ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Н.Б. Рубин

1239

О "ПОЛИЖИДКОСТНЫХ" ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ГАЗА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

ЖТФ, 1964, т 34, в 4, с 676-681.

Дубна 1963 год

Н.Б. Рубин

12 39

О "ПОЛИЖИДКОСТНЫХ" ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ГАЗА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Направлено в ЖТФ

Дубна 1963 год

В данной работе на основе кинетического уравнения для релятивистских заряженных частиц строятся замкнутые гидродинамические уравнения с помощью локального, обобщенного на релятивизм максвелловского распределения. В этом смысле полученные уравнения следует назвать уравнениями первого приближения[1].

Для каждого вида заряженных частиц берутся "свои" максвелловские распределения и столкновениями между частицами разных видов пренебрегается. Это отвечает "полижидкостному" приближению.

Аналогичные уравнения 1-го приближения получены также для случая, когда учитывается радиационное торможение частиц во внешнем и самосогласованном поле.

Гидродинамические уравнения (без учета радиационного торможения) релятивистских заряженных частиц, полученные на основе феноменологического подхода (см., например,[2]) с использованием тензора энергии-импульса релятивистской идеальной жидкости[3], не "шире" приведенных ниже. В то же время использованный в данной работе метод позволяет путем сравнения выразить в явном виде такие параметры, входящие в феноменологические уравнения, как энтропию, тепловую функцию, внутреннюю энергию и т.д. В этом смысле выбранный метод кажется предпочтительнее феноменологического. Он подчеркивает также приближенность подхода и открывает путь для возможных дальнейших обобщений.

1. Используем кинетическое уравнение для каждого сорта частиц, полученное в работе[4]. При этом в качестве импульсных переменных возьмем $p_a = m_0 \gamma \beta_a$.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q}_a \frac{\partial f}{\partial q_a} + \dot{p}_a \frac{\partial f}{\partial p_a} = - \frac{\partial I_a}{\partial p_a}\ ^{x)},$$

$$I_a = 2\pi e^4 L \int d^3p' \frac{U_{a\delta}}{\gamma\gamma'} \left\{ f \frac{\partial f'}{\partial p'_\delta} - f' \frac{\partial f}{\partial p_\delta} \right\}, \qquad (1)$$

L – кулоновский логарифм,

$$U_{a\delta} = \frac{\gamma^2\gamma'^2(1-\beta_\sigma\beta'_\sigma)^2}{c[\gamma^2\gamma'^2(1-\beta_\sigma\beta'_\sigma)^2-1]^{3/2}} \{ [\gamma^2\gamma'^2(1-\beta_\sigma\beta'_\sigma)^2-1]\,\delta_{a\delta} -$$

$$-\gamma^2\beta_a\beta_\delta - \gamma'^2\beta'_a\beta'_\delta + \gamma^2\gamma'^2(1-\beta_\sigma\beta'_\sigma)(\beta_a\beta'_\delta + \beta'_a\beta_\delta) \}$$

(обозначения, за исключением указанных, взяты из [4]). Здесь в соответствии с предположением, сделанным раньше, оставлен лишь интеграл столкновений частиц одного сорта. $\dot{p}_a$ – в приведенном уравнении определяется как внешними, так и самосогласованными электромагнитными полями.

---

x) Греческие индексы пробегают значения 1,2,3, а латинские индексы (см.дальше) – 1,2,3,4.

Интегрируя уравнение (1) по импульсному пространству и умножая его последовательно на p_λ и $p_4 = \frac{i}{c} E$ и также интегрируя по импульсному пространству /4/, получим уравнения моментов, которые будучи записанными в 4-мерном виде, выглядят так:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} [\rho < \frac{u_l u_k}{\gamma} >] = \frac{e}{m_0 c^2} F_{lk} \rho < \frac{u_k}{\gamma} > = \frac{F_{lk}}{m_0 c^3} j_k , \quad (2а)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_k} [\rho < \frac{u_k}{\gamma} >] = 0 . \quad (2б)$$

Моменты (нулевой и первый) от интеграла столкновений частиц одного сорта обратились, естественно, в нуль.

F_{lk} – тензор электромагнитного поля,

ρ – плотность частиц в лабораторной системе координат.

$\rho = \int f \, d^3p$, $< a > = \frac{1}{\rho} \int f \, a \, d^3p$. $T_{lk} = \rho < \frac{u_l u_k}{\gamma} >$ - поделенный на $m_0 c^2$ тензор энергии импульса газа заряженных частиц, u_l – 4 – скорость частиц: $u_l = \{ \beta_a \gamma , i\gamma \}$, $e\rho < \frac{u_k}{\gamma} > = \frac{1}{c} j_k$, j_k – плотность 4-тока.

T_{lk} , ρ , j_k – функции координат и времени.

Для замыкания системы (2) возьмем за f локальное максвелловское распределение.

$$f = \frac{e^{\frac{c \bar{u}_l P_l}{k\theta}}}{\int e^{\frac{c \bar{u}_l P_l}{k\theta}} d^3P d^3q} = \rho \frac{e^{\frac{c \bar{u}_l P_l}{k\theta}}}{\int e^{\frac{c \bar{u}_l P_l}{k\theta}} d^3P} = \rho \frac{e^{\frac{c \bar{u}_l p_l}{k\theta}}}{\int e^{\frac{c \bar{u}_l p_l}{k\theta}} d^3p} = \rho \frac{e^{\frac{m_0 c^2 \bar{u}_l u_l}{k\theta}}}{\int e^{\frac{m_0 c^2 \bar{u}_l u_l}{k\theta}} d^3p} , \quad (3а)$$

$$\rho = \frac{e^{\frac{e \bar{u}_l A_l}{k\theta}} \int e^{\frac{c \bar{u}_l P_l}{k\theta}} d^3p}{\int d^3q \, [e^{\frac{e \bar{u}_l A_l}{k\theta}} \int e^{\frac{c \bar{u}_l P_l}{k\theta}} d^3p]} . \quad (3б)$$

Здесь $\bar{u}_l$ – гидродинамическая 4-скорость: $\bar{u}_l = \{ < \beta_a > \bar{\gamma} , i \bar{\gamma} \}$, $\bar{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1 - <\beta_a><\beta_a>}}$. θ–температура в системе координат, где газ в данной точке покоится: $\frac{k\theta}{m_0 c^2} = <\gamma\beta_1^2> = <\gamma\beta_2^2> = <\gamma\beta_3^2>$ при $\bar{u}_a = 0$, $\bar{u}_4 = i$. Параметры ρ , $\bar{u}_l$, θ считаются функциями всех четырех координат;

$P_l = p_l + \frac{e}{c} A_l$; A_l есть 4-вектор поля.

Для вычисления нормировки функции f и вычисления T_{lk} и j_k с помощью этой функции рассмотрим /5/

$$\phi = \int e^{\frac{m_0 c^2 \bar{u}_l u_l}{k\theta}} \frac{d^3p}{\gamma} . \quad (4)$$

Для каждой пространственно-временной точки $\phi = inv$, так как $d^3p / \gamma = inv$. Поэтому, вводя в каждой точке (независимо) систему координат, где газ покоится, т.е. $\bar{u}_a = 0$, $\bar{u}_4 = i$, найдем:

$$\Phi = 4\pi m_0^3 c^3 \frac{k\theta}{m_0 c^2} K_1 (\frac{m_0 c^2}{k\theta}) , \quad (5)$$

$K_1\left(\frac{m_0c^2}{k\theta}\right)$ – 1 – ая функция Макдональда.

Вводя $\xi_l = \frac{m_0 c^2}{k\theta}\bar{u}_l$ (из $\bar{u}_l\ \bar{u}_l = -1$ – следует $\frac{m_0 c^2}{k\theta} = \sqrt{-\xi_l \xi_l}$), запишем

$$\phi = 4\pi\, m_0^3 c^3 \frac{1}{\sqrt{-\xi_l \xi_l}}\, K_1(\sqrt{-\xi_l \xi_l}) = \int e^{\xi_l u_l} \frac{d^3 p}{\gamma}\ . \qquad (6)$$

Тогда интеграл, входящий в нормировку,

$$\int e^{\xi_l u_l}\, d^3 p = -i\, \frac{\partial \phi}{\partial \xi_4}\ , \qquad (7)$$

$$\rho < \frac{u_k}{\gamma} > = \int f\, \frac{u_k}{\gamma}\, d^3 p = i\rho\, \frac{\partial\phi/\partial\xi_k}{\partial\phi/\partial\xi_4}\ , \qquad \rho < \frac{u_l u_k}{\gamma} > = \int f\, \frac{u_l u_k}{\gamma}\, d^3 p = i\rho\, \frac{\partial^2\phi/\partial\xi_l\partial\xi_k}{\partial\phi/\partial\xi_4}\ .$$

Используя 1-ю часть уравнения (6) и (7), найдем

$$f = \frac{e^{\frac{c\bar{u}_l P_l}{k\theta}}}{4\pi m_0^3 c^3 \int e^{\frac{e\bar{u}_l A_l}{k\theta}} \bar{\gamma}\, \frac{k\theta}{m_0 c^2} K_2\left(\frac{m_0 c^2}{k\theta}\right) d^3 q} = \frac{\rho\, e^{\frac{m_0 c^2 \bar{u}_l u_l}{k\theta}}}{4\pi\, m_0^3 c^3 \bar{\gamma}\, \frac{k\theta}{m_0 c^2}\, K_2\left(\frac{m_0 c^2}{k\theta}\right)}\ , \qquad (8а)$$

$$\rho = \frac{\frac{k\theta}{m_0 c^2}\, \bar{\gamma}\, K_2\left(\frac{m_0 c^2}{k\theta}\right) e^{\frac{e\bar{u}_l A_l}{k\theta}}}{\int \frac{k\theta}{m_0 c^2}\, \bar{\gamma}\, K_2\left(\frac{m_0 c^2}{k\theta}\right) e^{\frac{e\bar{u}_l A_l}{k\theta}}\, d^3 q}\ ; \qquad (8б)$$

$$< \frac{u_k}{\gamma} > = \frac{\bar{u}_k}{\bar{\gamma}}\ ; \quad T_{lk} = \rho < \frac{u_l u_k}{\gamma} > = \rho\left[\frac{\bar{u}_l \bar{u}_k}{\bar{\gamma}}\, G\left(\frac{m_0 c^2}{k\theta}\right) + \frac{1}{\bar{\gamma}}\, \frac{k\theta}{m_0 c^2}\delta_{lk}\right], \quad G = \frac{K_3}{K_2}\ . \qquad (9)$$

Подставим (9) и (2). Тогда окончательно получим следующую замкнутую систему (при добавлении уравнений Максвелла для электромагнитного поля – внешнего и поля частиц) гидродинамических уравнений 1-го приближения

$$\bar{u}_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left[G\left(\frac{m_0 c^2}{k\theta}\right)\bar{u}_l\right] + \frac{\bar{\gamma}}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial q_l}\left[\frac{\rho}{\bar{\gamma}}\,\frac{k\theta}{m_0 c^2}\right] = \frac{e}{m_0 c^2} F_{lk}\bar{u}_k = \frac{\bar{\gamma}}{\rho}\,\frac{1}{m_0 c^3} F_{lk}\, j_k\ , \qquad (10а)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\rho\, \frac{\bar{u}_k}{\bar{\gamma}}\right) = 0\ . \qquad (10б)$$

При $\theta \to 0$ функция $G\left(\frac{m_0 c^2}{k\theta}\right) \to 1$, и уравнения (10а) совпадают по форме, естественно, с уравнениями, описывающими движение одной частицы в электромагнитном поле; при отсутствии же электромагнитного поля и любом θ – с таковыми для незаряженного газа [5].

Умножая (10а) на $\bar{u}_i$; (и суммируя, конечно, по i) и учтя, что $F_{lk}\,\bar{u}_k\,\bar{u}_l = 0$, получим, как в [5],

$$\bar{u}_l \frac{\partial}{\partial q_l}\left\{\ln\left[\frac{\rho}{\bar{\gamma}}\, \frac{m_0 c^2/k\theta}{K_2(m_0 c^2/k\theta)}\, e^{-\frac{m_0 c^2}{k\theta} G\left(\frac{m_0 c^2}{k\theta}\right)}\right]\right\} = 0\ , \qquad (11а)$$

или, используя (10б)

$$\frac{\partial}{\partial q_l}\{\bar{u}_l\frac{\rho}{\bar{\gamma}}\ln[\frac{\rho}{\bar{\gamma}}\frac{m_0c^2/k\theta}{K_2(m_0c^2/k\theta)}e^{-\frac{m_0c^2}{k\theta}G(\frac{m_0c^2}{k\theta})}]\}=0\ . \tag{11б}$$

Определим теперь:

$$w=\frac{\rho}{\bar{\gamma}}m_0c^2G(\frac{m_0c^2}{k\theta})=inv;\quad p=\frac{\rho k\theta}{\bar{\gamma}}=\rho kT=inv,\quad T=\theta/\bar{\gamma}\ ,$$

$$\epsilon=\rho m_0c^2\langle\gamma\rangle=\rho m_0c^2[G(\frac{m_0c^2}{k\theta})\bar{\gamma}-\frac{1}{\bar{\gamma}}\frac{k\theta}{m_0c^2}]\ , \tag{12}$$

$$\sigma=\frac{\rho}{\bar{\gamma}}\ln[\frac{\rho}{\bar{\gamma}}\frac{m_0c^2/k\theta}{K_2(m_0c^2/k\theta)}e^{-\frac{m_0c^2}{k\theta}G(\frac{m_0c^2}{k\theta})}]=inv.$$

w – тепловая функция единицы объема, ϵ – внутренняя энергия единицы объема, T – температура, p – давление, σ – энтропия единицы объема.

Соответственно, если перейти в каждой точке в систему координат, где газ покоится, надо положить $\bar{\gamma}=1$, и учесть, что θ –скаляр, определенный лишь в собственной системе. Тогда

$$w=w_0=\rho_0m_0c^2G(\frac{m_0c^2}{kT_0});\quad p=p_0=\rho kT=\rho_0kT_0;\quad T_0=\theta\ ;$$

$$\epsilon_0=\rho_0m_0c^2[G(\frac{m_0c^2}{kT_0})-\frac{kT_0}{m_0c^2}]=w_0-p_0\ ; \tag{13}$$

$$\sigma=\sigma_0=\rho_0\ln[\rho_0\frac{m_0c^2/kT_0}{K_2(m_0c^2/kT_0)}e^{-\frac{m_0c^2}{kT_0}G(\frac{m_0c^2}{kT_0})}].$$

При больших температурах $G(\frac{m_0c^2}{kT_0})=4\frac{kT_0}{m_0c^2}$, при малых температурах $G(\frac{m_0c^2}{kT_0})=1+\frac{5}{2}\frac{kT_0}{m_0c^2}$. Тогда, в частности, при малых температурах имеют место обычные формулы:

$$\epsilon_0=\rho_0(m_0c^2+\frac{3}{2}kT_0),\quad w_0=\rho_0(m_0c^2+\frac{5}{2}kT_0)=\epsilon_0+p_0 \tag{14}$$

В соответствии с (12) и (9),

$$\langle\frac{u_k}{\gamma}\rangle=\frac{\bar{u}_k}{\bar{\gamma}}\ ,\qquad T_{lk}=\frac{1}{m_0c^2}\{w\bar{u}_l\bar{u}_k+p\delta_{lk}\}\ . \tag{15}$$

Если подставить (15) непосредственно в (2а), то получим уравнение, совпадающее при отсутствии электромагнитного поля с уравнением (125,4) из /3/:

$$\bar{u}_l\frac{\partial}{\partial q_k}(w\bar{u}_k)+w\bar{u}_k\frac{\partial\bar{u}_l}{\partial q_k}+\frac{\partial p}{\partial q_l}=eF_{lk}\rho\frac{\bar{u}_k}{\bar{\gamma}}=\frac{1}{c}F_{lk}j_k\ . \tag{16}$$

Уравнение же (11а) и (11б) суть

$$\bar{u}_l \frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{\bar{\gamma}}{\rho}\sigma\right) = 0 ; \qquad \frac{\partial}{\partial q_l}(\sigma \bar{u}_l) = 0 . \tag{17}$$

$\rho/\bar{\gamma}$ – собственный объем.

Таким образом, гидродинамические уравнения первого приближения совпадают с приведенными в /2/, причем для w, ϵ, p, σ должны быть использованы выражения (12).

2. Учтем теперь радиационное торможение частиц во внешнем и самосогласованном полях.

Возьмем кинетическое уравнение в "неготовом" виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(f\dot{q}_a)}{\partial q_a} + \frac{\partial(f\dot{p}_a)}{\partial p_a} = -\frac{\partial I_a}{\partial p_a} . \tag{18}$$

Если отсутствует радиационное торможение, то $\frac{\partial \dot{q}_a}{\partial q_a} + \frac{\partial \dot{p}_a}{\partial p_a} = 0$ x), и (18) переходит в (1).

В рассматриваемом теперь случае в уравнение $u_k \frac{\partial u_l}{\partial q_k} = \frac{e}{m_0 c^2} F_{lk} u_k$, которое использовалось раньше для выражения $\dot{p}_a$, должна быть добавлена сила торможения. Уравнения движения примут вид /6/

$$u_k \frac{\partial u_l}{\partial q_k} = \frac{e}{m_0 c^2} F_{lk} u_k + \frac{2e^3}{3m_0^2 c^4}\left[\frac{\partial F_{lk}}{\partial q_\ell} u_k u_\ell - \frac{e}{m_0 c^2} F_{l\ell} F_{k\ell} u_k - \frac{e}{m_0 c^2} F_{k\ell} F_{kn} u_l u_\ell u_n\right]. \tag{19}$$

Умножая (18) на 1 и на p_l и используя (19), получим, аналогично тому, как это делалось в начале работы,

$$\frac{\partial}{\partial q_k}\left[\rho < \frac{u_l u_k}{\gamma} >\right] = \rho\left\{\frac{e}{m_0 c^2} F_{lk} < \frac{u_k}{\gamma} > + \frac{2e^3}{3m_0^2 c^4}\left[\frac{\partial F_{lk}}{\partial q_\ell} < \frac{u_k u_\ell}{\gamma} > - \frac{e}{m_0 c^2} F_{l\ell} F_{k\ell} < \frac{u_k}{\gamma} > - \frac{e}{m_0 c^2} F_{k\ell} F_{kn} < \frac{u_l u_\ell u_n}{\gamma} >\right]\right\} \tag{20a}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_k}\left[\rho < \frac{u_k}{\gamma} >\right] = 0 . \tag{20б}$$

Опять используя локальное максвелловское распределение, получим

$$\bar{u}_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left[G\left(\frac{m_0 c^2}{k\theta}\right)\bar{u}_l\right] + \frac{\bar{\gamma}}{\rho}\frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{k\theta}{m_0 c^2}\frac{\rho}{\bar{\gamma}}\right) = \frac{e}{m_0 c^2} F_{lk}\bar{u}_k + \frac{2e^3}{3m_0^2 c^4}\left\{\frac{\partial F_{lk}}{\partial q_\ell}\left[\bar{u}_k \bar{u}_\ell G\left(\frac{m_0 c^2}{k\theta}\right) + \delta_{k\ell}\frac{k\theta}{m_0 c^2}\right] - \right. \tag{21}$$

$$\left. - \frac{e}{m_0 c^2} F_{l\ell} F_{k\ell}\bar{u}_k - \frac{e}{m_0 c^2} F_{k\ell} F_{kn}\left[\bar{u}_l \bar{u}_\ell \bar{u}_n \frac{K_4\left(\frac{m_0 c^2}{k\theta}\right)}{K_2\left(\frac{m_0 c^2}{k\theta}\right)} + (\bar{u}_n \delta_{l\ell} + \bar{u}_l \delta_{n\ell} + \bar{u}_\ell \delta_{ln})\frac{k\theta}{m_0 c^2} G\left(\frac{m_0 c^2}{k\theta}\right)\right]\right\}.$$

При нулевой температуре ($\theta \to 0$) эти уравнения совпадают по форме с уравнениями движения одной частицы (19) при учете радиационного торможения.

Автор благодарен А.Б.Кузнецову и другим товарищам по работе за полезные обсуждения.

---

x) Кстати, в декартовой системе $\dot{q}_a$ не зависит от q_a, и $\frac{\partial \dot{p}_a}{\partial p_a} = 0$.

Литература

1. С. Чепмен и Т. Каулинг. Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, Москва, (1960).
2. В.Н. Цытович. ЖЭТФ, 40, 1325 (1961).
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, Москва (1954).
4. С.Т. Беляев, Г.И. Будкер. ДАН, 107, 807 (1956).
5. Д.Л. Синдж. Релятивистский газ, Атомиздат, Москва (1960).
6. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля, ГИФМЛ, Москва (1960).

Рукопись поступила в издательский отдел
25 марта 1963 года.