открытия теории относительности[1]. Так, равновесная функция распределения релятивистского газа была получена Юттнером / F.Jüttner / в 1911 г. Поведение термодинамических величин при преобразованиях Лоренца изучено независимо Планком, F. Hasenöhrl'ем и Эйнштейном в 1907 г. Теория равновесного состояния релятивистского газа вошла в известные монографии[1-3]. Д. Синг[3] соединил статистический и гидродинамический подходы к изучению релятивистского газа и получил релятивистскую газодинамику. Феноменологическое рассмотрение релятивистской гидродинамики адиабатических и диссипативных процессов содержится в монографиях[4-6]. В 1956 г. С.Т. Беляев и Г.И. Будкер[7] получили релятивисткое кинетическое уравнение, обобщающее на релятивистский случай уравнение Ландау[8]. Наконец, в наших работах[9-10] впервые получено релятивистское кинетическое уравнение Больцмана, откуда, как частный случай, получается уравнение Беляева-Будкера.

Понятен интерес к разреженному газу как к материальной среде с простейшими микроскопическими свойствами. Теория релятивистского разреженного газа может найти интересные приложения в технике и в астрофизике[11]. С теоретической точки зрения нам представляется важным следующее замечание.

Н.Н. Боголюбов[12-13] показал, как можно в нерелятивистском случае прийти к кинетическому уравнению, исходя из механики системы частиц, и тем самым установил определенное отношение кинетического уравнения к механике. Ввиду этого формулировка и исследование релятивистского кинетического уравнения представляют интерес и в связи с развитием релятивистской механики.

Настоящая диссертация содержит систематическое рассмотрение кинетической теории разреженного релятивистского газа. Учитывается теория гравитации Эйнштейна. В общую схему рассмотрения включаются частицы с нулевой массой покоя. Все главные результаты кинетической теории нерелятивистского газа переносятся на релятивистский случай вплоть до вывода гидродинамических уравнений диссипативных процессов, протекающих в релятивистском газе. Ниже излагается краткий обзор работ автора, послуживших основой при написании диссертации.

В работе[14] кинетическое уравнение Больцмана выведено в такой форме, в которой оно справедливо как в нерелятивистском, так и в релятивистском случае. В последнем случае оно пригодно как для частиц, масса покоя которых больше нуля, так и для частиц с равной нулю массой покоя. Учтены любые внешние силы негравитационного характера.

В работе[15] предполагается, что столкновения частиц газа упругие. Применительно к этому случаю релятивистский интеграл столкновений приведен к больцмановскому виду. Это позволило доказать, что интеграл столкновений равен нулю, если частицы газа распределены по релятивистскому закону Максвелла-Больцмана /т.е. по закону Юттнера/.

В работе[16] выведено кинетическое уравнение Больцмана для релятивистского газа в статическом сферически-симметричном гравитационном поле и найдено решение этого уравнения, соответствующее равновесному состоянию газа.

В работе[17] выведена система кинетических уравнений для смеси релятивистских газов в произвольном гравитационном поле Эйнштейна. Пространство состояний F частицы определяется как косое произведение над базой X со слоем типа $P(x)$ и с группой движений трехмерного пространства Лобачевского /ортохронной группой Лоренца/ в качестве структурной группы. Здесь и далее X -пространственно-временное многообразие, $P(x)$ -пространство импульсов частицы в точке $x \in X$ с фиксированной массой покоя m. Доказывается, что пространство F ориентируемо, независимо от того, возможно или невозможно ориентировать пространство X, если метрический тензор Эйнштейна непрерывен всюду в X.

На основе кинетического уравнения, полученного в[17], в работе[18] исследованы вектор потока числа частиц и тензор энергии-импульса релятивистского газа в гравитационном поле. Там же поставлена задача о гравитирующем релятивистском газе. Таким образом, в уравнениях тяготения Эйнштейна была учтена микроструктура вещества.

В работе[19] установлена тесная связь релятивистского распределения Максвелла-Больцмана с интегральной формой законов сохранения. Показано, что равновесная функция распределения

$$A(x,p) = a(x)\, e^{-(\lambda(x),\, p)} \qquad /1/$$

тогда и только тогда удовлетворяет кинетическому уравнению, когда $a = const$ и векторное поле $\lambda(x)$ порождает преобразование пространства X -изометрическое, если $m \neq 0$, и конформное, если $m = 0$.

В работе[20] подытожены результаты предыдущих работ, кроме работы[19], и получены релятивистские уравнения переноса молекулярных признаков в произвольном поле тяготения. Доказано, что дивергенция вектора потока больше или равна нулю в каждой точке $x \in X$ / H -теорема/: $\nabla_a s^a(x) \geq 0$. Рассмотрен принцип детального баланса для релятивистского газа в равновесном состоянии.

В работе[21] содержится развитие ряда результатов, полученных в[19]. Доказано, что, если в некоторой точке $x \in X$ дивергенция вектора потока энтропии равна нулю, то в этой точке функция распределения газа равна /1/. Рассмотрено равномерное вращение релятивистского газа и особые случаи движения газа частиц с нулевой массой покоя. Рассмотрены примеры равновесного распределения релятивистского газа в гравитационном поле.

Наконец, в работе[22] из релятивистского кинетического уравнения выведены релятивистские гидродинамические уравнения диссипативных процессов, протекающих в газе. Решение задачи получено методом моментов. Чтобы перенести метод моментов на релятивистский случай, введено релятивистское обобщение полиномов Эрмита-Чебышева. Коэффициенты теплопроводности и вязкости выражены в виде определенных интегралов от

дифференциального сечения взаимодействия частиц. Они зависят от температуры газа. Как в кинетическом уравнении, так и в уравнениях гидродинамики учтены гравитационные явления Эйнштейна.

При построении релятивистской кинетической теории мы руководствовались следующими соображениями.

Всякая физическая теория опирается на понятие пространства скоростей материальной точки, ибо последнее изоморфно пространству инерциальных систем отсчета. Это пространство трехмерно. Во всяком случае оно несет абсолютную геометрию. Так принято называть учение о пространстве, не зависящее от постулата о параллельных. Постулат о параллельных в пространстве скоростей разделяет нерелятивистскую и релятивистскую физику. В нерелятивистском случае пространство скоростей евклидово, тогда как в релятивистском случае оно является пространством Лобачевского, и его радиус кривизны k равен скорости света c[23,24]. Если в той или иной задаче главную роль играет множество точек в пространстве скоростей, диаметр которого мал по сравнению с радиусом кривизны c, то такую задачу можно приближенно рассматривать как нерелятивистскую, ввиду того что в бесконечно малом геометрия Лобачевского совпадает с геометрией Евклида. Свойства, присущие как нерелятивистской теории, так и аналогичной релятивистской теории, могут быть связаны только с теми свойствами пространства скоростей, которые составляют предмет абсолютной геометрии. В этом смысле во всякой физической теории можно выделить абсолютное содержание. Опираясь на эту идею, восходящую к Лобачевскому и Бойяи (*Bolyai*) при построении релятивистского аналога нерелятивистской физической теории в первую очередь следует выделить в ней абсолютную часть, которая переносится на релятивистский случай без изменения. И только дополнительная часть имеет чисто релятивистский характер, ибо только она связана с постулатом Лобачевского о параллельных.

В применении к кинематике столкновений и распада частиц, к механике частицы во внешнем поле и к стохастическому движению частицы изложенная программа была выполнена в нашей кандидатской диссертации[25], а также в работах[26,27]. Это необходимый шаг при построении релятивистского аналога кинетической теории Максвелла-Больцмана, так как все явления, протекающие в разреженном газе, в конечном счете объясняются двумя явлениями: столкновениями двух частиц и движением одной частицы во внешнем поле в промежутках между столкновениями.

Настоящая диссертация состоит из "Введения" и четырех глав. Основному содержанию диссертации, помещенному в главах *II*, *III*, и *IV*, мы предпослали главу *I*, носящую вводный характер. Первая глава облегчает чтение остальных трех глав, хотя последние главы написаны без ссылок на первую и их содержание может быть понято независимо от первой главы.

В первой главе кинетическое уравнение Больцмана рассматривается с вышеизложенной абсолютной точки зрения. Глава начинается с изложения абсолютной механики частицы во внешнем поле и абсолютной теории стохастического движения частицы. Инвариантный смысл функции распределения газа выясняется при формулировке обобщенной задачи о стохастическом движении частицы. Полученное кинетическое уравнение учитывает произвольные внешние силы. Оно имеет достаточно общий вид, чтобы включить гравитационные явления Эйнштейна. Однако в первой главе мы избегаем учитывать эйнштейновские эффекты гравитации в кинетическом уравнении, так как иначе пришлось бы излагать нерелятивистскую теорию тяготения, геометризированную наподобие общей теории относительности. По аналогичным причинам в первой главе мы не рассматриваем частиц с нулевой массой покоя.

Частным случаем обобщенной задачи о стохастическом движении частицы оказывается и задача об интеграле столкновений. Предположив, что функция распределения слабо меняется на расстояниях порядка радиуса взаимодействия частиц и что время взаимодействия частиц мало, мы приводим задачу об интеграле столкновений к кинематике столкновений частиц.

Абсолютная кинематика столкновений в образах пространства скоростей рассмотрена в работах /25-27/. Успех в области кинематики тесно связан с тем, что она рассматривает лишь импульсно-скоростные характеристики частиц, участвующих в реакции, и не затрагивает вопроса о координатах частиц в процессе реакции. Изложение абсолютной кинематики увело бы нас от предмета диссертации, так как значение кинематики далеко выходит за рамки кинетической теории газа.

Получив интеграл столкновений, мы приходим к абсолютному кинетическому уравнению Больцмана. Наш вывод уравнения Больцмана пригоден для учета неупругих столкновений.

В последних трех главах диссертации рассматривается кинетическая теория релятивистского газа в гравитационном поле. В общую схему рассмотрения включаются частицы с нулевой массой покоя. Хотя в действительности при высоких температурах неупругие столкновения играют все большую роль, из методических соображений в последних трех главах диссертации мы ограничиваемся случаем только упругих столкновений частиц газа. В этом случае все рассмотрение сильно упрощается. По тем же причинам в последних трех главах мы ограничиваемся случаем, когда внешние силы /негравитационного характера/ отсутствуют.

Метрический тензор Эйнштейна предполагается непрерывным. Допускается, что пространственно-временное многообразие X нельзя покрыть одной системой координат. Известно /28,29/, что условие непрерывности метрического тензора Эйнштейна накладывает значительное ограничение на топологическую структуру многообразия X. Например, среди двухмерных компактных многообразий такому условию удовлетворяют только тор и бутылка Клейна.

В § 4 – первом параграфе второй главы – доказывается, что пространство состояний F частицы ориентируемо независимо от возможности ориентировать пространство событий X. Пространство F определяется как семимерный пучок всевозможных импульсов частицы. В промежутках между столкновениями движение частицы газа определяется уравнениями геодезических:

$$\frac{dx^a}{d\tau} = p^a, \qquad \frac{dp^k}{d\tau} = -\Gamma^k_{a\beta}(x)\, p^a p^\beta . \qquad /2/$$

Семь величин (x^a, p^k) можно рассматривать как координаты в F. Компонента p^0 определяется из равенства $(p,p) = m^2c^2$. τ – собственное время частицы, связанное с обычным собственным временем τ_0 простым соотношением $\tau_0 = m\tau$. Собственное время τ определено и для частиц с нулевой массой покоя. Правые части уравнений /2/ составляют векторное поле $f(x,p)$ в F. Это поле нигде не обращается в нуль. Далее предполагается, что пространство состояний F расслаивается на шестимерное многообразие евклидовых прямых – векторных линий поля $f(x,p)$.

В § 5 устанавливается кинетическое уравнение Больцмана для смеси N релятивистских газов в гравитационном поле Эйнштейна:

$$\hat{f}(x,p)\, A_i(x,p) = I_i(x,p) \equiv \sum_{j=1}^{N} I_{ij}(x,p), \qquad i = 1,2,\dots,N, \qquad /3/$$

где $\hat{f}(x,p)$ – дифференциальный оператор

$$\hat{f}(x,p) = p^a \frac{\partial}{\partial x^a} - \Gamma^k_{a\beta}(x)\, p^a p^\beta \frac{\partial}{\partial p^k}, \qquad /4/$$

$A_i(x,p)$ – функция распределения i-й компоненты газа,

$I_{ij}(x,p)$ – интеграл столкновений частиц i-й компоненты с частицами j-й компоненты. Отдельный акт упругого столкновения частиц сорта i и сорта j в точке $x \in X$ характеризуется импульсами $p \in P_i(x)$ и $q \in P_j(x)$ частиц до столкновения и вектором e, удовлетворяющим условиям

$$(e, p+q) = 0, \quad (e,e) = -1 . \qquad /5/$$

$P_i(x)$ – пространство импульсов частицы сорта i. Обратное столкновение определяется тройкой p', q', e':

$$p' = \frac{(p, p+q)}{(p+q, p+q)}(p+q) + \frac{\langle p,q\rangle}{\sqrt{(p+q, p+q)}}\, e,$$

$$q' = \frac{(q, p+q)}{(p+q, p+q)}(p+q) - \frac{\langle p,q\rangle}{\sqrt{(p+q, p+q)}}\, e, \qquad /6/$$

$$e' = \frac{(p+q, q)\,p - (p+q, p)\,q}{\langle p,q\rangle \sqrt{(p+q, p+q)}}; \quad \langle p,q\rangle = \sqrt{(p,q)^2 - (p,p)(q,q)}.$$

Преобразование /6/ инволютивно и сохраняет восьмимерный элемент объема:

$$dP\, dQ\, de = dP'\, dQ'\, de', \qquad /7/$$

где dP, dQ –элементы объема в $P_i(x)$ и $P_j(x)$, de – элемент площади на двумерной сфере /5/ /ср.[30]/. Дифференциальное сечение взаимодействия частиц обозначается

$$d\sigma_{ij} = h_{ij}(\langle p,q\rangle, -(e,e'))\,de = h_{ij}\,de. \qquad /8/$$

Для любой пары функций ψ_i и ψ_j, заданных в пространствах состояний F_i и F_j, вводится обозначение

$$[\psi_i, \psi_j] = \psi_i(x,p')\,\psi_j(x,q') - \psi_i(x,p)\,\psi_j(x,q). \qquad /9/$$

Интеграл столкновений $I_{ij}(x,p)$ равен

$$I_{ij} = \int [A_i, A_j]\langle p,q\rangle h_{ij}\,dQ\,de \qquad /10/$$

В § 6 из кинетического уравнения выводится уравнение переноса молекулярных признаков:

$$\nabla_a \psi_i^a(x) = \int_{P_i(x)} I_i(x,p)\,\psi_i(x,p)\,dP + \int_{P_i(x)} A_i(x,p)\,\hat{f}(x,p)\,\psi_i(x,p)\,dP, \qquad /11/$$

где ∇_a –оператор ковариантного дифференцирования,

$$\psi_i^a(x) = \int_{P_i(x)} p^a\psi_i(x,p)\,A_i(x,p)\,dP. \qquad /12/$$

С помощью преобразования /9/ находится равенство

$$\int_{P_i(x)} I_{ij}(x,p)\,\psi_i(x,p)\,dP = \tfrac{1}{2}\int[A_i, A_j][\psi_i, 1]\langle p,q\rangle h_{ij}\,dP\,dQ\,de. \qquad /13/$$

В § 7 рассматриваются макроскопические характеристики релятивистского газа. Полагая в /12/ $\psi_i = -\ln A_i$, мы приходим к вектору потока энтропии i-й компоненты газа $s^a(x)$. Из /11/ и /13/ для вектора потока энтропии всего газа следует

$$\nabla_a s^a(x) = \tfrac{1}{4}\sum_{ij=1}^{N}\int[A_i, A_j]\{[\ln A_i, 1]+[1, \ln A_j]\}\langle p,q\rangle h_{ij}\,dP\,dQ\,de \geq 0. \qquad /14/$$

Таким образом, доказана H-теорема в релятивистском случае. Полагая в /12/ $\psi_i = 1$, мы приходим к вектору $n_i^a(x)$ потока частиц сорта i. Из /11/ и /13/ находим

$$\nabla_a n_i^a(x) = 0. \qquad /15/$$

Полагая в /12/ $\psi_i = (\xi(x), p)$, где $\xi(x)$ –векторное поле, мы приходим к тензору энергии-импульса i-й компоненты газа $T_i^{a\beta}(x)$. Учитывая тождество

$$\hat{f}(x,p)(\xi(x),p) = \tfrac{1}{2}(\nabla_a\xi_\beta + \nabla_\beta\xi_a)\,p^a p^\beta, \qquad /16/$$

из /11/ и /13/ находим

$$\nabla_a T^{a\beta}(x) = 0, \qquad /17/$$

где $T^{a\beta}(x)$–тензор энергии-импульса всего газа. Наконец, полагая $\psi_i = (\xi(x), p)^n$,

мы приходим к произвольным моментам функции распределения i-й компоненты газа

$$A_i^{a_1\dots a_n}(x) = \int_{P_i(x)} p^{a_1}\dots p^{a_n} A_i(x,p)\,dP. \qquad /18/$$

Из /11/, /13/ и /16/ получаем

$$\nabla_a A_i^{aa_1\dots a_n} = I_i^{a_1\dots a_n} \equiv \int_{P_i(x)} p^{a_1}\dots p^{a_n} I_i(x,p)\,dP. \qquad /19/$$

Квадратичная форма $T^{a\beta}(x)\xi_a\xi_\beta$ положительно определена. Следовательно, существует одна и только одна касательная к X временноподобная прямая, определяемая уравнением

$$T^{a\beta}\xi_\beta = \mu\,\xi^a. \qquad /20/$$

Она задает скорость потока массы газа в точке $x \in X$. Соответствующее собственное число $\mu_{(0)}$ положительно. Остальные собственные числа отрицательны. Скаляр $\mu_{(0)}c^{-1}$ является плотностью массы газа в сопровождающей системе отсчета.

В третьей главе диссертации рассматривается равновесное распределение релятивистского газа как решение системы кинетических уравнений /3/.

В § 8 – первом параграфе третьей главы – определяется локальное равновесное распределение релятивистского газа в точке $x \in X$ единственным условием $\nabla_a s^a(x) = 0$. Отсюда следует принцип детального баланса в равновесном распределении:

$$\begin{aligned} &A_i(x,p')\,A_j(x,q')\langle p',q'\rangle h_{ij}(\langle p',q'\rangle, -(e',e))\,dP'\,dQ'\,de'\,dX = \\ &= A_i(x,p)\,A_j(x,q)\langle p,q\rangle h_{ij}(\langle p,q\rangle, -(e,e'))\,dP\,dQ\,de\,dX. \end{aligned} \qquad /21/$$

Если $h_{ij} = 0$, то из /21/ получаем функциональное уравнение Больцмана

$$[A_i, A_j] = 0 \qquad /22/$$

в релятивистском случае. Доказывается, что из /22/ следует $[A_i, A_i] = 0$.

В § 9 доказывается, что общее решение уравнения $[A_i, A_i] = 0$ в классе непрерывных функций от импульса $p \in P_i(x)$ представляется в виде /1/.

В § 10 рассматривается термодинамика локально-равновесного релятивистского газа.

В § 11 выяснено, в каких случаях функция /1/ удовлетворяет кинетическому уравнению /3/. Доказывается, что a должно не зависеть от x; если хотя бы одна масса покоя m_i не равна нулю, то вектор $\lambda(x)$ должен подчиняться уравнению Киллинга; если же все m_i равны нулю, то

$$\nabla_a\lambda_\beta + \nabla_\beta\lambda_a = 2\,\phi(x)\,g_{a\beta}, \qquad /23/$$

где $\phi(x)$ – некоторая скалярная функция. Уравнение Киллинга определяет изометрическое преобразование пространства событий X, уравнение /23/ – конформное преобразование. Вектор $\lambda(x)$ должен быть временноподобным. Если координаты x^0, x^1, x^2, x^3 выбрать так, чтобы векторное поле имело контравариантные компоненты /1,0,0,0/, то уравнение Киллинга означает $g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3)$. Уравнение /23/ в этих координатах означает $g_{\alpha\beta} = \rho(x^0, x^1, x^2, x^3)\ h_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3)$. Только в таком пространстве событий возможно распределение газа по закону /1/.

В § 12 рассматриваются условия интегрируемости уравнения /23/. Случай полной интегрируемости означает, что пространство событий X является пространством постоянной кривизны.

В § 13 рассматривается распределение /1/ в пространстве Минковского. Доказывается, что функция $\phi(x)$, входящая в уравнение /23/, в аффинных координатах должна быть линейной функцией. Устанавливается общий вид поля $\lambda(x)$, удовлетворяющего уравнению /23/. Рассматривается частный случай распределения /1/, соответствующий равномерному вращению газа. Рассмотрены особые случаи равновесного распределения газа, состоящего из частиц с нулевой массой покоя.

В § 14 рассмотрено несколько характерных примеров равновесного распределения релятивистского газа в гравитационном поле.

В §15 изучена тесная связь распределения /1/ с интегральными законами сохранения.

В четвертой главе диссертации дается микроскопическое обоснование релятивистской гидродинамики. Рассматривается однокомпонентный газ. В качестве исходных берутся уравнения моментов /19/. В нерелятивистском случае аналогичная процедура выполнена Градом[/31/]. Метод моментов Града основан на разложении отношения истинной функции распределения газа к равновесной в ряд по полиномам Эрмита-Чебышева от компонент скорости. Обрывая ряд на определенном члене и учитывая, соответственно, несколько первых нерелятивистских уравнений моментов, Град получает нерелятивистские гидродинамические уравнения. Пять уравнений моментов приводят к уравнениям Эйлера, тринадцать уравнений моментов приводят к уравнениям Навье-Стокса.

В § 16 - первом параграфе четвертой главы - получаются релятивистские гидродинамические уравнения адиабатических процессов, протекающих в газе. Чтобы получить эти уравнения, нужно допустить, что функция распределения газа достаточно хорошо описывается функцией /1/, и моменты функции /1/ подставить в уравнения /15/ и /17/. Отметим, что релятивистские уравнения идеальной газодинамики можно получить без помощи кинетического уравнения, как это сделано в работе[/3/].

Для учета диссипативных процессов необходимо ввести поправки к /1/. С этой целью в § 17 вводится обобщение полиномов Эрмита-Чебышева на релятивистский случай. Обобщенные полиномы $H_{a_1 \dots a_n}$ имеют тензорный характер.

В § 18 через обобщенные полиномы $H_{a_1 \dots a_n}$ выражаются поправки к равновесному распределению /1/. Уточненная таким образом функция распределения содержит тринадцать параметров. Для их определения устанавливается система тринадцати уравнений моментов. Эта система является обобщением на релятивистский случай системы тринадцати уравнений Града[/31/].

В § 19 вычисляется второй момент относительно столкновений, входящий в систему тринадцати уравнений моментов.

Наконец, в § 20 получаются релятивистские гидродинамические уравнения диссипативных процессов, протекающих в газе. Последние были известны ранее в чисто феноменологическом аспекте /4,5/. Устанавливается в релятивистском случае неизвестная ранее зависимость коэффициентов теплопроводности и вязкости от дифференциального сечения взаимодействия частиц газа и от локальной температуры газа. Как в кинетическом уравнении, так и в уравнениях гидродинамики учтены гравитационные явления Эйнштейна.

Литература

1. В. Паули."Теория относительности" ГИТТЛ, М-Л. 1947 г.
2. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц. "Статистическая физика" ГИТТЛ, М-Л, 1951 г.
3. Д.Л. Синдж. "Релятивистский газ", Атомиздат, М. 1960.
4. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц. "Механика сплошных сред" ГИТТЛ, М. 1953.
5. А.З. Петров. "Пространства Эйнштейна" ГИФМЛ, М. 1961 г.
6. Ф.А. Баум, С.А. Каплан, К.П. Станюкович. "Введение в космическую газодинамику" ГИФМЛ, М. 1958.
7. С.Т. Беляев и Г.М. Будкер. ДАН СССР, 107, № 6, /807/ 1956.
8. Л.Д. Ландау, ЖЭТФ, 7 вып. 2 /203/, 1937.
9. Н.А. Черников. ДАН СССР, 112, № 6 /1030/, 1957.
10. Н.А. Черников. ДАН СССР, 114 , № 3 /530/, 1957.
11. С.Н. Мильфорд. Astrophys. J., 125, N. 1, 1957.
12. Н.Н. Боголюбов. ЖЭТФ, 16, вып. 8, /691/, 1946.
13. Н.Н. Боголюбов. Проблемы динамической теории в статистической физике. ГТТИ М-Л, 1946.
14. Н.А. Черников. Научные доклады высшей школы, физико-математические науки № 1 /168/ 1959.
15. Н.А. Черников. ДАН СССР, 133, № 1 /84/, 1960.
16. Н.А. Черников. ДАН СССР, 133, № 2 /333/, 1960.
17. Н.А. Черников. ДАН СССР, 144, № 1 /89/, 1962.
18. Н.А. Черников. ДАН СССР, 144 № 2 / 314/ 1962.
19. Н.А. Черников. ДАН СССР, 144, № 3 /544/ 1962.
20. Н.А. Черников. Acta Phys. Pol. vol. XXIII, N. 5, 1963. Препринт ОИЯИ Р-1028, Дубна, 1962.
21. Н.А. Черников. Препринт ОИЯИ Р-1159, Дубна, 1962.
22. Н.А. Черников. Препринт ОИЯИ Р-1261, Дубна, 1963.
23. А.П. Котельников. Принцип относительности и геометрия Лобачевского. Сборник In memoriam N.I.Lobatshevskii. т. 2, стр. 37-66, Казань, 1927.
24. В.А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. ГИТТЛ, М., 1955.
25. Н.А. Черников. Стохастическое движение релятивистской частицы, кандидатская диссертация, Дубна, 1957.
26. Н.А. Черников. Научные доклады высшей школы, физ.-мат.науки, № 2 /158/, 1958.

27. Н.А. Черников. Препринт ОИЯИ Р-723, Дубна, 1961.

28. Н. Стинрод. Топология косых произведений, Ил., М., 1953

29. А. Лихнерович. Теория связностей в целом и группы голономий, ИЛ., М., 1960.

30. Т. Карлеман. Математические задачи кинетической теории газов. Гл. 1, § 3, Ил., М., 1960.

31. H.Grad. Commun. pure appl. Math., 2, N. 4 (331) (1949).

Рукопись поступила в издательский отдел
6 мая 1963 года.