



13
Б95

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ НЕЙТРОННОЙ ФИЗИКИ

П.Х. Бырнев, И.М. Матора

1256

**ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ
ЗАРЯЖЕННЫХ ЗАМКНУТЫХ КОЛЬЦЕВЫХ
ТОКОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ГАЗЕ**

Дубна 1983 год

П.Х. Бырнев, И.М. Матора

1256

ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ
ЗАРЯЖЕННЫХ ЗАМКНУТЫХ КОЛЬЦЕВЫХ
ТОКОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ГАЗЕ

УДК 621.372.6.01
ИЗДАНИЕ ПЕРВОЕ
1983 г.

Дубна 1983 год

Введение

Задача о замкнутых кольцевых фигурах равновесия заряженных токовых поверхностей с меридиональным направлением тока /рис. 1/, окруженных газовой /или жидкой/ средой, сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{\sigma}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r z'}{\sqrt{1+z'^2}} \right) = p(r), \quad (z' = \frac{dz}{dr}). \quad /1/$$

Здесь $\sigma = \text{const}$ - коэффициент поверхностного расталкивания, введенный для описания действия электрического заряда на равновесной токовой поверхности; разумеется, $\sigma \leq 0$. Давление

$$p(r) = p + \frac{a}{r^2}, \quad \text{где} \quad /2/$$

$a = \frac{I^2}{2\pi c^2}$, I - полный ток на поверхности /Гауссова система единиц/, есть сумма постоянного газодинамического внешнего давления $p < 0$ и обратно пропорционального квадрату расстояния r от оси симметрии фигуры внутреннего магнитного давления

$$p_H = \frac{a}{r^2} > 0. \quad /3/$$

Искомый контур $z(r)$ меридианного сечения фигуры равновесия должен, с одной стороны, удовлетворять /1/ и двум граничным условиям, которые, не нарушая общности, возьмем в виде:

$$z(r_1) = 0, \quad z'(r_1) = -\infty \quad \text{/нижняя ветвь/,} \quad /4/$$

что при отсутствии в уравнении независимо изменяемых параметров однозначно его определяет. С другой стороны, контур $z(r)$ должен быть замкнутым, гладким и симметричным относительно оси r .

Последнее требование может быть удовлетворено в том случае, когда уравнение /1/ содержит достаточное количество независимых параметров.

Приведенные ниже решения /1/ показывают, что не существует конечной кольцевой фигуры равновесия, если $p(r) = \text{const}$, и только появление в /2/ нового независимого параметра a приводит при определенных соотношениях между постоянными к существованию континуума кольцевых фигур равновесия конечных размеров. Такое же положение имеет место в случае рассмотренных Шаррю /1/ фигур равновесия вращающейся однородной жидкой массы, подверженной действию поверхностного натяжения, где только при наличии /помимо постоянного давления/ вращения относительно оси симметрии возможен континуум кольцевых фигур равновесия. Отметим, что две фигуры равновесия считаются различными, если они подобны.

Меридианное сечение пленки

Решение /1/ при выполнении граничного условия /4/ /рассматриваем нижнюю половину контура/ есть:

$$\frac{1}{r_1} z(t) = \int_1^t \frac{\Psi(r) dr}{\sqrt{1-\Psi^2(r)}}, \quad (t = \frac{r}{r_1}), \quad /5/$$

$$\Psi(t) = \frac{1}{at} [t^2 - (1+a) + \gamma \ln t], \quad /6/$$

$$a = \frac{2}{r_1} \frac{\sigma}{p}, \quad \gamma = 2 \frac{p_{H1}}{p}, \quad p_{H1} = \frac{a}{r_1^2} = \frac{l^2}{2\pi r_1^2 c^2} \quad /7/$$

/ a и γ - безразмерные/.

Из /5/, /6/ и /7/ следует, что при фиксированных a и γ любые решения /1/, удовлетворяющие /4/, подобны. Подчеркнем, что это свойство не связано с тем, являются ли определяемые /5/, /6/ и /7/ контуры сечениями фигур равновесия, или не являются, так как их замкнутость, гладкость и симметричность относительно оси r еще не обеспечены.

Чтобы последние требования выполнялись, мы должны положить /см.рис.1/.

$$\begin{cases} z'_r(t_2, a, \gamma) = +\infty, & (t_2 = \frac{r_2}{r_1}), \\ z(t_2, a, \gamma) = 0; \end{cases} \quad \text{откуда} \quad /8/$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1+t_2}{\ln t_2} (a + 1 - t_2), & /8'/ \\ \int_1^{t_2} \frac{\Psi(r, a) dr}{\sqrt{1-\Psi^2(r, a)}} &= 0. \end{aligned}$$

Замечание. Условия /8/ эквивалентны двум независимым условиям

$$\int_{(s)} (p + p_H) ds = 0, \quad \int_{(s)} (p + p_H)_r ds = 0.$$

Интегрирование по всей поверхности пленки. $(p + p_H)_{r,s}$ - проекции вектора давления на соответствующие оси. Один из параметров (t_2) в /8'/ мы можем выбирать произвольно. Тогда второй (a) должен быть подобран так, чтобы интеграл обращался в нуль. В общем случае, когда $\gamma \neq 0$, свести интеграл к известным не удастся, и задача оказалась разрешимой с помощью электронной счётной машины ОИЯИ.

Рассмотрим случай, когда токов нет, $\gamma = 0$. Здесь $z(t)$ выражается через эллиптические интегралы. Подстановка

$$\sin \phi = \sqrt{\frac{t_2^2 - r^2}{t_2^2 - 1}} \quad /9/$$

приводит /5/ к виду:

$$\frac{1}{r_1} z(\phi) = t_2 [E(k) - E(k, \phi)] - [K(k) - F(k, \phi)], \quad /10/$$

где $k^2 = 1 - \frac{1}{t_2^2}$, причём в соответствии с /8'/

$$\begin{aligned} a &= t_2 - 1 & /11/ \\ t_2 E\left(\sqrt{1 - \frac{1}{t_2^2}}\right) - K\left(\sqrt{1 - \frac{1}{t_2^2}}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Существует лишь один корень последнего трансцендентного уравнения:

$$t_2 = 1.$$

При этом здесь $\alpha = \frac{2}{r_1} \frac{\sigma}{\rho} = 0$, что осуществляется или при $r_1 \rightarrow \infty$, $\frac{\sigma}{\rho}$ - конечном, причём фигура равновесия - круговой цилиндр с конечным радиусом направляющей окружности $\rho = \frac{\sigma}{\rho}$; или при r_1 - конечном, $\frac{\rho}{\sigma} \rightarrow \infty$, фигура равновесия - тор с конечным радиусом кольца $R = r_1$ и бесконечно-малым радиусом окружности меридианного сечения $\rho = \frac{\sigma}{\rho}$.

Фигуры равновесия при наличии меридионального тока.

На рис. 2 изображены контуры меридианных сечений кольцевой равновесной токовой поверхности, соответствующие различным значениям параметра $t_2 = \frac{r_2}{r_1}$. Решения нормированы так, что интервал $r_2 - r_1$ всегда принимается за единицу длины.

Можно показать, что каждому значению t_2 в интервале $(1, \infty)$ соответствует своя единственная фигура равновесия, для которой параметры α и γ находятся в интервалах

$$\frac{t_2^2 - 1 - 2 \ln t_2}{t_2 + 1 + \ln t_2} < \alpha < \frac{3(t_2^2 - 1) - 2 \ln t_2}{3(t_2 + 1) + 2 \ln t_2} \quad /12/$$

$$-\frac{(t_2 + 1)^2}{t_2 + 1 + \ln t_2} < \gamma < -\frac{2t_2(t_2 + 1)}{3(t_2 + 1) + 2 \ln t_2} \quad /13/$$

На графике 3 приведены значения $\frac{\alpha}{2} = \frac{\sigma}{r_1 \rho}$ и $\frac{\gamma}{2} = \frac{\rho H_1}{\rho}$ в зависимости от t_2 .

При $t_2 \rightarrow 1$ фигура равновесия представляет собой тор. Следует подчеркнуть, что хотя эта фигура и подобна той, которая была получена в случае $\gamma = 0$, мы не можем считать ее той же самой, так как /см.рис.3/ здесь для $t_2 \rightarrow 1$ $\gamma = -\frac{2}{3}$. Решение в этом случае можно получить также и аналитически. Увеличение отношения t_2 сопровождается асимптотическим приближением контура меридианного сечения фигуры равновесия к полуокружности единичного радиуса, замкнутой по диаметру, лежащему на оси симметрии.

При $t_2 \rightarrow \infty$ фигура равновесия есть двухсвязный шар единичного радиуса, у которого отрезок оси симметрии, расположенный внутри шара, является частью кольцевой поверхности. Решение при $t_2 \rightarrow \infty$ может быть получено и аналитически. Подстановка

$$r = 1 + (t_2 - 1)\xi \quad /14/$$

приводит /5/ к виду:

$$\frac{z(t)}{r_2 - r_1} = \int_0^{t_2 - 1} F(\xi) d\xi \quad /15/$$

и /8'/ к виду

$$\int_0^1 F(\xi) d\xi = 0 \quad , \text{ где} \quad /16/$$

$$F(\xi) = \frac{\Psi[1 + (t_2 - 1)\xi]}{\sqrt{1 - \Psi^2[1 + (t_2 - 1)\xi]}} \quad /17/$$

Из /15/ и /16/ следует

$$\frac{z(t)}{r_2 - r_1} = - \int_0^1 F(\xi) d\xi + \int_0^{t_2 - 1} F(\xi) d\xi = - \int_0^{t_2 - 1} F(\xi) d\xi. \quad /18/$$

Пользуясь /8/, /12/, /13/ и /17/, получаем для $\xi > 0$

$$\lim_{t_2 \rightarrow \infty} \Psi[1 + (t_2 - 1)\xi] = \xi, \quad /19/$$

$$\lim_{t_2 \rightarrow \infty} F(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad /20/$$

откуда

$$\frac{z(t)}{r_2 - r_1} = - \sqrt{1 - \left(\frac{t-1}{t_2-1}\right)^2}, \quad /21/$$

что представляет собой дугу окружности единичного радиуса. Выражение /21/ справедливо при $\frac{t-1}{t_2-1} > 0$, при $t = 1$.

$$\frac{z(1)}{r_2 - r_1} = 0. \quad /22/$$

Совпадение результатов аналитического и численного расчёта для случаев $t_2 \rightarrow 1$ и $t_2 \rightarrow \infty$ подтверждает правильность программирования и результатов численного счёта при других значениях t_2 .

З а к л ю ч е н и е

При постановке рассмотренной здесь задачи имелось в виду показать возможность существования в атмосфере замкнутых электродинамических образований с большой концентрацией энергии вроде шаровой молнии.

Следуя той точке зрения, что шаровые молнии, по-видимому, возникают под действием сил электромагнитной индукции в условиях, имеющих в фотографическом канале мощной линейной молнии, мы ограничились рассмотрением осесимметричных кольцевых фигур. В качестве "оболочки" была взята замкнутая заряженная токовая поверхность, так как из данных экспериментов с прямыми пинчами /которые от линейной молнии отличаются лишь масштабами явления/ следует, что часто в условиях прямого пинча возникают токовые поверхности, способные экранировать заключенный внутри объем от проникновения внешнего меняющегося во времени магнитного поля /2/.

Однако, несмотря на то, что по форме мы получили нечто, напоминающее шаровую молнию, нам не удалось показать, и это легко видеть из приведенных выше данных, что здесь может происходить заметная концентрация электромагнитной или тепловой энергии. Концентрация магнитной энергии при больших t_2 происходит, но лишь в малой окрестности оси симметрии фигуры, так что средняя по объему фигуры плотность запасенной энергии оказывается малой.

Выражаем искреннюю благодарность В.В.Бабикову, И.Н.Головину, В.Д.Шафранову и Б.Б.Кадомцеву за ценную дискуссию.

М а т е м а т и ч е с к о е п р и л о ж е н и е

Исследуем второе условие /8/, левую часть которого можно записать в виде:

$$\Phi(a, t_2) = \int_1^{t_2} \frac{\Psi(a, t_2, t)}{\sqrt{1 - \Psi^2(a, t_2, t)}} dt. \quad /23/$$

Ниже будет показано, что при любом заданном значении параметра t_2 в интервале $/1, \infty/$ существует единственное действительное значение $a(t_2)$ такое, что

$$\Phi[a(t_2), t_2] = 0.$$

При этом $a(t_2)$ удовлетворяет неравенствам /12/, а величина γ - неравенствам /13/.

Определим область параметров a и t_2 , в которой $\Phi(a, t_2)$ принимает действительные значения. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\Phi(a, t_2)$ было действительным /при действительных значениях a и t_2 /, является $|\Psi(a, t_2, t)| \leq 1$ для всех t в интервале $(1, t_2)$.

Пусть λ обозначает единственный корень уравнения $t \ln t - t - 1 = 0$ ($\lambda \approx 3,591121\dots$) и λ^* - тот корень уравнения $(1+t_2) \ln t - (1+t) \ln t_2 = 0$, который не равен t_2 /последнее уравнение имеет два корня λ^* и t_2 /.

Исследование функции $\Psi(a, t_2, t)$ приводит к следующему результату: неравенство $|\Psi(a, t_2, t)| \leq 1$ выполняется для каждого $1 \leq t \leq t_2$ в области D , которая определяется так:

$$D = \left. \begin{cases} a \leq v(t_2) \\ a \geq u(t_2) \\ u(t_2) \leq a \leq v(t_2), \end{cases} \right\} \begin{array}{l} \text{или} \\ \text{если } 1 < t_2 \leq \lambda; \\ \text{если } t_2 > \lambda; \end{array}$$

где

$$u(t_2) = \frac{t_2^2 - 1 - 2\ln t_2}{t_2 + 1 + \ln t_2}$$

и

$$v(t_2) = \begin{cases} \frac{t_2^2 - 1 - 2t_2^2 \ln t_2}{t_2 + 1 - t_2 \ln t_2}, & \text{если } t_2 \leq \lambda \\ \min_{\lambda < t < t_2} \frac{(t_2^2 - 1)\ln t - (t - 1)\ln t_2}{(1 + t_2)\ln t - (1 + t)\ln t_2}, & \text{если } t_2 > \lambda. \end{cases}$$

Перечислим некоторые свойства функции $\Phi(a, t_2)$.

$$a / |\Phi(a, t_2)| < \infty, \text{ если } a < v(t_2) \text{ и } a > u(t_2) \text{ и } \lim_{a \rightarrow u(t_2)} \Phi(a, t_2) = -\infty.$$

Действительно, нетрудно проверить, что

$$1 - \Psi(a, t_2, t) = (t - t_2) \mathcal{P}(a, t_2, t) \quad \text{где } \lim_{t \rightarrow t_2} \mathcal{P}(a, t_2, t) < 0$$

$$1 + \Psi(a, t_2, t) = \begin{cases} (t-1) \mathcal{Q}(a, t_2, t) & \text{где } \lim_{t \rightarrow 1} \mathcal{Q}(a, t_2, t) > 0, \text{ если } a > u(t_2) \\ (t-1)^2 \mathcal{R}(a, t_2, t) & \text{где } \lim_{t \rightarrow 1} \mathcal{R}(a, t_2, t) > 0, \text{ если } a = u(t_2). \end{cases}$$

Поэтому при $a \in \mathcal{D}$ и $a \neq u(t_2)$ подынтегральная функция в /23/ имеет интегрируемую особенность, а при $a = u(t_2)$ интеграл обращается в $-\infty$.

$$б / \frac{\partial \Phi(a, t_2)}{\partial a} > 0.$$

$$\text{В самом деле, } \frac{\partial \Phi}{\partial a} = \int_1^{t_2} \frac{\frac{\partial \Psi(a, t_2, t)}{\partial a}}{[1 - \Psi^2(a, t_2, t)]^{3/2}} dt,$$

$$\text{но } \frac{\partial \Psi}{\partial a} = \frac{(t_2^2 - 1)\ln t - (t^2 - 1)\ln t_2}{a^2 t \ln t_2} > 0, \quad (1 < t < t_2).$$

Следовательно, $\frac{\partial \Phi}{\partial a} > 0$, так как подынтегральная функция везде неотрицательна.

$$в / \Phi(a, t_2) = - \int_1^{t_2} \frac{\sqrt{1 - \Psi^2(a, t_2, t)} \frac{\partial^2 \Psi(a, t_2, t)}{\partial t^2}}{\left[\frac{\partial \Psi(a, t_2, t)}{\partial t}\right]^2} dt, \quad \begin{array}{l} \text{если } u(t_2) < a \leq t_2 - 1 \\ \text{или если } a < v(t_2), (t_2 \leq \lambda). \end{array}$$

$$\text{Действительно, } \frac{\partial \Psi(a, t_2, t)}{\partial t} = \frac{t^2 + 1 + a + \gamma(1 - \ln t)}{a t^2} = \frac{f(t)}{a t^2},$$

$$\text{но } f'(t) = 2t - \frac{\gamma}{t} = \frac{2t^2 + \frac{1+t_2}{\ln t_2}(t_2 - a - 1)}{t} > 0, \quad \text{если } a \leq t_2 - 1.$$

Следовательно, при $a > \frac{t_2^2 - 1 - 2\ln t_2}{t_2 + 1 + \ln t_2} = u(t_2)$ имеем

$$f(t) \geq f(1) = 2 + a + \gamma = 2 + a - \frac{1+t_2}{\ln t_2} (t_2 - a - 1) > 0.$$

Итак, если $u(t_2) < a \leq t_2 - 1$, то $\frac{\partial \Psi}{\partial t} > 0$ при каждом $1 \leq t \leq t_2$. Если $a < v(t_2)$, ($t_2 \leq \lambda$), то имеем $f(t) < f(t_2) = \frac{a(t_2 + 1 - t_2 \ln t_2) - (t_2^2 - 1 - 2t_2^2 \ln t_2)}{\ln t_2} < 0$ и, следовательно, $\frac{\partial \Psi}{\partial t} > 0$. В обоих

случаях $\frac{\partial \Psi}{\partial t} \neq 0$, и справедливы равенства:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$\Phi(a, t_2) = \int_1^{t_2} \frac{\Psi dt}{\sqrt{1-\Psi^2}} = -\frac{\sqrt{1-\Psi^2}}{\frac{\partial \Psi}{\partial t}} \Big|_{t=1}^{t=t_2} - \int_1^{t_2} \frac{\sqrt{1-\Psi^2}}{(\frac{\partial \Psi}{\partial t})^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} dt,$$

откуда, ввиду $\Psi^2(a, t_2, 1) = \Psi^2(a, t_2, t_2) = 1$, следует справедливость в/
г/ $\Phi(-\infty, t_2) > 0$, если $1 < t_2 < \lambda$.

Это следует из того, что

$$\Psi(-\infty, t_2, t) = \frac{(1+t_2)\ln t - \ln t_2}{t \ln t_2} \quad \text{и}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(-\infty, t_2, t)}{\partial t^2} = \frac{2(t_2+1)\ln t - (3t_2+3+2\ln t_2)}{t^3 \ln t_2},$$

но при $1 \leq t \leq t_2 \leq \lambda$ справедливы неравенства

$$\ln t \leq \ln t_2 \leq \frac{3t_2+3+2\ln t_2}{2(t_2+1)},$$

поэтому $\frac{\partial^2 \Psi(-\infty, t_2, t)}{\partial t^2} < 0$ и с учётом в/ получаем

$$\Phi(-\infty, t_2) > 0.$$

$$\text{д/ } \Phi[a_0(t_2), t_2] > 0, \quad \text{где } a_0(t_2) = \frac{3(t_2^2-1) - 2\ln t_2}{3(t_2+1) + 2\ln t_2}$$

Доказательство

$$\frac{\partial^2 \Psi(a, t_2, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{at^3} \left[\frac{1+t_2}{\ln t_2} (a-t_2+1)(3-2\ln t) + 2(a+1) \right], \quad a_0(t_2) < t_2 - 1.$$

Поэтому $a_0 - t_2 + 1 < 0$ и, следовательно,

$$\frac{1+t_2}{\ln t_2} (a_0 - t_2 + 1)(3 - 2\ln t) + 2(a_0 + 1) > 3 \frac{1+t_2}{\ln t_2} (a_0 - t_2 + 1) + 2(a_0 + 1).$$

Последнее выражение не меньше нуля, и $\frac{\partial^2 \Psi[a_0(t_2), t_2, t]}{\partial t^2} < 0$. Тогда из свойства в/ следует, что $\Phi[a_0(t_2), t_2] > 0$.

Из свойства б/ следует, что $\Phi(a, t_2)$ растёт, если a растёт. Но если $1 < t_2 < \lambda$, то $\Phi(-\infty, t_2) > 0$ /см.г//. Так как функция $\Phi(a, t_2)$ непрерывна, то в области $\mathcal{D}_1 \{a \leq v(t_2)\}$ имеем $\Phi(a, t_2) > 0$, т.е. в области \mathcal{D}_1 не существуют значения параметра a , при которых $\Phi(a, t_2) = 0$.

Из свойств а/ и д/ имеем $\Phi[u(t_2), t_2] = -\infty$ и $\Phi[a_0(t_2), t_2] > 0$. Поэтому ввиду непрерывности и монотонности функции $\Phi(a)$ следует, что в интервале $u(t_2) < a < a_0(t_2)$ для каждого t_2 существует единственное значение $a = a(t_2)$, такое, что $\Phi[a(t_2), t_2] = 0$.

Соответствующие значения $\gamma(t_2) = \frac{1+t_2}{\ln t_2} [a(t_2) - t_2 + 1]$ находятся в интервале

$$-\frac{1+t_2}{\ln t_2} [t_2 - 1 - u(t_2)] = -\frac{(t_2+1)^2}{t_2+1+\ln t_2} < \gamma < \frac{-2t_2(t_2+1)}{3(t_2+1)+2\ln t_2} = -\frac{1+t_2}{\ln t_2} [t_2 - 1 - a_0(t_2)].$$

Численные расчёты показывают, что при больших t_2 $a(t_2) \rightarrow u(t_2)$, следовательно,

$$a(t_2) \rightarrow -\frac{(t_2+1)^2}{t_2+1+\ln t_2} = \gamma_0(t_2). \quad \text{На рис. 4 изображена область } \mathcal{D}, \text{ функции } u(t_2), v(t_2) \text{ и } a_0(t_2). \text{ На рис. 5 изображены функции } a(t_2) - u(t_2) \text{ и}$$

$$\gamma(t_2) - \gamma_0(t_2).$$

Родственное /1/ уравнение $\frac{z''}{(1+z^2)^{3/2}} + \frac{\beta}{r} \frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = p + \frac{a}{r^2}$ имеет решение

$$z(r) = \int_1^r \frac{\chi(x) dx}{\sqrt{1-\chi^2(x)}}, \quad \text{где } \chi(x) = \frac{a}{\beta-1} \cdot \frac{1}{x} + \frac{p}{\beta+1} x + \frac{A}{x^\beta}, \quad (\beta \neq 1).$$

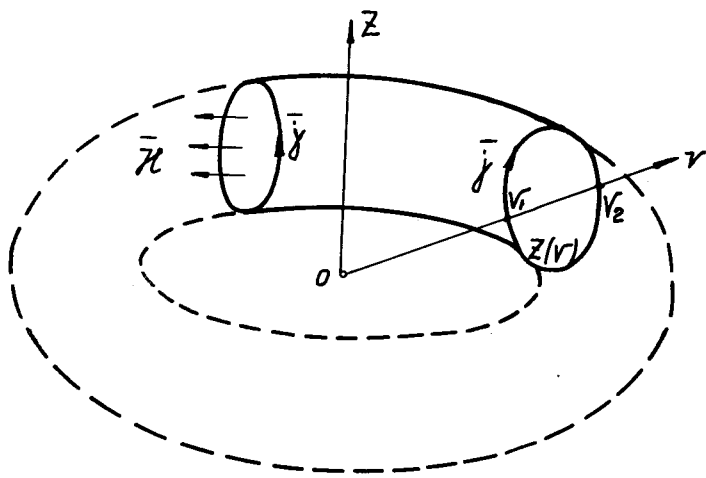


Рис. 1.

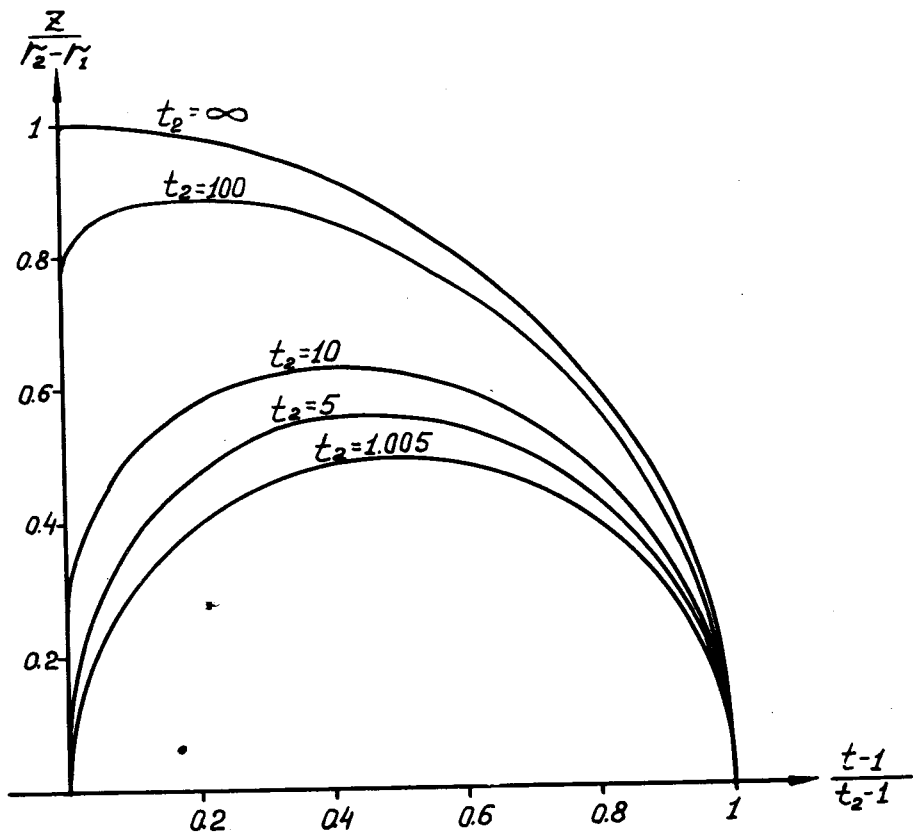


Рис. 2.

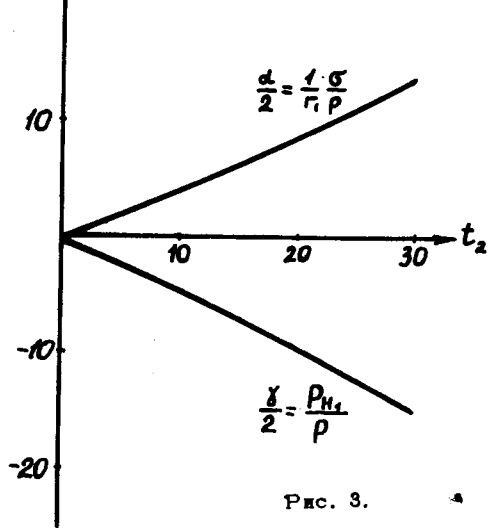


Рис. 3.

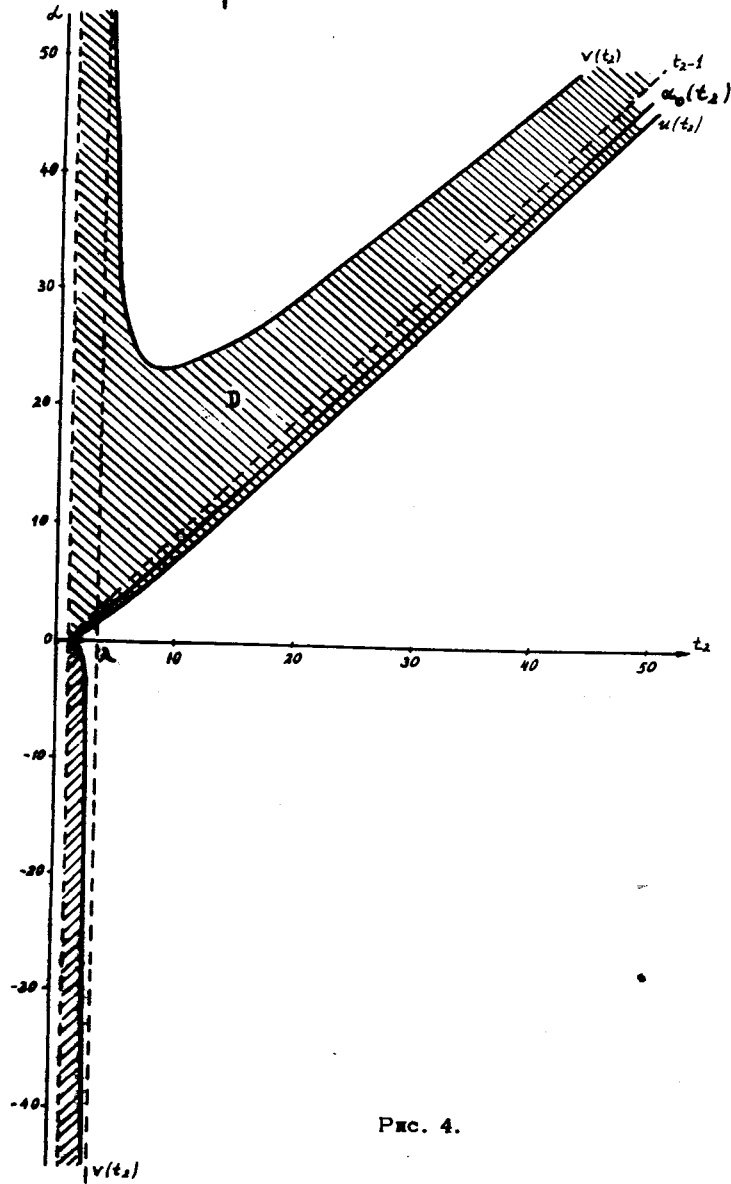


Рис. 4.

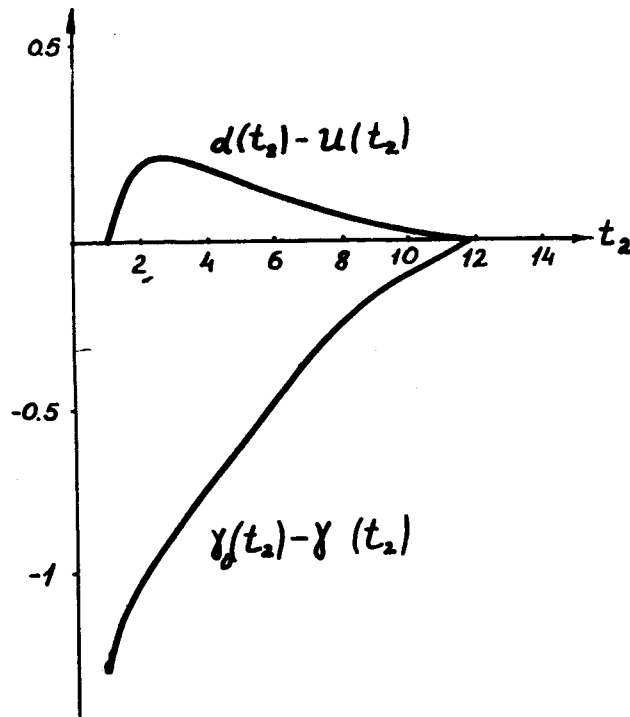


Рис. 5.

Л и т е р а т у р а

1. П. Аппель. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. ОНТИ, 1936г. Л-М.
2. S. A. Colgate. Nucleonics, 17, N 10, 82, (1959).

Рукопись поступила в издательский отдел
23 марта 1963 года