ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Н.П. Гиоргадзе, Д.Г. Ломинадзе, В.Г. Маханьков

1201

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН В ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Дубна 1963 г.

Н.П. Гиоргадзе, Д.Г. Ломинадзе, В.Г. Маханьков

1201

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН В ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Дубна 1963 г.

Аннотация

Рассматривается взаимодействие волн в цилиндрическом волноводе. В приближении малых нелинейностей показано, что в отсутствие колебаний плотности H -волна линейна, а E -волна может генерироваться в результате взаимодействия как H, так и E -волн линейного приближения. Наличие в линейном приближении волн ленгмюровской частоты приводит к генерации нелинейной H -волны за счет взаимодействия с H -волной линейного приближения. Рассмотрены различные простые случаи.

В ряде работ [1-6], появившихся недавно, волновые процессы в неограниченной плазме рассматривались в приближении малых нелинейностей. Оказалось, что обусловленное нелинейным характером плазмы и плазмоподобных сред взаимодействие различного типа волн, в линейном приближении распространяющихся независимо, может вызвать как генерирование обертонов, так и возникновение новых по характеру волн. В частности, в работе [2] было показано, что если потенциал ленгмюровских колебаний в холодной плазме не обладает сферической симметрией, то продольные колебания достаточно большой амплитуды приводят к возникновению радиации. Возбуждение электромагнитных волн ленгмюровскими колебаниями в нагретой плазме было впоследствии рассмотрено в работе [5]. Генерирование поперечных волн продольными волнами в случае, когда анизотропия системы создавалась пучком частиц, было рассмотрено в работе [6]. В работах [3,4] метод малых нелинейностей применялся к плазме, помещенной в магнитное поле.

Вместе с тем, при практическом использовании плазмы в качестве волноводной среды обычно приходится иметь дело с цилиндрическими плазменными волноводами, волновые процессы в которых существенно отличаются от процессов в неограниченных средах. Хорошо известно, что в отсутствие внешнего магнитного поля в волноводе могут распространяться E -волна / $E_z \neq 0$ / и H -волна / $E_z = 0$ /, независимые друг от друга [7]. В связи с этим представляет интерес рассмотреть взаимодействие этих волн при достаточно больших амплитудах.

1. Исходные уравнения и линейное приближение

Рассмотрим холодную плазму, полностью заполняющую волновод с идеально проводящими стенками. Движением ионов будем пренебрегать [8]. Исходная система гидродинамических уравнений и уравнений Максвелла примет тогда вид:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\,\vec{\nabla})\vec{V} = -\frac{e}{m}(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{V}\vec{H}])$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + div\, N\vec{V} = 0$$

$$rot\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad div\,\vec{E} = 4\pi(\rho + \rho_0) \qquad /1/$$

$$rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad div\,\vec{H} = 0,$$

где

$$\rho = -eN \qquad \rho_0 = eN_0, \qquad /2/$$
$$\vec{j} = -eN\vec{V}$$

причем e -абсолютная величина заряда электрона, m - его масса, V - гидродинамическая скорость, N - концентрация, N_0 - концентрация положительного фона, а $\vec{E}$ и $\vec{H}$ - напряженности электрического и магнитного полей, соответственно.

Ограничиваясь малыми нелинейностями, все величины будем искать в виде разложений по некоторому параметру малости α, который в конечных результатах следует приравнять единице:

$$\vec{V} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \vec{V}_n \qquad N = \sum_{n=0}^{\infty} a^n N_n$$
$$\vec{E} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \vec{E}_n \qquad \vec{H} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \vec{H}_n . \qquad /3/$$

Подставляя /3/ в /1/ с учетом /2/, легко получить уравнения n -ой ступени иттерационной процедуры.

$$\frac{\partial \vec{V}_n}{\partial t} + \frac{e}{m} \vec{E}_n = - \sum_{m=0}^{n} (\vec{V}_m \nabla) \vec{V}_{n-m} - \frac{e}{mc} \sum_{m=0}^{n} [\vec{V}_m \vec{H}_{n-m}]$$

$$\frac{\partial N_n}{\partial t} + \sum_{m=0}^{n} div (N_m \vec{V}_{n-m}) = 0$$

$$rot\, \vec{H}_n = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_n}{\partial t} - \frac{4\pi e}{c} \sum_{m=0}^{n} N_m \vec{V}_{n-m} \qquad /4/$$

$$rot\, \vec{E}_n = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}_n}{\partial t}$$

$$div\, \vec{E}_n = - 4\pi e (N_n - N_0) \qquad div\, \vec{H}_n = 0 .$$

Полагая $n = 0$, легко проверить существование стационарного состояния с

$$N_0 \neq 0 , \quad \vec{V}_0 = 0 , \quad \vec{E}_0 = \vec{H}_0 = 0 .$$

При $n = 1$ получаем уравнение линейного приближения

$$\frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} + \frac{e}{m} \vec{E}_1 = 0$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + N_0\, div\, \vec{V}_1 = 0$$

$$rot\, \vec{H}_1 = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} - \frac{4\pi e}{c} N_0 \vec{V}_1 \qquad /5/$$

$$rot\, \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}_1}{\partial t}$$

$$div\, \vec{E}_1 = - 4\pi e N_1$$

$$div\, \vec{H}_1 = 0 .$$

Решение системы /5/ будем искать в виде аксиально-симметричных цилиндрических волн вида:

$$\vec{V}_1 (\vec{r}, t) = \vec{V}_1 (\rho , z , t) = \int \vec{V}_1 (\rho , k , \omega) e^{i(kz - \omega t)} dk d\omega , \qquad /6/$$

что приводит после небольших преобразований к дифференциальным уравнениям для электрического поля

$$\Delta'_{\perp} E_{1\phi} + Q^2(k , \omega) E_{1\phi} = 0 \qquad /7/$$

$$\begin{cases} (\omega^2 - \Omega^2) \{ \Delta_{\perp} E_{1z} + Q^2 (k , \omega) E_{1z} \} = 0 \\ \dfrac{\partial E_{1z}}{\partial \rho} = - i \dfrac{Q^2(k,\omega)}{k} E_{1\rho} \end{cases} \qquad /8/$$

при дополнительном условии

$$(\omega^2 - \Omega^2)\, div\, \vec{E}_1 = 0, \qquad /9/$$

где

$$\Delta'_\perp = \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho \ldots, \quad Q^2(k,\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\Omega^2}{c^2} - k^2,$$

$$\Delta_\perp = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\ldots, \quad \Omega^2 = \frac{4\pi e^2 N_0}{m}$$

и где предполагается, что амплитуда волны с $k = 0$ равна нулю.

Если положить, что $\omega^2 \neq \Omega^2$, то уравнение /7/ и /8/ дают регулярные на оси решения

$$E_{1\phi} = A(k,\omega)\, J_1(\sqrt{Q^2}, \rho) - \quad H \text{ - волна} \qquad /10/$$

$$\left\{\begin{aligned} E_{1z} &= B(k,\omega)\, J_0(\sqrt{Q^2}, \rho) \\ E_{1\rho} &= -i\frac{k}{\sqrt{Q^2}} B(k,\omega)\, J_1(\sqrt{Q^2}, \rho)\,. \end{aligned}\right. \quad - E \text{ - волна} \qquad /11/$$

Поскольку в дальнейшем нас будет интересовать качественная картина взаимодействия E и H -волны, для простоты вычислений будем считать, что при колебаниях отрыва плазмы от стенок волновода не происходит. Тогда граничные условия

$$E_{1\phi}(R) = 0, \qquad E_{1z}(\rho) = 0$$

приведут к дисперсионным соотношениям

$$Q^2 R^2 = \mu_s^2 \qquad J_1(\mu_s) = 0 \qquad /12/$$

$$Q^2 R^2 = \nu_s^2 \qquad J_0(\nu_s) = 0\,, \qquad /13/$$

в силу которых окончательный вид полей первого приближения будет

$$E_{1\phi}(\rho,k,\omega) = \sum_s \sum_{+,-} A(k,\omega_{1s}^{\pm}(|k|))\, J_1(\frac{\mu_s}{R}\rho)\,\delta(\omega - \omega_{1s}^{\pm}(|k|)) \qquad /14/$$

$$E_{1z}(\rho,k,\omega) = \sum_s \sum_{+,-} B(k,\omega_{0s}^{\pm}(|k|))\, J_0(\frac{\nu_s}{R}\rho)\,\delta(\omega - \omega_{0s}^{\pm}(|k|))$$

$$E_{1\rho}(\rho,k,\omega) = -i\sum_s \sum_{+,-} \frac{kR}{\nu_s} B(k,\omega_{0s}^{\pm}(|k|))\, J_1(\frac{\nu_s}{R}\rho)\,\delta(\omega - \omega_{0s}^{\pm}(|k|)), \qquad /15/$$

где

$$\omega_{1s}^{\pm}(|k|) = \pm\sqrt{\Omega^2 + k^2 c^2 + \frac{\mu_s^2 c^2}{R^2}}$$

$$\omega_{0s}^{\pm}(|k|) = \pm\sqrt{\Omega^2 + k^2 c^2 + \frac{\nu_s^2 c^2}{R}}\,.$$

Следует отметить, что указанные выше результаты известны из линейной теории и приведены, главным образом, в целях систематического изложения.

2. Взаимодействие волн

Если в /4/ положить $n = 2$, получим уравнение второго приближения:

$$\frac{\partial \vec{V}_2}{\partial t} + \frac{e}{m}\vec{E}_2 = -(\vec{V}_1 \vec{\nabla})\vec{V}_1 - \frac{e}{mc}[\vec{V}_1 \vec{H}_1],$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} + N_0 \, div \, \vec{V}_2 = -div \, N_1 \vec{V}_1 ,$$

$$rot \, \vec{E}_2 = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}_2}{\partial t}, \qquad div \, \vec{E}_2 = -4\pi e N_2 , \qquad /16/$$

$$rot \, \vec{H}_2 = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}_2}{\partial t} - \frac{4\pi e}{c} N_0 \vec{V}_2 - \frac{4\pi e}{c} N_1 \vec{V}_1 , \quad div \, \vec{H}_2 = 0 .$$

Из этой системы после несложных преобразований можно получить уравнение для электрического поля

$$\Delta \vec{E}_2 - \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{E}_2) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}_2}{\partial t^2} - \frac{\omega_0^2}{c}\vec{E}_2 = \frac{4\pi e N_0}{2c^2}\vec{\nabla}(\vec{V}_1)^2 - \frac{4\pi e}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}N_1 V_1 . \qquad /17/$$

Как и ранее, нас будут интересовать аксиально-симметричные решения этого уравнения вида /6/. Тогда $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$, и нетрудно видеть, что если в линейном приближении $\omega^2 \neq \Omega^2$ / т.е. $N_1 \equiv 0$ /, то H – волна линейна. Переходя опять к цилиндрическим координатам, после довольно громоздких вычислений получим из /17/:

$$\Delta'_{\perp} E_{2\phi} + Q^2(q,p)E_{2\phi} = D_{\phi} \qquad /18/$$

$$\Delta_{\perp} E_{2z} + Q^2(q,p)E_{2z} = i\frac{qc^2}{p^2-\Omega^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho D_{\rho}) + \frac{c^2 Q^2}{p^2-\Omega^2}D_z$$

$$\frac{\partial E_{2z}}{\partial \rho} = -i\frac{Q^2(q,p)}{q}E_{2\rho} + \frac{i}{q}D_{\rho} , \qquad /19/$$

где

$$D_{\phi} = -\frac{e\Omega^2}{mc^2}\int \frac{dq'\,dp'}{p'\Delta p}\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho E'_{1\rho} + iq'E'_{1z}\right\}E^{\Delta}_{1\phi}\frac{p}{p'}$$

$$/20/$$

$$D_{\rho} = -\frac{e\Omega^2}{mc^2}\int \frac{dq'dp'}{p'\Delta p}\left\{E'_{1\rho}\frac{\partial E^{\Delta}_{1\rho}}{\partial\rho} + E'_{1\phi}\frac{\partial E^{\Delta}_{1\phi}}{\partial\rho} + iE'_{1z}\frac{(Q^{\Delta})^2}{\Delta q}E^{\Delta}_{1\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho E'_{1\rho} + iq'E'_{1z}\right)E^{\Delta}_{1\rho}\frac{p}{p'}\right\}$$

$$D_z = -\frac{e\Omega^2}{mc^2}\int \frac{dq'\,dp'}{p'\Delta p}\left\{i\Delta q\left(E'_{1z}E^{\Delta}_{1z} + E'_{1\rho}E^{\Delta}_{1\rho} + E'_{1\phi}E^{\Delta}_{1\phi}\right) + \frac{p}{p'}E^{\Delta}_{1z}\,div\,\vec{E}'_1\right\} , \qquad /21/$$

причем $E' = E(q',p')$, $E^{\Delta} = E(q-q', p-p)$, $Q^{\Delta} = Q(q-q', p-p')$.

Ограничиваясь пока случаем $N_1 \equiv 0$, рассмотрим уравнение /19/ с учетом граничного условия

$$E_{2z}(R) = 0. \qquad /22/$$

Решение имеет вид:

$$E_{2z} = \sum_{\alpha\beta s t} \int dq' \frac{(-i)(\frac{\pi}{2})e\Omega^2}{m\omega^{\alpha}_{0s}\omega^{\beta}_{0t}(p^2-\Omega^2)} B(q',\omega^{\alpha}_{0s}(q'))B(\Delta q,\omega^{\beta}_{0t}(\Delta q))\times$$

$$\times\delta(p-\omega^{\alpha}_{0s}-\omega^{\beta}_{0t})\hat{L}(q,p,R,\rho)\Phi_1(q,q',p,\omega^{\alpha}_{0s},R,\rho,\nu_s,\nu_t)+ \qquad /23/$$

$$+\sum_{\alpha\beta s t}\int dq' \frac{(-i)(\pi/2)e\Omega^2}{m\omega^{\alpha}_{1s}\omega^{\beta}_{1t}(p^2-\Omega^2)} A(q',\omega^{\alpha}_{1s}(q'))A(\Delta q,\omega^{\beta}_{1t}(\Delta q))\times$$

$$\times\delta(p-\omega^{\alpha}_{1s}-\omega^{\beta}_{1t})\hat{L}(q,p,R,\rho)\Phi_2(q,q',p,R,\rho,\nu_s,\nu_t),$$

где

$$\hat{L}(p,q,R,\rho) = J_0(\sqrt{Q^2}\rho)\int_{\rho}^{R} d\rho\rho N_0(\sqrt{Q^2}\rho) + N_0(\sqrt{Q^2}\rho)\int^{\rho} d\rho\rho J_0(\sqrt{Q^2}\rho) -$$

$$-J_0(\sqrt{Q^2}\rho)\frac{N_0(\sqrt{Q^2}R)}{J_0(\sqrt{Q^2}R)}\int^{R} d\rho\rho J_0(\sqrt{Q^2}\rho)$$

$$/24/$$

$$\Phi_1(q,q',p,R,\rho,\nu_s,\nu_t;\omega^{\alpha}_{0s}) = \frac{q}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho < \frac{(Q^{\Delta})^2 R}{\nu_t} J_0(\frac{\nu_s}{R}\rho)J_1(\frac{\nu_t}{R}\rho) -$$

$$-\frac{q'R}{\nu_s}\frac{\Delta qR}{\nu_t}J_1(\frac{\nu_s}{R}\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}J_1(\frac{\nu_t}{R}\rho)>] + Q^2(q,p)\Delta q\times$$

$$\times < J_0(\frac{\nu_s}{R}\rho)J_0(\frac{\nu_t}{R}\rho) - \frac{q'R}{\nu_s}\frac{\Delta qR}{\nu_t}J_1(\frac{\nu_s}{R}\rho)J_1(\frac{\nu_t}{R}\rho)>\}$$

$$\Phi_2 = \frac{q}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho < J_1(\frac{\mu_s}{R}\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}J_1(\frac{\mu_t}{R}\rho)>] + Q^2(p,q)\Delta q < J_1(\frac{\mu_s}{R}\rho)J_1(\frac{\mu_t}{R}\rho)>$$

Из соотношений /23/ и /24/ следует, что линейная E -волна генерирует E -волну второго приближения и, что более существенно, H -волна второго приближения возникает и при взаимодействии линейных H -волн. Эти результаты находятся в соответствии с аналогичными, полученными в работе [3].

Применяя к /23/ формулы обращения Фурье-преобразования, можно получить координатное представление E -волны второго приближения,

$$E_{2z}(\rho,z,t) = \sum_{\alpha\beta s t}\int\frac{dq'dq}{\omega^{\alpha}_{0s}\omega^{\beta}_{0t}}(-i)\frac{\pi}{2}\frac{e\Omega^2}{m(p^2-\Omega^2)}B(q',\omega^{\alpha}_{0s}(q'))B(\Delta q,\omega^{\beta}_{0t}(\Delta q))\times$$

$$\times\hat{L}(p,q,R,\rho)\Phi_1(q,q',p,\omega^{\alpha}_{0s},\rho,\nu_s,\nu_t)e^{i(qz-pt)}+$$

$$+\sum_{\alpha\beta s t}\int\frac{dq'dq}{\omega^{\alpha}_{1s}\omega^{\beta}_{1t}}(-i)\frac{\pi}{2}\frac{e\Omega^2}{m(p^2-\Omega^2)}A(q',\omega^{\alpha}_{1s}(q'))A(\Delta q,\omega^{\beta}_{1t}(\Delta q))\times \qquad /25/$$

$$\times\hat{L}(p,q,R,\rho)\Phi_2(q,q',p,R,\rho,\mu_s,\mu_t)e^{i(qz-pt)}, \quad (p=\omega^{\alpha}_{1s}+\omega^{\beta}_{1t}).$$

Соотношения /23/ и /25/ громоздки и неудобны для исследования. Поэтому в дальнейшем мы рассмотрим некоторые простые случаи.

3. Монохроматические волны

Пусть в линейном приближении имеется H –волна с волновым числом q_1 и частотой $\omega^+_{10}(|q_1|)$ и E – волна с волновым числом q_0 и частотой $\omega^+_{00}(|q_0|)$. В силу реальности физических величин, амплитуды $A(q_1, \omega^+_{10}(|q_1|))$, $A(-q_1, -\omega^+_{10}(|q_1|))$, $B(q_0, \omega^+_{00}(|q_0|))$ и $B(-q_0, -\omega^+_{00}(|q_0|))$ должны быть отличны от нуля, причем, очевидно, $-\omega^+_{10} = \omega^-_{10}$, $-\omega^+_{00} = \omega^-_{00}$.

Легко показать тогда, что взаимодействие этих волн во втором приближении дает волны[x/]

$$E_{2z}(\rho, 2q_0, 2\omega^+_{00}) \cong (-i)\frac{(\frac{\pi}{2})(e/m)\Omega^2}{\Omega^2 + q_0^2c^2}\frac{[B(q_0, \omega^+_{00})]^2}{3\Omega^2 + 4q_0^2c^2}\delta(p - 2\omega^+_{00})\delta(q - 2q_0)\times$$

$$\{J_0(\frac{\sqrt{3}\Omega}{c}\rho)\int_\rho^R d\rho\rho N_0(\frac{\sqrt{3}\Omega}{c}\rho) + N_0(\frac{\sqrt{3}\Omega}{c}\rho)\int^\rho d\rho\rho J_0(\frac{\sqrt{3}\Omega}{c}\rho) -$$

$$- J_0(\frac{\sqrt{3}\Omega}{c}\rho)\frac{N_0(\frac{\sqrt{3}\Omega}{c}\rho)}{J_0(\frac{\sqrt{3}\Omega}{c}\rho)}\int^R d\rho\rho J_0(\frac{\sqrt{3}\Omega}{c}\rho)\}\times \qquad /26/$$

$$\times\{\frac{2q_0}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho < \frac{\nu_0}{R}J_0(\frac{\nu_0}{R}\rho)J_1(\frac{\nu_0}{R}\rho) - (\frac{q_0R}{\nu})^2J_1(\frac{\nu_0}{R}\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}J_1(\frac{\nu_0}{R}\rho)>] + (\frac{3\Omega^2}{c^2})q_0 < J_0^2(\frac{\nu_0}{R}\rho) -$$

$$- (\frac{q_0R}{\nu_0})^2J_1^2(\frac{\nu_0}{R}\rho)>\}.$$

$$E_{2z}(\rho, 2q, 2\omega^+_{10}) \cong (-i)\frac{(\frac{\pi}{2})(e/m)\Omega^2}{\Omega^2 + q_1^2c^2}\frac{[A(q_1, \omega^+_{10})]^2}{3\Omega^2 + 4q_1^2c^2}\delta(p - 2\omega^+_{10})\delta(q - 2q_1)\times \qquad /27/$$

$$\times\{J_0(\frac{\sqrt{3}\Omega}{c}\rho)\int_\rho^R d\rho\rho N_0(\frac{\sqrt{3}\Omega}{c}\rho) + N_0(\frac{\sqrt{3}\Omega}{c}\rho)\int^\rho d\rho\rho J_0(\frac{\sqrt{3}\Omega}{c}\rho) - J_0(\frac{\sqrt{3}\Omega}{c}\rho)\frac{N_0(\frac{\sqrt{3}\Omega}{c}R)}{J_0(\frac{\sqrt{3}\Omega}{c}R)}\times$$

$$\times\int^R d\rho\rho J_0(\frac{\sqrt{3}\Omega}{c}\rho)\}\cdot\{\frac{2q_1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho J_1(\frac{\mu_0}{R}\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}J_1(\frac{\mu_0}{R}\rho)] + 3\frac{\Omega^2}{c^2}q_1J_1^2(\frac{\mu_0}{R}\rho)\}.$$

Отсутствие резонансных знаменателей в этих выражениях указывает на нерезонансный характер взаимодействия. Заметим, что мы опустили в /26/ и /27/ член, соответствующих наложению сопряженных амплитуд, требующий специального рассмотрения.

[x/] Здесь положено, что практически оправдано, что

$$\Omega^2 \gg \frac{\mu_0^2c^2}{R^2}, \quad \Omega^2 \gg \frac{\nu_0^2c^2}{R^2}.$$

4. Возбуждение волн колебаниями ленгмюровской частоты

Если $\omega = \pm\Omega$, то $N_1(\rho, k, \omega)$ произвольная функция координат. Интересно рассмотреть этот случай применительно к возбуждению H -волны. Действительно, как легко видеть, в этом случае

$$D_\phi = \sum_{\alpha\beta}\sum_s \frac{\Omega^2}{N_0 c^2}\int dq' \frac{(\omega^\beta_{1s}(|\Delta q|)+\Omega^{(\alpha)}}{\omega^\beta_{1s}(|\Delta q|)} N_1(\rho, q', \Omega^{(\alpha)}) A(\Delta q, \omega^\beta_{1s}) J_1\left(\frac{\mu_s}{R}\rho\right)\delta(p-\omega^\beta_{1s}-\Omega^{(\alpha)})$$

$$\Omega^\pm = \pm\Omega \qquad /28/$$

в силу чего из /18/ с учетом граничного условия

$$E_{2\phi}(R) = 0$$

получаем

$$E_{2\phi} = QJ_1(\sqrt{Q^2}\rho) + \frac{\pi}{2}\sum_{\alpha\beta s}\frac{\Omega^2}{N_0 c^2}\int dq' \frac{(\omega^\beta_{1s}(|\Delta q|)+\Omega^{(\alpha)})}{\omega^\beta_{1s}(|\Delta q|)} A(\Delta q\,\omega^\beta_{1s})\delta(p-\omega^\beta_{1s}-\Omega^{(\alpha)})\times$$

$$\times\{N_1(\sqrt{Q^2}\rho)\int d\rho\rho J_1(\sqrt{Q^2}\rho) - J_1(\sqrt{Q^2}\rho)\int d\rho\,\rho N_1(\sqrt{Q^2}\rho)\}\times \qquad /29/$$

$$\times N_1(\rho, q', \Omega^{(\alpha)}) J_1\left(\frac{\mu_s}{R}\rho\right).$$

В простейшем случае $N_1 \equiv N_1(q', \Omega^{(\alpha)})$, из /29/ после простого интегрирования, получаем

$$E_{2\phi}(\rho, q, p) = \sum_{\alpha\beta s}\int dq' \frac{\Omega^2(\omega^\beta_{1s}(|\Delta q|)+\Omega^{(\alpha)})N_1(q', \Omega^{(\alpha)})}{N_0\omega^\beta_{1s}(|\Delta q|)(\Omega^2+2\Omega^{(\alpha)}\omega^\beta_{1s}+(\Delta q^2-q^2)c^2)}\times$$

$$A(\Delta q, \omega^\beta_{1s}(|\Delta q|))\delta(p-\omega^\beta_{1s}(|\Delta q|)-\Omega^{(\alpha)})J_1\left(\frac{\mu_s}{R}\rho\right), \qquad /30/$$

обращение которого дает

$$E_{2\phi}(\rho, z, t) = \sum_{\alpha\beta s}\int dq\,dq' \frac{\Omega^2(\omega^\beta_{1s}(|\Delta q|)+\Omega^{(\alpha)})A(\Delta q, \omega^\beta_{1s}(|\Delta q|))}{N_0\omega^\beta_{1s}(|\Delta q|)(\Omega^2+2\Omega^{(\alpha)}\omega^\beta_{1s}+(\Delta q-q^2)c^2)}\times \qquad /31/$$

$$\times N_1(q', \Omega^{(\alpha)}) J_1\left(\frac{\mu_s}{R}\rho\right)\exp[i(qz-(\omega^\beta_{1s}+\Omega^{(\alpha)})t)].$$

В случае монохроматической H -волны имеем

$$E_{2\phi}(\rho, z, t) = \sum_\alpha\int dq' \frac{\Omega^2(\omega^+_{10}+\Omega^{(\alpha)})A(q_0, \omega^+_{10})N_1(q', \Omega^{(\alpha)})}{N_0\omega^+_{10}(q_0)(\Omega^2+2\Omega^{(\alpha)}\omega^+_{10}-(q'^2+2q_0q')c^2)} J_1\left(\frac{\mu_0}{R}\rho\right)e^{i((q_0+q')z-(\omega^-_{10}-\Omega^{(\alpha)})t)} + \qquad /32/$$

$$+\sum_\alpha\int dq' \frac{\Omega^2(\omega^-_{10}+\Omega^{(\alpha)})A(-q_0, \omega^-_{10})N_1(q', \Omega^{(\alpha)})}{N_0\omega^-_{10}(q_0)(\Omega^2+2\Omega^{(\alpha)}\omega^-_{10}-(q_0-2q_0q')c^2)} J_1\left(\frac{\mu_0}{R}\rho\right)e^{i((q_0+q')z-(\omega^-_{10}-\Omega^{(\alpha)})t)}$$

причем в пределе

$$\Omega^2 \gg q'^2c^2\ ,\quad q_0q'c^2$$

получаем

$$E_{2\phi}(\rho, z, t) = 2Re\sum_\alpha \frac{\Omega^2(\omega^+_{10}+\Omega^{(\alpha)})A(q_0, \omega^+_{10})}{N_0\,\omega^+_{10}(\Omega^2+2\Omega^{(\alpha)}\omega^+_{10})} J_1\left(\frac{\mu_0}{R}\rho\right)e^{[i(q_0z-(\omega^+_{10}+\Omega^{(\alpha)})t]} N_1(z, \Omega^{(\alpha)}). \qquad /33/$$

Как видим, генерирование H - волны во втором приближении происходит, когда

$N_1 \neq 0$ и если в линейном приближении H -волны присутствуют, что качественно также соответствует результату работы [3].

Литература

1. M.Sumi. J. Phys. Soc. Japan 15, 1086 (1960).
2. D.A.Tidman, I.H.Weiss Phys. Fluids 4, 866 (1961).
3. Н.П. Гиоргадзе, Н.Л. Цинцадзе /в печати/ ЖТФ.
4. Н.П. Гиоргадзе, Д.Г. Ломинадзе, Н.Л. Цинцадзе /в печати/ ЖТФ.
5. Н.П. Гиоргадзе /в печати/ ЖТФ.
6. Н.П. Гиоргадзе /в печати/ ЖТФ.
7. А.И. Ахиезер, Я.Б. Файнберг УФН, 321, /1951/.
8. Oster. Pev. Mod. Phys. 32, 141 (1960).

Рукопись поступила в издательский отдел
13 февраля 1963 г.