ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

С.Б. Рубин

1240

О ВЫЧИСЛЕНИИ СПЕКТРА ЭНЕРГИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ЛИНЕЙНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

Дубна 1963 год

С.Б. Рубин

1240

О ВЫЧИСЛЕНИИ СПЕКТРА ЭНЕРГИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ЛИНЕЙНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

Дубна 1963 год

Введение

Рассматривается стационарная задача о движении релятивистской частицы в поле, характеризуемом в полярных координатах r, θ, z векторным потенциалом $A_r = A_\theta = 0$, $A_z = A(r)$ и скалярным потенциалом $\Phi = 0$.

В таком поле состояние частицы можно характеризовать определенным значением энергии E, продольным импульсом p_z и проекцией на ось $(0z)$ полного момента количества движения j_z.

Используется уравнение Дирака, записанное с помощью двух спинорных функций ϕ, χ. После исключения χ, для поля указанного вида уравнение Дирака сводится к системе /для электрона/:

$$\frac{E^2 - m^2c^4}{c^2}\phi = \{\hat{\vec{p}}^{\,2} + 2\frac{e}{c}A\hat{p}_z + \frac{e^2A^2}{c^2} + \frac{he}{c}(\vec{\sigma}, \operatorname{rot}\vec{A})\}\phi, \qquad /1/$$

где $\vec{\sigma}$ – векторная матрица Паули, $\hat{\vec{p}} = -ih$, $e = |e|$. В данном случае

$$(\vec{\sigma}, \operatorname{rot}\vec{A}) = (\sigma_x \sin\theta - \sigma_y \cos\theta)\frac{dA}{dr}. \qquad /2/$$

В соответствии с тем, что $\hat{j}_z = -ih\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{h}{2}\sigma_z$ и $\hat{p}_z$ коммутируют с гамильтонианом, переменные θ, z отделяются подстановкой

$$\phi_1 = B_1 R_1(r)\, e^{is\theta + i\frac{p_z}{h}z}, \quad \phi_2 = B_2 R_2(r)\, e^{i(s+1)\theta + i\frac{p_z}{h}z}. \qquad /3/$$

Собственные значения $\hat{j}_z$ должны быть полуцелыми и равны: $j_z = h(s+½)$ s должно принимать значения $0 \pm 1, \pm 2 \ldots$

Обозначим

$$Q(r) = \frac{1}{c^2}[E^2 - m^2c^4 - [p_z + \frac{e}{c}A(r)]^2c^2] \qquad /4/$$

и положим $B_1 = 1$, $B_2 = i\mu$, тогда для радиальных функций R_1, R_2 получается система /можно выбрать $\mu = \pm 1$/:

$$[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{s^2}{r^2} + \frac{Q(r)}{h^2}]R_1 = -\frac{\mu e}{ch}\frac{dA}{dr}R_2$$

$$[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{(s+1)^2}{r^2} + \frac{Q(r)}{h^2}]R_2 = -\frac{\mu e}{ch}\frac{dA}{dr}R_1 \qquad /5/$$

Если сделать подставку

$$R = r^{-1/2}\tilde{\tilde{R}}_j \qquad (j=1,2), \qquad /6/$$

то /5/ приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{d^2}{dr^2}+(1/4-s^2)\frac{1}{r^2}+\frac{Q(r)}{h^2}\right]\tilde{\tilde{R}}_1 = -\frac{\mu e}{ch}\frac{dA}{dr}\tilde{\tilde{R}}_2 \\ &\left[\frac{d^2}{dr^2}+[1/4-(s+1)^2]\frac{1}{r^2}+\frac{Q(r)}{h^2}\right]\tilde{\tilde{R}}_2 = -\frac{\mu e}{ch}\frac{dA}{dr}\tilde{R}_1 . \end{aligned}\right\} \text{x/} \qquad /7/$$

Ввиду сложности системы /5/ /или /7// даже для простых конкретных выражений для $A(r)$ ограничимся рассмотрением решений, соответствующих только области спектра, для которой величина $(E^2-m^2c^4-p_z^2c^2)\frac{1}{h^2c^2}$ достаточно велика. Для такой области задача упрощается, т.к. можно будет использовать способ квазиклассического приближения[xx/].

1. Конкретизируя функцию $A(r)$, нужно отметить, что для поля принятого вида обычно $A(0)=A'(0)=0$, т.е. при $r\to 0$, $A(r)\approx A_0 r^a$, где $a>1$; при $r\to\infty$, $A(r)$ по меньшей мере логарифмически стремится к бесконечности. Поэтому имеется область, где поле мало и частица "свободна", с другой стороны, имеется область, где величина $Q(r)$ становится <0, так что возможны "точки поворота". В ближайшей окрестности точки $r=0$ главную роль в /5/ играют центробежные члены и $Q(r)\approx Q(0)$. При увеличении r основную роль играет член $\frac{1}{h^2}Q(r)$. Оказывается возможным произвести сшивание решений в двух этих областях.

Принимая во внимание, что $A'(r)\to 0$ при $r\to 0$, пренебрегаем в /5/ правыми частями, получаем решение системы в окрестности $r=0$ в виде:

$$\begin{aligned} &R_1 \approx M_1 J_s\left(r\,.\,\frac{Q(0)^{1/2}}{h}\right) \\ &R_2 \approx M_2 J_{s+1}\left(r\,.\,\frac{Q(0)^{1/2}}{h}\right), \end{aligned} \qquad /8/$$

где M_1, M_2 –постоянные /легко показать, что /8/ является супперпозицией решений для свободной частицы с определенным импульсом и проекцией спина/. Так как величина $\frac{1}{h^2}Q(0)\gg 1$, то даже для весьма малых значений r и для не слишком больших s можно воспользоваться асимптотическими формулами.

---

x/ При замене $\mu=1$ на $\mu=-1$ и одновременно замене p_z, A_z на $-p_z$, $-A_z$, /5/,/7/ остаются неизменными.

xx/ Квазиклассическое приближение к уравнению Дирака применял Паули[/1/], который таким способом показал, как происходит предельный переход от механики Дирака к классической релятивистской механике заряженной частицы; см. также[/2/].

$$R_1 \approx M_1\sqrt{\frac{2h}{\pi r}}\, Q(0)^{-1/4} \cdot \cos\left[r\, \frac{Q(0)^{1/2}}{h}\, y - \frac{\pi}{2}\, s - \frac{\pi}{4} \right]$$

$$R_2 \approx M_2\sqrt{\frac{2h}{\pi r}}\, Q(0)^{-1/4} \cdot \cos\left[r\, \frac{Q(0)^{1/2}}{h} - \frac{\pi}{2}\,(s+1) - \frac{\pi}{4} \right] . \qquad /9/$$

Для приближенного решения в области конечных значений r удобны уравнения /7/.

Пусть

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{R}}_1 + \tilde{\tilde{R}}_2 &= w_1\, e^{\frac{i}{h} v_1} \\ \tilde{\tilde{R}}_1 - \tilde{\tilde{R}}_2 &= w_2\, e^{\frac{i}{h} v_2}, \end{aligned} \qquad /10/$$

где $v_1(r)$, $v_2(r)$ определяются по формулам

$$v_1'^2 = Q(r) + \frac{eh}{c} A'(r)\,\mu , \qquad v_2'^2 = Q(r) - \frac{eh}{c} A'(r)\,\mu , \qquad /11/$$

а $w_1(r)$, $w_2(r)$ –новые неизвестные функции. Для них получаются уравнения

$$i v_1'' w_1 + 2i v_1' w_1' = -h w_1'' + h\left\{ -(1/4 - s^2)\frac{1}{r^2} w_1 + \frac{2s+1}{r^2}\, 1/2\,(w_1 - w_2 e^{\frac{i}{h}(v_2 - v_1)}) \right\} \qquad /12/$$

$$i v_1'' w_2 + 2i v_2' w_2' = -h w_2'' + h\left\{ -(1/4 - s^2)\frac{1}{r^2} w_2 - \frac{2s+1}{r^2}\, 1/2\,(w_1\, e^{\frac{i}{h}(v_1 - v_2)} - w_2) \right\} .$$

Обозначим

$$p_1 = +\sqrt{Q + \frac{eh}{c} A' \cdot \mu} , \qquad p_2 = +\sqrt{Q - \frac{eh}{c} A' \cdot \mu} . \qquad /13/$$

В области, где p_1, p_2 действительные, $\left| e^{\pm\frac{i}{h}(v_2 - v_1)} \right| = 1$. Таким образом, правые части /12/, пропорциональные h, малы. Пренебрегая ими, получим решения

$$w_1 = \frac{const}{\sqrt{p_1}} , \qquad w_2 = \frac{const}{\sqrt{p_2}} . \qquad /14/$$

Возвращаясь к $\tilde{\tilde{R}}_1$, $\tilde{\tilde{R}}_2$, можно записать общее решение для рассматриваемой области в виде:

$$\tilde{\tilde{R}}_1 = \frac{1}{\sqrt{p_1}}\left[c_1 e^{\frac{i}{h}\int p_1 dr} + c_2 e^{-\frac{i}{h}\int p_1 dr} \right] + \frac{1}{\sqrt{p_2}}\left[c_3 e^{\frac{i}{h}\int p_2 dr} + c_4 e^{-\frac{i}{h}\int p_2 dr} \right]$$

$$\tilde{\tilde{R}}_2 = \frac{1}{\sqrt{p_1}}\left[c_1 e^{\frac{i}{h}\int p_1 dr} + c_2 e^{-\frac{i}{h}\int p_1 dr} \right] - \frac{1}{\sqrt{p_2}}\left[c_3 e^{\frac{i}{h}\int p_2 dr} + c_4 e^{-\frac{i}{h}\int p_2 dr} \right], \qquad /15/$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 –постоянные.

Рассмотрим, как смыкается это решение с полученным ранее для области "малых" r. В области малых r $p_1 \approx p_2 = Q(0)^{1/2} \equiv p_0$. Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} R_1 &= r^{-1/2}\, \tilde{\tilde{R}}_1 = \frac{1}{\sqrt{p_0 r}}\left[(c_1 + c_3)\, e^{\frac{i}{h} p_0 r} + (c_2 + c_4)\, e^{-\frac{i}{h} p_0 r} \right] \\ R_2 &= r^{-1/2}\, \tilde{\tilde{R}}_2 = \frac{1}{\sqrt{p_0 r}}\left[(c_1 - c_3)\, e^{\frac{i}{h} p_0 r} + (c_2 - c_4)\, e^{-\frac{i}{h} p_0 r} \right]. \end{aligned} \qquad /16/$$

Из сравнения с /9/ определяются постоянные c_1, c_2, c_3, c_4. После подстановки c_1, c_2, c_3, c_4 в /15/, последние приводятся к виду:

$$\tilde{\tilde{R}}_1 = \frac{2\sqrt{M_1^2+M_2^2}}{\sqrt{p_1}} \cos\left(\frac{1}{h}\int_0^r p_1\,dr - \frac{\pi}{2}s - \frac{\pi}{4} - a\right) + \frac{2\sqrt{M_1^2+M_2^2}}{\sqrt{p_2}} \cos\left(\frac{1}{h}\int_0^r p_2\,dr - \frac{\pi}{2}s - \frac{\pi}{4} + a\right), \quad /17/$$

$$\tilde{\tilde{R}}_2 = \frac{2\sqrt{M_1^2+M_2^2}}{\sqrt{p_1}} \cos\left(\frac{1}{h}\int_0^r p_1\,dr - \frac{\pi}{2}s - \frac{\pi}{4} - a\right) - \frac{2\sqrt{M_1^2+M_2^2}}{\sqrt{p_2}} \cos\left(\frac{1}{h}\int_0^r p_2\,dr - \frac{\pi}{2}s - \frac{\pi}{4} + a\right),$$

где $tg\, a = M_2 / M_1$. /18/

Соотношения /17/ непригодны в окрестности точек $r = a_1$, $r = a_2$, в которых обращаются в нуль соответственно $p_1(r)$ и $p_2(r)$. Для рассмотрения окрестности этих точек используется система /7/, в которой отбрасываются малые в этой области области центробежные члены. Подстановкой

$$\tilde{\tilde{R}}_1 + \tilde{\tilde{R}}_2 = u_1 \qquad /19/$$

$$\tilde{\tilde{R}}_1 - \tilde{\tilde{R}}_2 = u_2$$

соответствующие уравнения расщепляются на два "независимых" уравнения второго порядка, каждое из которых исследуется соответственно около точек $r = a_1$ или $r = a_2$ обычным способом, см./3/, с учетом требуемого экспоненциального затухания решений при $r \to \infty$. В результате после возвращения к прежним переменным, получаем $\tilde{\tilde{R}}_1$, $\tilde{\tilde{R}}_2$ в стандартной асимптотической форме:

$$\tilde{\tilde{R}}_1 = \frac{D_1}{\sqrt{p_1}} \cos\left(\frac{1}{h}\int_r^{a_1} p_1\,dr - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{D_2}{\sqrt{p_2}} \cos\left(\frac{1}{h}\int_r^{a_2} p_2\,dr - \frac{\pi}{4}\right) \qquad /20/$$

$$\tilde{\tilde{R}}_2 = \frac{D_1}{\sqrt{p_1}} \cos\left(\frac{1}{h}\int_r^{a_1} p_1\,dr - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{D_2}{\sqrt{p_2}} \cos\left(\frac{1}{h}\int_r^{a_2} p_2\,dr - \frac{\pi}{4}\right).$$

Из условий непрерывности перехода /17/ в /20/ имеем:

$$\frac{1}{h}\int_0^{a_1} p_1\,dr = \frac{\pi}{2}(s+1) + a + n\pi \qquad /21/$$

$$\frac{1}{h}\int_0^{a_2} p_2\,dr = \frac{\pi}{2}(s+1) - a + n\pi$$

$D_1 = D_2 = (-1)^n \cdot 2\sqrt{M_1^2+M_2^2}$, где n –целое;

$$p_1 = +\sqrt{\frac{1}{c^2}\left[E^2 - m^2c^4 - c^2\left[p_z + \frac{e}{c}A(r)\right]^2\right] + \frac{eh}{c}A'(r)\,\mu} \qquad /22/$$

$$p_2 = + \sqrt{\frac{1}{c^2}\left[E^2 - m^2 c^4 - c^2\left[p_s + \frac{e}{c}A(r)\right]^2\right] - \frac{eh}{c}A'(r)\,\mu} \quad ^{x/} \qquad /22/$$

Таким образом, из уравнений /21/ определяются значения E и неизвестный фазовый угол a. Исключая a, получаем уравнение, определяющее энергетический спектр в соответствии с заданием набора чисел p_z, n, s, причем само s определяется заданием j_z.

$$\int_0^{a_1(E)} p_1(E,r)\,dr + \int_0^{a_2(E)} p_2(E,r)\,dr = \pi h\,(2n+s+1). \qquad /23/$$

Так как $A(r)$ обычно является четной функцией r /если продолжить значения r в область $r<0$ /, то учитывая /22/, формулу /23/ можно записать в более компактном виде:

$$\int_{r_1 E}^{r_2(E)} p_1(r,E)\,dr = \pi h\,(2n+s+1), \qquad /24/$$

где r_1, r_2 – корни уравнения $p_1(r,E)=0$ /25/, причем из характера функции $A(r)$ следует, что $r_1 < 0$, $r_2 > 0$.

В заключении автор приносит глубокую благодарность В.И. Векслеру за постановку задачи и постоянное внимание. Автор благодарен также М.Л. Иовновичу за полезные обсуждения.

Литература

1. W.Pauli, Helv. Phys. Acta, 5, 179 (1932).
2. K.Bechert, Helv. Phys. Acta, 6, 82 (1933).
3. Л. Ландау и Е. Лифшиц. Квантовая механика. Стр. 190, ОГИЗ. М-Л. 1948.

x/ При замене $\mu=1$ на $\mu=-1$ p_1 и p_2 переходят друг в друга, а спектр не меняется.