12

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

Р.М. Мурадян

1212

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ЛЕЖАНДРА

Дубна 1963 год

Р.М. Мурадян

1212

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ЛЕЖАНДРА

Дубна 1963 год

СОДЕРЖАНИЕ

§I. Основные свойства функций Лежандра $P_\ell(z)$ и $Q_\ell(z)$.

A. Поведение в плоскости z 5

B. Поведение в плоскости ℓ 7

C. Свойства симметрии при отражении индекса и аргумента 7

Д. Функции Лежандра " на разрезе" 9

§2. Интегральные представления

A. Интегральное представление произведения двух полиномов Лежандра 10

B. Интегральное представление произведения двух функций Лежандра второго рода 11

§3. Суммы, содержащие произведения функций Лежандра

A. Сумма произведения трех полиномов Лежандра 12

B. Сумма произведения двух функций Лежандра второго рода на полином Лежандра 13

§4. Интегралы по индексу

A. Преобразование Зоммерфельда - Ватсона- Редже 13

B. Вычисление одного интеграла 18

ЛИТЕРАТУРА 20

Аннотация

В работе изложены основные сведения из теории функций Лежандра с целью их применения к работе с представлением Мандельстама и с комплексными угловыми моментами Редже. Общий план работы следующий: в § 1 рассмотрены хорошо известные свойства функций Лежандра первого и второго рода с произвольным комплексным индексом и аргументом; в § 2 и § 3 приведены менее известные интегральные представления и значения некоторых сумм, содержащих функции Лежандра; в § 4 обсуждаются некоторые математические свойства преобразования Зоммерфельда-Ватсона-Редже.

R.M.Muradyan

SOME PROPERTIES OF LEGENDRE FUNCTIONS

Abstract

The paper deals with the main information from the theory of Legendre functions in order to apply it to the Mandelstam representation and to the complex angular momenta of Regge. The contents of the paper are as follows: In § 1 the well – known properties of the Legendre functions of the first and second kinds with arbitrary complex index and argument are treated.

In §§ 2 and 3 are given less known integral representations and the values of some sums containing the Legendre functions; In § 4. some mathematical properties of Zommerfeld – Watson – Regge transformation are discussed.

§I. Основные свойства функций Лежандра

Функции Лежандра $P_\ell(z)$ и $Q_\ell(z)$ являются двумя линейно-независимыми решениями уравнения Лежандра [I]

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-2z\frac{du}{dz}+\ell(\ell+1)u=0 .$$

Точки $z=\pm 1$ и ∞ являются особыми точками этого уравнения. Особые точки уравнения, вообще говоря, являются особыми и для решений, однако, при некоторых условиях эти особенности могут исчезать в одном из решений (например, при решении задач на собственные значения как раз ищутся решения без особенностей). Тогда второе линейно- независимое решение в такой точке аналитичности первого решения обязательно имеет особенность. Перейдем к проверке этих утверждений и к непосредственному определению расположения особенностей функций $P_\ell(z)$ и $Q_\ell(z)$.

А. Поведение в плоскости z

Рассмотрим первое решение $P_\ell(z)$ как функцию комплексной переменной z при фиксированном произвольном комплексном ℓ. Чтобы выяснить характер и расположение особенностей выпишем из справочника Бейтмена [2] (том I, стр.I63-I64) поведение $P_\ell(z)$ при приближении z к "подозрительным" точкам $\pm$ I и ∞ :

при $z\to 1$ $\quad P_\ell(1)=1$ (I)

при $z\to -1$ $\quad P_\ell(z)\approx \frac{\sin \ell\pi}{\pi}\left\{\ln\frac{z+1}{2}+\pi \,\mathrm{ctg}\, \ell\pi\right\}$ (2)

при $|z|\to\infty$ $\quad P_\ell(z)\approx \frac{2^\ell\Gamma(\ell+\frac12)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\ell+1)}z^\ell+\frac{\Gamma(-\ell-\frac12)}{2^{\ell+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\ell)}z^{-\ell-1}$. (3)

Эти формулы могут быть также получены прямо из определения функций Лежандра при помощи гипергеометрических функций, приведенных в [I,2,3] .

Из этих формул следуют следующие факты:

Из (1) видно, что точка $z=$ I никогда не является особой для первого решения $P_\ell(z)$.

Из (2) видно, что точка z =-I является, вообще говоря, особой точкой первого решения $P(z)$, а именно логарифмической точкой ветвления; в частном случае, когда $\ell=n$ (здесь и ниже n =0, I,2,3 ...) эта особенность исчезает и вместо (2) поведение в точке -I определяется формулой:

$$P_n(-1) = (-1)^n. \tag{2'}$$

В этом случае функции Лежандра первого рода обычно называют полиномами Лежандра.

Из /3/ видно, что бесконечность всегда является особой точкой $P_\ell(z)$, а именно, точкой ветвления при нецелых ℓ или полюсом при целых. Обратим внимание на то, что в формуле /3/ имеет место так называемое явление Стокса. Это приводит к тому, что при $Re\,\ell > -1/2$ главный вклад дает первый член, а при $Re\,\ell < -1/2$ - второй. Говоря словами Морса и Фешбаха[4], два члена в асимптотическом разложении "играют в прятки" друг с другом, когда один из них испытывает "затмение", становясь меньше, чем ошибка в другом, то он скачком меняет фазу, выходя из тьмы..."

Таким образом из (1), (2') и (3) следует, что при целых положительных n $P_n(z)$ является аналитической в любой конечной области плоскости z и ее единственная особенность - это полюс на бесконечности порядка n. А из (1), (2) и (3) следует, что при нецелых ℓ $P_\ell(z)$ имеет точку ветвления при z =-I и на бесконечности и может быть однозначно определена в плоскости с разрезом от -I до $-\infty$, т.е. условием $|\arg(z+1)| < \pi$.

Рассмотрим второе решение $Q_\ell(z)$ как функцию комплексной переменной z при фиксированном комплексном ℓ за исключением случаев ℓ = -I, -2, -3,... Чтобы выяснить характер и расположение особенностей, выпишем из 2 поведение $Q_\ell(z)$ при приближении z к "подозрительным" точкам $\pm$ I и ∞:

при $z \to 1$ $$Q_\ell(z) \approx -\frac{1}{2} \ln \frac{z-1}{2} \tag{5}$$

при $z \to -1$ $$Q_\ell(z) \approx \frac{1}{2} \cos \ell\pi \left\{ \ln \frac{z+1}{2} - \pi \operatorname{tg} \ell\pi \right\} \tag{6}$$

при $|z| \to \infty$ $$Q_\ell(z) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\ell+1}} \frac{\Gamma(\ell+1)}{\Gamma(\ell+3/2)} z^{-\ell-1}. \tag{7}$$

Из (5) видно, что точка z =I всегда является особой для второго решения, именно логарифмической точкой ветвления.

Из (6) видно, что точка z = -I является, вообще говоря, особой точкой второго решения, а именно - логарифмической точкой ветвления. В частном случае, когда $\ell = n + 1/2$, где n целое положительное число или нуль, эта особенность исчезает.

Из (7) видно, что при нецелых ℓ бесконечность является точкой ветвления $Q_\ell(z)$, а при $\ell = n$, где n целое положительное число или нуль, особенность исчезает.

Таким образом, при целых $\ell = n$ функция $Q_n(z)$ определена в плоскости z с разрезом от -I до +I. При нецелых ℓ $Q_\ell(z)$ определена в плоскости z с разрезом от $-\infty$ до +I.

B. Поведение в плоскости ℓ

Рассмотрим первое решение $P_\ell(z)$ как функцию комплексной переменной ℓ при фиксированном комплексном z, причем $z \neq -1$. Ситуация здесь гораздо проще по сравнению с плоскостью z. Именно, в любой конечной части плоскости ℓ функция Лежандра первого рода $P_\ell(z)$ не имеет никаких особенностей, а особенность в бесконечно удаленной точке определяется при помощи асимптотической формулы [21]:

$$\underset{|\ell|\to\infty}{P_\ell(z) \to} \frac{1}{\sqrt{\ell}} A e^{\lambda_1\xi-\lambda_2\eta} + \frac{1}{\sqrt{\ell}} B e^{-\lambda_1\xi+\lambda_2\eta} \qquad |\arg \ell| < \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Здесь и ниже в (10) приняты следующие обозначения:

$$z = \cosh(\xi + i\eta) \qquad \xi \geq 0 \quad -\pi < \eta \leq \pi$$

$$\ell + 1/2 = \lambda_1 + i\lambda_2$$

Отметим, что в (8) мы снова встречаемся с явлением Стокса: при $\lambda_1\xi - \lambda_2\eta > 0$ второй член можно отбросить, при $\lambda_1\xi - \lambda_2\eta < 0$ наоборот. Нужно оставить только второй член. Функция $Q_\ell(z)$ при фиксированных комплексных $z \neq \pm 1$ имеет в плоскости ℓ простые полюса при $\ell = -n-1$, где $n = 0,1,2,3 \ldots$ При этом вычет в полюсе оказывается пропорциональным полиному Лежандра (см. ниже формулу (14)):

$$\text{Вычет } \left[Q_{-\ell-1}(z) \right]_{\ell=n} = P_n(z). \tag{9}$$

В остальной части плоскости z она аналитична, а при больших ℓ и фиксированных $z \neq \pm 1$ она ведет себя следующим образом [21]:

$$Q_\ell(z) \to \frac{1}{\sqrt{\ell}} e^{-\lambda_1\xi+\lambda_2\eta} \qquad |\arg \ell| < \pi. \tag{10}$$

C. Свойства симметрии функций $P_\ell(z)$ и $Q_\ell(z)$.

Дифференциальное уравнение Лежандра инвариантно относительно замены $z \to -z$ или $\ell \to -\ell-1$; поэтому наряду с интегралами $P_\ell(z)$ и $Q_\ell(z)$ решениями этого уравнения будут также функции $P_\ell(-z)$, $Q_\ell(-z)$, $P_{-\ell-1}(z)$, $Q_{-\ell-1}(z)$.
Так как любое дифференциальное уравнение второго порядка имеет только два независимых интеграла, то между упомянутыми решениями должны существовать линейные соотношения. Приведем здесь только основные из этих соотношений (см., например, [2,3]).

"Отражение" аргумента:

$$P_\ell(-z) = e^{\pm i\ell\pi} P_\ell(z) - \frac{2}{\pi} \sin \ell\pi \, Q_\ell(z) \tag{11}$$

$$Q_\ell(-z) = -e^{\mp i\ell\pi} Q_\ell(z) \tag{I2}$$

В этих формулах верхние знаки берутся при $\Im z<0$, нижние - при $\Im z>0$.
"Отражение" индекса:

$$P_{-\ell-1}(z) = P_\ell(z) \tag{I3}$$

$$Q_{-\ell-1}(z) = Q_\ell(z) - \pi \operatorname{ctg} \ell\pi\, P_\ell(z). \tag{I4}$$

Отметим также, что если z обходит точку +I в отрицательном направлении, новая ветвь функции Q_ℓ дается формулой:

$$Q_\ell(z, 1-) = Q_\ell(z) + i\pi P_\ell(z). \tag{I5}$$

Из (II) видно, что при целых положительных n

$$P_n(-z) = (-1)^n P_n(z). \tag{II'}$$

А если ℓ вещественно, или же $\ell = -\frac{1}{2} + i\lambda$, где λ вещественно [x)], то формула (II) дает:

$$\Im P_\ell(-x \pm i0) = \pm \sin \ell\pi\, \overset{\circ}{P}_\ell(x), \tag{II''}$$

если же ℓ не вещественно, то (II) дает просто скачок на верхнем и нижнем берегу разреза, вообще говоря, комплексный.

Из (I2) видно, что при целых положительных n

$$Q_n(-z) = (-1)^{n+1} Q_n(z). \tag{I2'}$$

Соотношение (I3) показывает, что функции Лежандра первого рода остаются без изменения при замене $\ell \to -\ell-1$. Из (I4) легко получить вычет функции Лежандра второго рода, приведенный в (9).

Приведем интегральное представление для функций Лежандра второго рода, справедливое при любых $\ell \neq$ -I,-2 ... и произвольных z [6,7] :

$$Q_\ell(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_\ell(z')}{z-z'}\,dz' - \frac{\sin \ell\pi}{\pi}\int_{-\infty}^{-1} \frac{Q_\ell(-z')}{z'-z}\,dz' \tag{I6}$$

---

x) В последнем случае функции Лежандра носят название функций конуса и обладают рядом замечательных свойств, главное из которых заключается в том, что $P_{-1/2+i\lambda}(z)$ является вещественным при вещественных λ и z . Кроме того, при любых λ и z $P_{-1/2+i\lambda}(z) = P_{-1/2-i\lambda}(z)$, т.е. является четной функцией λ . Об остальных свойствах см. [2,3] и особенно [5] .

При целых n это переходит в хорошо известное интегральное представление Неймана:

$$Q_n(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(z')}{z-z'}dz'. \qquad (16')$$

Д. Функции Лежандра " на разрезе"

Если переменная x принимает значения, лежащие между +I и -I , то вводятся так называемые функции Лежандра " на разрезе " (on the cut), которые определяются как полусумма значений на верхнем и нижнем берегу. Эти новые функции удобно обозначить при помощи палочки, поставленной над символом функции $\bar{P}_\ell(x)$ и $\bar{Q}_\ell(x)$ x) . Тогда:

$$\bar{P}_\ell(x) = \frac{1}{2}\{P_\ell(x+i0) + P_\ell(x-i0)\}$$
$$\bar{Q}_\ell(x) = \frac{1}{2}\{Q_\ell(x+i0) + Q_\ell(x-i0)\}. \qquad (17)$$

Так как первое решение не имеет разреза от -I до +I , то это новое определение совпадает со старым, то есть:

$$\bar{P}_\ell(x) \equiv P_\ell(x),$$

а $\bar{Q}_\ell(x)$ является действительно новой функцией. При целых n она имеет следующее интегральное представление:

$$\bar{Q}_n(x) = \frac{P.}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x')}{x-x'}dx', \qquad (18)$$

где $P.$ - символ главного значения.

Отсюда с учетом (I8) и равенства

$$\frac{1}{x-x'\pm i0} = \frac{P.}{x-x'} \mp i\pi\delta(x-x')$$

легко усмотреть соотношение, справедливое и при нецелых

$$Q_\ell(x\pm i0) = \bar{Q}_\ell(x) \mp i\frac{\pi}{2}P_\ell(x).$$

§2. Интегральные представления

В этом параграфе рассмотрены два интегральных представления, находящие применение в частности при работе с представлением Мандельстама.

---

x) Отметим, что в справочнике Бейтмена, а также в последнем издании Рыжика функции $\bar{P}_\ell$ и $\bar{Q}_\ell$ обозначены по другому, именно - при помощи прямого шрифта.

А. Интегральное представление произведения двух полиномов Лежандра

Рассмотрим два единичных вектора, заданных своими компонентами

$$\vec{n}' = \{\sin\vartheta'\cos\varphi', \sin\vartheta'\sin\varphi', \cos\vartheta'\}$$
$$\vec{n}'' = \{\sin\vartheta''\cos\varphi'', \sin\vartheta''\sin\varphi'', \cos\vartheta''\}.$$

Косинус угла между ними равен

$$\cos\vartheta = \vec{n}'\cdot\vec{n}'' = \cos\vartheta'\cos\vartheta'' + \sin\vartheta'\sin\vartheta''\cos\varphi \qquad \varphi = \varphi' - \varphi''. \tag{19}$$

Для полинома Лежандра, зависящего от такого " сложного" угла, имеет место следующее разложение, которое обычно называют теоремой сложения (Рыжик, стр.1029)

$$P_n(\cos\vartheta) = P_n(\cos\vartheta')P_n(\cos\vartheta'') + 2\sum_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\vartheta')P_n^m(\cos\vartheta'')\cos m\varphi \tag{20}$$

Проинтегрировав обе части этого равенства по $d\varphi$ в пределах от 0 до π, получим следующее простое равенство, выражающее произведение двух полиномов Лежандра через интеграл по одному [8]

$$P_n(\cos\vartheta')P_n(\cos\vartheta'') = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi P_n(\cos\vartheta)\,d\varphi \tag{21}$$

или, введя обозначения $x_1 = \cos\vartheta'$ $x_2 = \cos\vartheta''$, получим:

$$P_n(x_1)P_n(x_2) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi P_n\left(x_1x_2 + \sqrt{1-x_1^2}\sqrt{1-x_2^2}\cos\varphi\right)d\varphi. \tag{21'}$$

Приняв аргумент стоящего под интегралом полинома Лежандра за новую переменную, т.е. положив

$$x = x_1x_2 + \sqrt{1-x_1^2}\sqrt{1-x_2^2}\cos\varphi$$
$$dx = -\sqrt{1+2x_1x_2x - x_1^2 - x_2^2 - x^2}\,d\varphi,$$

получим

$$P_n(x_1)P_n(x_2) = \frac{1}{\pi}\int_{x^-}^{x^+} P_n(x)\frac{dx}{\sqrt{-K(x_1x_2x)}}, \tag{21''}$$

где принято сокращенное обозначение [x)]

---

x) Такое определение $K(x,y,z)$, а именно с обратным знаком, удобно для того, чтобы ниже в формуле (25) не вводить нового обозначения.

$$K(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2xyz-1, \tag{22}$$

а через $x^{\pm}$ обозначены корни квадратного уравнения $K(x, x_2 x) = 0$, между которыми подкоренное выражение в (2I) положительно:

$$x^{\pm} = x_1 x_2 \pm \sqrt{1-x_1^2}\sqrt{1-x_2^2}. \tag{23}$$

Равенство (2I') удобно переписать с помощью θ – функции

$$P_n(x_1)\, P_n(x_2) = \frac{1}{\pi}\int P_n(x)\, \frac{\theta[-K(x,x_2 x)]}{\sqrt{-K(x,x_2 x)}}\, dx\ . \tag{24}$$

Здесь пределы интегрирования можно считать расширенными от $-\infty$ до $+\infty$, хотя фактически интегрирование из-за наличия θ – функции проводится только от x^- до x^+ (см. рис.I).

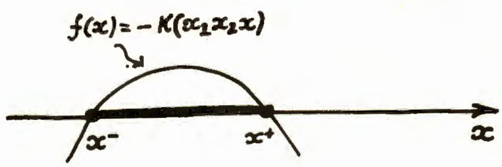

Рис.I. Область интегрирования в формулах (2I'') и (24) обозначена жирной линией.

Можно доказать, что (24) оказывается справедливым при любом комплексном ℓ [7].

<u>В. Интегральное представление произведения двух функций Лежандра второго рода</u>

Аналогом формулы (24) в случае функций Лежандра второго рода является следующая формула, принадлежащая Фруассару [9]:

$$Q_\ell(z_1)\, Q_\ell(z_2) = \int_{z^+}^{\infty} Q_\ell(z)\, \frac{dz}{\sqrt{K(z, z_2 z)}}\ , \tag{25}$$

где подкоренное выражение определено формулой (22), а z^+ является его наибольшим корнем

$$z^+ = z_1 z_2 + \sqrt{z_1^2-1}\,\sqrt{z_2^2-1}\ . \tag{25'}$$

Примерный вид функции $K(z, z_2 z)$ изображен на рис.2.

Нижний предел в формуле (25) можно расширить до $-\infty$, если ввести под интеграл θ – функцию вида $\theta(z-z^+)$. В выражении:

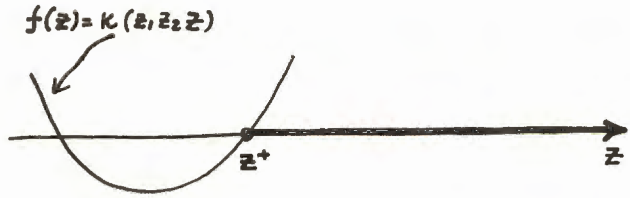

Рис.2. Область интегрирования в формуле (25) обозначена жирной линией.

$$\frac{\theta(z-z^+)}{\sqrt{K(z_1 z_2 z)}} \tag{26}$$

можно узнать спектральную функцию квадратика (с точностью до кинематического множителя). Таким образом, спектральная функция квадратика обладает свойством "расщеплять" одну функцию Лежандра на две [x)] . Формула (25) справедлива и при комплексных ℓ (см. [7]).

§3. Суммы, содержащие произведения функций Лежандра

А. Сумма произведения трех полиномов Лежандра

Полиномы Лежандра $P_n(x)$, умноженные на норму $\sqrt{\ell+1/2}$, образуют полную ортонормированную систему в промежутке (-I,+I) . Поэтому из них можно сконструировать δ - функцию (см., например, [II] стр. 28) :

$$\sum_n (2n+1) P_n(x) P_n(x_3) = 2\delta(x-x_3) \tag{27}$$

Умножим обе стороны этого равенства на

$$\frac{1}{\pi} \frac{\theta[-K(x_1 x_2 x)]}{\sqrt{-K(x_1 x_2 x)}},$$

и проинтегрируем по x от $-\infty$ до ∞ . При интегрировании правой части полученного равенства, воспользуемся основным свойством δ - функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_3)\,dx = f(x_3). \tag{28}$$

[x)] О свойствах диаграммы шестого порядка и ее связи с интегральным представлением произведения трех функций Лежандра второго рода см. [IO] .

Слева используем равенство (24). Это приведет к следующему результату:

$$\sum_n (2n+1) P_n(x_1) P_n(x_2) P_n(x_3) = \frac{2}{\pi} \frac{\theta[-K(x_1 x_2 x_3)]}{\sqrt{-K(x_1 x_2 x_3)}} . \tag{29}$$

Эта сумма была вычислена в работе [8]. Видно, что (29) является обобщенной функцией. Прямым обобщением суммы (29) является сумма произведения трех полиномов Гегенбауэра (см.приложение к диссертации автора):

$$\sum_n (n+\nu) \left\{\frac{n!}{\Gamma(n+2\nu)}\right\}^2 C_n^\nu(x_1) C_n^\nu(x_2) C_n^\nu(x_3) = \frac{\pi}{\{\Gamma(\nu)\}^4} \frac{\left(4\sqrt{1-x_1^2}\sqrt{1-x_2^2}\sqrt{1-x_3^2}\right)^{1-2\nu}}{\sqrt{-K(x_1 x_2 x_3)}} \theta(-K), \tag{29'}$$

которая, как легко видеть, при $\nu = 1/2$ переходит в (29).

<u>В. Сумма произведения двух функций Лежандра второго рода на полином Лежандра</u>.

Умножив разложение δ- функции (27) на $(z-x_3)^{-1}$ и проинтегрировав по dx_3, с учетом основного свойства δ- функции (28) и равенства (15), получим известное разложение Гейне [1,2,3]:

$$\sum_n (2n+1) Q_n(z) P_n(x) = \frac{1}{z-x} . \tag{30}$$

Для того, чтобы удвоить число Q_n в этом равенстве, умножим обе части на $\frac{\theta(z-z^+)}{\sqrt{K(z_1 z_2 z)}}$ и проинтегрируем по z от $-\infty$ до $+\infty$.

Правую сторону оставим не проинтегрированной, а при интегрировании слева воспользуемся равенством (25). Это приводит к следующему результату:

$$\sum_n (2n+1) Q_n(z_1) Q_n(z_2) P_n(x) = \int_{z^+}^{\infty} \frac{dz}{z-x} \frac{1}{\sqrt{K(z_1 z_2 z)}}, \tag{31}$$

где z^+ снова дается равенством (25').

Стоящий здесь интеграл можно вычислить, что приведет к известному мандельстамовскому логарифму для абсорбтивной части квадратика:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{K(z_1 z_2 z)}} \ln \frac{x - z_1 z_2 + \sqrt{K(z_1 z_2 x)}}{x - z_1 z_2 - \sqrt{K(z_1 z_2 x)}} . \tag{32}$$

Однако в некоторых случаях удобнее иметь дело с непроинтегрированным выражением (31).

<u>§4. Интегралы по индексу</u>

<u>А. Преобразование Зоммерфельда- Ватсона- Редже</u>

Теорема Коши

$$A(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{A(z')}{z'-z} dz' \tag{33}$$

имеет место, если функция $A(z')$ комплексной переменной $z'=x'+iy'$ не имеет особенностей внутри или на контуре интегрирования, окружающего точку z. В частности, если I) $A(z')$ не имеет особенностей в комплексной z' плоскости за исключением единственной точки ветвления при $x'=a$; 2) $A(z')$ стремится к нулю при $|z'|\to\infty$, тогда можно путем деформирования контура интегрирования и имея в виду условия I) и 2) , получить:

$$A(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_a^\infty \frac{A(x+io)-A(x-io)}{x-z}dx \tag{34}$$

И, в третьих, если $A(x)$ действительно при $x<a$, то в силу принципа Шварца [4] $A(z^*)=A^*(z)$, имеем: $A(x+io)-A(x-io)=2i\,\Im m\,A(x+io)$.

Тогда вместо (34) можем написать [x]) :

$$A(z)=\frac{1}{\pi}\int_a^\infty \frac{\Im m\,A(x+io)}{x-z}dx \tag{35}$$

или, после введения обозначения $A_1(x)=\Im m\,A(x+io)$ для абсорбтивной части, можно переписать (35) в виде:

$$A(z)=\frac{1}{\pi}\int_a^\infty \frac{A_1(x)}{x-z}dx. \tag{35'}$$

Теперь нетрудно получить разложение (35') по полиномам Лежандра:

$$A(z)=\sum_n (2n+1)a_n P_n(z), \tag{36}$$

где

$$a_n=1/2\int_{-1}^{1} A(z)P_n(z)dz \tag{37}$$

или, подставив сюда дисперсионное представление (35') для $A(z)$, получим другое эквивалентное выражение для коэффициентов разложения :

$$a_n=1/\pi\int_a^\infty A_1(x)Q_n(x)dx. \tag{37'}$$

При этом мы воспользовались интегральным представлением Неймана для функций Лежандра второго рода, даваемого формулой (I6') и справедливого только при целых n . Разло-

---

x) В математике эта формула известна под названием преобразования Гильберта (см., например, [I9]), если же $A(z)$ является амплитудой рассеяния, (35) называется дисперсионным соотношением.

жение (36) с коэффициентами, даваемыми формулой (37), является пока что формальным. Оно будет иметь смысл только в области сходимости, которая, как известно, например, из [I] или [I2], является наибольшим эллипсом в плоскости z с фокусами в точках $\pm$ I, в котором $A(z)$ регулярна. Вне этого эллипса ряд расходится.

Найдем уравнение этого эллипса.

При больших n парциальная амплитуда ведет себя так:

$$a_n \to \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-n \ln (a+\sqrt{a^2-1})},$$

а полином Лежандра удовлетворяет следующему неравенству:

$$P_n(z) < \frac{1}{\sqrt{n}} e^{n \ln (z+\sqrt{z^2-1})}.$$

Для того, чтобы разложение (36) сходилось, достаточно доказать сходимость мажорирующего ряда (арифметическая прогрессия):

$$\sum_n e^{-n \ln \frac{a+\sqrt{a^2-1}}{z+\sqrt{z^2-1}}}$$

А этот ряд будет сходящимся, как легко видеть, при выполнении условия:

$$|z+\sqrt{z^2-1}| < |a+\sqrt{a^2-1}|. \tag{38}$$

Это уравнение вышеупомянутого эллипса сходимости , в котором сходится ряд (36), и a и $\sqrt{a^2-1}$ – его полуоси. Вне этого эллипса требуется аналитическое продолжение ряда (36).

Мощным средством такого аналитического продолжения является преобразование Зоммерфельда- Ватсона- Редже. Для этого сначала перепишем ряд (36) в виде:

$$A(z) = \sum_n (2n+1)(-1)^n P_n(-z)\, a_n, \tag{39}$$

что в силу соотношения $P_n(z) = (-1)^n P_n(-z)$ является тождеством. Покажем, что этот ряд можно заменить следующим интегралом

$$A(z) = -\frac{1}{2i} \int_C (2\ell+1) \frac{d\ell}{\sin \ell\pi}\, a_\ell\, P_\ell(-z), \tag{40}$$

где контур C окружает точки ℓ = 0,I,2,3,4,5,6,7, ... и обходит их в направлении часовой стрелки (см.рис.3) :

Действительно, здесь подинтегральное выражение получается из общего члена ряда (39) , отбрасыванием множителя $(-1)^n$ заменой n на ℓ и знаменателем $\sin \ell\pi$. При этом под a_ℓ необходимо понимать функцию Лежандра, которая в отличие от полинома Лежандра определена в плоскости z с разрезом – ∞ до -I. (см. §I).

Под a_ℓ следует понимать аналитическое продолжение функции целочисленного индекса a_n на произвольные комплексные ℓ x). Функция $(\sin \ell\pi)^{-1}$ имеет внутри контура C полюсы первого порядка в точках $\ell = 0, 1, 2, 3 \ldots$ с вычетами, определяемыми по формуле

$$\text{Вычет} \left(\frac{1}{\sin \ell\pi}\right)_{\ell=n} = \frac{1}{\pi \cos n\pi} = \frac{(-1)^n}{\pi}.$$

А весь интеграл просто вычисляется по теореме вычетов, именно он равен $-2\pi i$, умноженное на сумму вычетов подинтегрального выражения:

$$-\frac{1}{2i}\int_C (2\ell+1)\frac{d\ell}{\sin \ell\pi} a_\ell P_\ell(-z) = \frac{-2\pi i}{-2i}\sum_n (2n+1)\frac{(-1)^n}{\pi} a_n P_n(-z). \tag{41}$$

Интеграл, взятый по контуру C, мало отличается от первоначальной суммы и имеет ту же область сходимости. Следующий важный шаг состоит в деформировании контура интегрирования. Предположим, что поведение подинтегрального выражения таково, что мы можем деформировать контур интегрирования C в C' (см.рис.3).

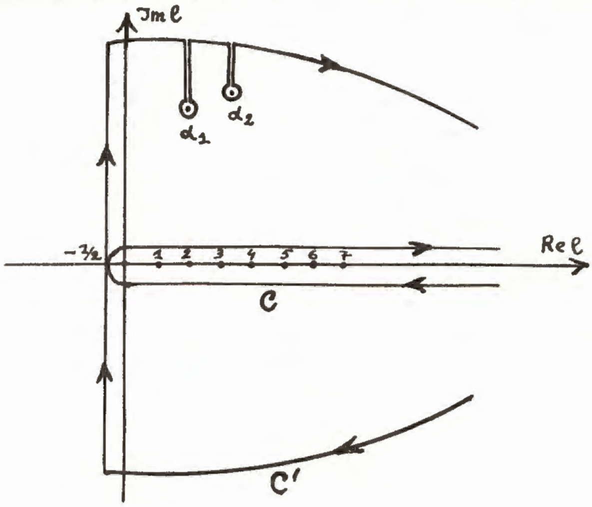

Рис.3. Контуры C и C'.

C' состоит из прямой, параллельной мнимой оси, и проходящей через точку $-1/2$ и двух линий, проходящих на большом расстоянии от вещественной оси, обходящих особенности a_ℓ

x) Вопрос об однозначности такого продолжения рассмотрен ниже.

и соединяющихся в ∞. При этом мы учли, что у a_ℓ могут быть полюса в плоскости ℓ. Тогда, выделив их вклад и отдалив в бесконечность соединяющие участки пути интегрирования, получаем:

$$\sum_n (2n+1) a_n P_n(z) = -\frac{1}{2i} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} (2\ell+1) \frac{d\ell}{\sin \ell\pi} a_\ell P_\ell(-z) \quad - \pi \sum_i \frac{(2\alpha_i+1)\beta_i P_{\alpha_i}(-z_i)}{\sin \pi\alpha_i}. \tag{42}$$

Здесь α_i и β_i положения и вычеты полюсов x) функции a_ℓ в комплексной плоскости ℓ, т.е.

$$a_\ell \underset{\ell \to \alpha_i}{\sim} \frac{\beta_i}{\ell - \alpha_i}.$$

Равенство (42) пока что имеет формальный смысл. Нам нужно доказать, во-первых, что интеграл (т.е. правая часть (42)) сходится в более широкой области, чем первоначальная сумма (т.е. левая часть) и, во-вторых, что они имеют некоторую общую область сходимости и, в третьих, что в этой общей области они совпадают. Таким образом, будет показано, что действительно получено аналитическое продолжение ряда Лежандра за эллипс сходимости.

Здесь, прежде всего, возникает вопрос: как от функции a_n, заданной в целочисленных точках, перейти к функции a_ℓ комплексной переменной ℓ? Ясно, что если у нас имеется функция $y = \varphi(x)$, определенная для всех значений x, то она может служить основанием для определения функции от целочисленного аргумента

$$y = \varphi(n).$$

С другой стороны, из любой функции от n можно получить бесконечно много функций от x, совпадающих с $\varphi(n)$ только при целых n. Задача определения функции от x, которая должна принимать для всех положительных целочисленных x определенные значения, называется задачей функциональной интерполяции. Вот что пишет по этому поводу Г.Харди в "Курсе чистой математики": " Если бы задача состояла только в том, чтобы найти какую- нибудь функцию от x, удовлетворяющую поставленным условиям, то ее решение не представляло бы никаких трудностей. Мы могли бы просто заполнить недостающие значения каким угодно образом ... Но такие решения, конечно, не представляют интереса. В качестве решения обычно требуется некоторая формула (возможно более простого

---

x) Эти полюса называются полюсами Редже.

вида), содержащая x и принимающая данные значения при

$$x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

В некоторых случаях, в особенности тогда, когда сама функция от n определена с помощью формулы, имеется очевидное решение. Если, например, $y = \varphi(n)$, где $\varphi(n)$ такая функция от n, которая (как, например, n^2 или $\cos n\pi$) сохраняет смысл и для n, отличных от положительных целых чисел, то мы, естественно, берем в качестве решения функцию $y = \varphi(x)$. Но даже в этом очень простом случае легко написать другие, почти одинаково очевидные, решения задачи. Например,

$$y = \varphi(x) + \sin \pi x$$

принимает значения $\varphi(n)$ при $x = n$, так как $\sin n\pi = 0$ ". Критерием выбора того или иного способа задания функции при n, отличных от целых, может служить поведение на бесконечности. Нужно выбрать те продолжения, которые хорошо ведут себя на бесконечности, именно так, чтобы возможно было сделать преобразование З.-В.-Р. Поэтому из двух естественных способов продолжения a_n на комплексные значения индекса

$$a_\ell = 1/2 \int_{-1}^{1} A(z) P_\ell(z)\, dz \qquad a_\ell = \frac{1}{\pi} \int_{a}^{\infty} A_1(x)\, Q_\ell(x)\, dx \tag{43}$$

выбирают последнее, так как первое плохо ведет себя при $|\ell| \to \infty$. Тогда из теоремы Карлсона x) следует, что выбранная таким образом функция единственна.

Тогда, используя асимптотические формулы для функций Лежандра (8) и (10) и определение a_ℓ, при помощи второго из равенств (43) получим, что интеграл сходится при $|z| > 1$. Отметим, что наиболее подробное исследование математических свойств преобразования З.-В.-Р. можно найти в приложении к [21].

В заключение коротко остановимся на усложнениях, возникающих при переходе к релятивистской теории. Этих усложнений два: именно наличие двух разрезов у амплитуды и необходимость вычитаний. Подробно с этим вопросом можно познакомиться по работам[16-18]. Хотя эти различия приводят к важным физическим следствиям, математические усложнения при этом незначительны.

В. Вычисление одного интеграла

Интегрирование функций Лежандра по индексу имеет давнюю историю. Наиболее полная таблица таких интегралов недавно была дана Редже с сотрудниками [6], некоторые интегралы

---

x) Титчмарш [19], стр.213.

приведены в справочнике Бейтмена, а с историей вопроса можно познакомиться по монографии Н.Н.Лебедева [5].

В качестве примера приведем вычисление интеграла [16]:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{2}+i\infty}^{-\frac{1}{2}-i\infty}(2\ell+1)\,d\ell\, Q_\ell(z_1)\,Q_\ell(z_2)\,P_\ell(x) \tag{44}$$

Для этого сделаем в левой части равенства (31) преобразование З.-В.-Р. и вычислим скачки по x от обоих частей равенства при помощи формул:

$$\operatorname{Im}\frac{1}{z-x-i0}=\pi\,\delta(z-x)$$

$$\operatorname{Im} P_\ell(-x-i0)=\sin\ell\pi\, P_\ell(x) \qquad \text{при} \quad \operatorname{Re}\ell=-\tfrac{1}{2},$$

что сразу даст для (44) следующий ответ:

$$\frac{\theta(x-z^{+})}{\sqrt{K(z_1\, z_2\, z)}}\,. \tag{45}$$

В этом выражении легко узнать уже встречавшуюся спектральную функцию квадратика. Более сложный интеграл этого типа, содержащий четыре функции Лежандра, можно найти в приложении к диссертации автора.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 марта 1963 года.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е.Г.Уиттекер, Г.Н.Ватсон. Курс современного анализа, т.П, ГТТЛ, Л.-М., 1934.
2. H.Bateman. Higher Transcendental functions, I,II.
3. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы, М., 1962.
4. Ф.М.Морс, Г.Фешбах. Методы теоретической физики, т.I и П., М., 1958.
5. Н.Н.Лебедев. Специальные функции и их приложения.
6. V.de Alfaro, T.Regge, C.Rosetti, Nuovo Cim. 26, 1o29 (1962).
7. R.Omnes. Nuovo Cim. 25, 806 (1962).
8. В.М.Арутюнян, Р.М.Мурадян. ЖЭТФ 36, 1542 (1959).
9. M.Froissart. Nuovo Cim. 22, 395 (1961).
10. Р.М.Мурадян. ДАН СССР 149 , 84 (1963).
11. Д.Д.Иваненко, А.А.Соколов. Классическая теория поля. М., 1953.
12. Г.Сегё. Ортогональные многочлены, ГИФМЛ, М., 1962.
13. T.Regge. Nuovo Cim. 14, 972 (1959); 18, 947 (196o).
14. S.Bottino, A.M.Longoni, T.Regge. Nuovo Cim. 26, 1029 (1962).
15. S.Mandelstam. Ann. of Phys. 19, 294 (1962).
16. В.Н.Грибов. ЖЭТФ 41, 1962 (1962).
17. E.I.Squires. Nuovo Cim. 25, 242 (1962).
18. G.M.Prosperi. Nuovo Cim. 24, 957 (1962); 26, 541 (1962).
19. Е.Титчмарш. Теория функций ГИТТЛ М.-Л., 1951.
20. Вопросы физики элементарных частиц. Ереван, 1962.
21. A.O.Barut, F.Calogero. Phys.Rev. 128, 1383 (1962).

Ниже приведена литература, в которой рассмотрено преобразование З.-В.-Р. до появления работы [13] :

22. F.G.Mehler. Math.Ann. 18, 161 (1881) .
Изложение результатов Мелера можно найти, например, в [5] , стр. 292.
23. G.N.Watson. Proo.Roy.Soc. A95, 546 (1919).
24. А.Зоммерфельд. Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИИЛ М., 1950. Дано подробное исследование свойств преобразования.
25. В.А.Фок, ДАН СССР 39, 279 (1943).
26. В.А.Фок. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, М., 1946.
27. Г.А.Гринберг. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, Изд. АН СССР (1948).