ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

В.Г. Маханьков

1180

О МОДУЛЯЦИИ СКОРОСТИ И ПЛОТНОСТИ ПУЧКА И ПЛАЗМЫ ВСЛЕДСТВИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ПУЧКУ

Дубна 1963 год

В.Г. Маханьков

1180

О МОДУЛЯЦИИ СКОРОСТИ И ПЛОТНОСТИ ПУЧКА И ПЛАЗМЫ ВСЛЕДСТВИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ПУЧКУ

Дубна 1963 год

Аннотация

В данной заметке рассмотрено в предположении малых нелинейностей возбуждение поперечных /в линейном приближении / электромагнитных волн пучком заряженных частиц в плазме. Показано, что уже во втором приближении по амплитуде электромагнитного поля появляется продольное поле, приводящее к банчировке пучка и плазмы, кроме того, происходит модуляция первоначальной скорости пучка. Рассмотрение ведется в гидродинамическом приближении при $T_e = T_i = 0$.

В предыдущих работах Рухадзе[1], Рухадзе и автора[2] было исследовано возбуждение электромагнитных волн поперек пучка заряженных частиц в плазме в широком диапазоне скоростей пучка и тепловых скоростей пучка и плазмы. Было показано, что в приближении двухжидкостной гидродинамики дисперсионное уравнение имеет чисто мнимые решения для любых волновых векторов $\vec{k}$, при условии, что $\vec{k}\vec{u}_0 = 0$; здесь $\vec{u}_0$ – направленная скорость пучка. Для того, чтобы дисперсионное уравнение разбилось на три, что соответствует независимому распространению продольных и поперечных волн, рассмотрение проводилось в специально выбранной системе координат.

Здесь на основе уравнений гидродинамики и уравнений самосогласованного поля будут найдены поля второго приближения в этой системе координат.

Уравнения имеют вид:

$$\frac{dN^{(a)}}{\partial t} + div\, N^{(a)} \vec{V}^{(a)} = 0, \qquad /1/$$

$$\frac{\partial \vec{V}^{(a)}}{\partial t} + (\vec{V}^{(a)} \vec{\nabla})\vec{V}^{(a)} = \frac{e}{m}\{\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{V}^{(a)} \vec{H}]\}$$

и

$$\Delta \vec{E} - \nabla(\nabla \vec{E}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} E \doteq \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}, \quad div \vec{E} = 4\pi e \sum_a N^{(a)}$$

$$\vec{j} = \sum_a N^{(a)} \vec{V}^{(a)}.$$

Предполагая нелинейности малыми, будем искать решения уравнений /1/ в виде разложения по некоторому малому параметру λ, который в конечных результатах полагается равным единице /см., например,[3],[4]/.

Первая ступень итеррационной процедуры приводит к линейному приближению:

$$\frac{\partial N_1^{(a)}}{\partial t} + N_0^{(a)} div\, \vec{V}_1^{(a)} + div\, N_1^{(a)} \vec{V}_0^{(a)} = 0,$$

$$\frac{\partial V_1^{(a)}}{\partial t} + (\vec{V}_0^{(a)} \vec{\nabla})\vec{V}_1^{(a)} = \frac{e}{m}\{\vec{E}_1 + \frac{1}{c}[\vec{V}_0^{(a)} \vec{H}_1]\},$$

$$\Delta \vec{E}_1 - \vec{\nabla}(\nabla \vec{E}_1) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}, \quad div\, \vec{E}_1 = 4\pi e \sum_a N_1^{(a)},$$

$$\vec{j}_1 = \sum_a (N_0^{(a)} \vec{V}_1^{(a)} + N_1^{(a)} \vec{V}_0^{(a)}).$$

Разлагая искомые величины в ряды Фурье, получим для $N_{1k}^{(a)}$, $\vec{V}_{1k}^{(a)}$, $\vec{E}_{1k}$

$$N_{1k}^{(a)} = i\frac{eN_0^{(a)}}{m\omega^3} k^2(\vec{E}_{1k} \vec{V}_0^{(a)})$$

$$\vec{V}_{1k}^{(a)} = i\frac{e}{m\omega}\{\vec{E}_{1k} + \frac{\vec{k}}{\omega}(E_{1k} V_0^{(a)})\},$$

$$[(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu](\vec{E}_{1k})_\nu = \frac{4\pi\omega i}{c^2}(\vec{j})_\mu . \qquad /3/$$

При решении системы /3/, как и в упомянутых выше работах /1,2/, перейдем в систему координат, подчиненную условию

$$\sum_a N_0^{(a)} \vec{V}_0^{(a)} = 0 , \qquad /4/$$

где $\vec{V}_0^{(a)}$ – начальная скорость a -ой плазмы, причем $\vec{V}_0^{(a)} \parallel \vec{u}_0$ скорости относительного движения.

В этой системе координат уравнения для полей:

$$(\omega^2 - \Omega^2)(\vec{E}_{1k})_1 = 0$$

$$(k^2 - \frac{\omega^2 - \Omega^2}{c^2})(\vec{E}_{1k})_2 = 0 \qquad /5/$$

$$(k^2 - \frac{\omega^2 - \Omega^2}{c^2} + \frac{k^2}{\omega^2 c^2} \sum_a \Omega_a^2 (\vec{V}_0^{(a)})^2)(\vec{E}_{1k})_3 = 0 .$$

Здесь $\vec{k} = (k, 0, 0)$ и $\vec{V}_0^{(a)} = (0, 0, V_0^{(a)})$, таким образом при выполнении условия /4/ получаем $N_1^{(1)} + N_1^{(2)} = 0$, при этом $N_1^{(1)}$ и $N_1^{(2)}$ в отдельности не равняются нулю. Таким образом, уже в линейном приближении происходит банчировка пучка и плазмы; но система координат выбирается таким образом, что продольные и поперечные волны не завязаны.

Третье из уравнений /5/ приводит к апериодическому нарастанию поля флуктуаций. Инкремент был найден в /1,2/ и в случае нерелятивистской относительной скорости пучка равен

$$\gamma = k \left(\frac{\sum_a \Omega_a (V_0^{(a)})^2}{k^2 c^2 + \sum_a \Omega_a^2} \right)^{1/2} = k u_0 \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\sqrt{\sum_a \Omega_a^2 (k^2 c^2 + \sum_a \Omega_a^2)}} , \qquad /6/$$

$\Omega_1 \, \Omega_2$ – ленгмюровские частоты электронов, соответственно, пучка и плазмы, $\Omega^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2$.

Вторая ступень итеррационной процедуры приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial N_2^{(a)}}{\partial t} + N_0^{(a)} \operatorname{div} \vec{V}_2^{(a)} + \operatorname{div} N_1^{(a)} \vec{V}_1^{(a)} + \operatorname{div} N_2^{(a)} \vec{V}_0^{(a)} = 0$$

$$\frac{\partial V_2^{(a)}}{\partial t} + (\vec{v}_0^{(a)} \vec{\nabla})\vec{V}_2^{(a)} + (\vec{V}_1^{(a)} \vec{\nabla})\vec{V}^{(a)} = \frac{e}{m}\{\vec{E}_2 + \frac{1}{c}[\vec{V}_0^{(a)} \vec{H}_2] + \frac{1}{c}[\vec{V}_1^{(a)} \vec{H}_1]\} ,$$

$$\Delta \vec{E}_2 - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{E}_2) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\vec{E}_2 = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}_2 , \quad \operatorname{div}\vec{E}_2 = 4\pi e \sum_a N_2^{(a)}, \qquad /7/$$

$$\vec{j}_2 = \sum_a (N_0^{(a)} \vec{V}_2^{(a)} + N_1^{(a)} \vec{V}_1^{(a)} + N_2^{(a)} \vec{V}_0^{(a)}) .$$

В дальнейшем ради простоты мы ограничимся исследованием взаимодействия волн с одинаковыми волновыми векторами $\vec{k}_1$.

В этом случае, как известно, $\vec{E}_2$ будет зависеть от $\vec{r}$ и t в виде $exp\{\pm 2i(\vec{k}_1\vec{r} - \omega_1 t)\}$. Ниже индекс 1 при k_1 и ω_1 мы будем опускать. После несложных, но громоздких вычислений, получим выражения для Фурье-компонент плотности и скорости во втором приближении и уравнения для поля $\vec{E}_{2k}$.

$$N_{2k}^{(a)} = \frac{E_{1k}^2}{2} \cdot \frac{k^2\Omega^2}{4\pi m\omega^4} \frac{(\omega^2\Omega^2 + 3k^2 a)(\Omega^2/2 - \omega^2)}{\omega^2\Omega^2(\omega^2 - \Omega^2/4)}, \qquad /8/$$

$$V_{2k}^{(a)} = \frac{ie}{2m\omega}\left\{\vec{E}_{2k} + \frac{\vec{k}}{\omega}\left[(\vec{E}_{2k}\vec{V}_0^{(a)}) + \frac{ie}{m\omega}E_{1k}^2\left(1 + \frac{(kV_0^{(a)})^2}{\omega^2}\right)\right]\right\}, \qquad /9/$$

$$\left(\omega^2 - \frac{\Omega^2}{4}\right)(\vec{E}_{2k})_1 = -\frac{ie/4}{m\omega^2}k\left(\Omega^2 + 3\frac{k^2}{\omega^2}a\right)E_{1k}^2,$$

$$(k^2c^2 - \omega^2 + \Omega^2/4)(\vec{E}_{2k})_2 = 0,$$

$$\left[(k^2c^2 - \omega^2 + \Omega^2/4) + \frac{k^2 a}{4\omega^2}\right](\vec{E}_{2k})_3 = -3\frac{ie/4}{m\omega^2}\frac{k^4}{\omega^3}\sum_a \Omega_a^2(\vec{V}_0^{(a)})^3 E_{1k}^2,$$

где $a = \sum_a \Omega_a^2 (\vec{V}_0^{(a)})^2$.

Из /8/ видно, что во втором приближении в системе появляется отличная от нуля плотность заряда $\rho_{2k} = e\sum_a N_{2k}^{(a)}$ и, следовательно, продольное электрическое поле, определяемое первым из уравнений /10/. Это поле растет со временем как $e^{2\gamma t}$ и ведет к дальнейшей банчировке пучка и плазмы.

Второе из уравнений /3/ и выражение /9/ показывают, что рассмотренная неустойчивость приводит к модуляции первоначальной скорости пучка.

Учет дальнейших членов разложения приводит к дроблению масштаба неустойчивости, но связанное с ним математическое исследование очень громоздко, поэтому здесь мы его приводить не будем.

Оценим вклад второго приближения. Из формулы /8/ нетрудно получить, используя дисперсионное уравнение линейного приближения и уравнения /10/,

$$\frac{|N_2|}{N_0^{(1)}} = \frac{|E_{1k}|^2}{4\pi N_0^{(1)} m u_0^2} \frac{(k^2c^2 + \Omega^2)^2(3k^2c^2 + 2\Omega^2)}{\Omega_1^4 k^2 u_0^2 \Omega_2^4}\Omega^4, \qquad /11/$$

для того чтобы было справедливо линейное приближение нужно, чтобы

$$\frac{|N_2|}{N_0^{(1)}} \ll 1 .$$

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность А.А. Рухадзе за чтение работы в рукописи и ценные замечания.

Литература

1. А.А. Рухадзе. Радиофизика, 5, вып. 6 /1962/.
2. В.Г. Маханьков, А.А. Рухадзе. "Возбуждение электромагнитных волн поперек пучка заряженных частиц в плазме". "Ядерный синтез" /в печати/. Препринт ОИЯИ Р-1005 /1962/.
3. M.Sumi, Jour. of the Phys. Soc. of Japan. 16, 1086 (1960).
4. И. Георгадзе. ЖТФ /в печати/.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 января 1963 года.