ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория высоких энергий

В.И. Котов, Ю.Д. Обухов

1158

О ДВИЖЕНИИ ЗАРЯЖЕННОГО ВИТКА С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Дубна 1963

В.И. Котев, Ю.Д. Обухов

1158

О ДВИЖЕНИИ ЗАРЯЖЕННОГО ВИТКА С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Дубна 1963

Исследование движения витка с током в магнитных полях представляет большой интерес для различных прикладных вопросов физики плазмы: когерентного метода ускорения заряженных частиц, инжекции частиц в магнитные ловушки, стабилизации плазменных образований. Если в когерентном методе ускорения речь идет об образованиях, движущихся с сугубо релятивистскими скоростями, то в остальных из перечисленных проблем скорости являются нерелятивистскими . Исследованию движения отдельных частиц и колец с током в нерелятивистском случае посвящен ряд работ [1-6]. Ниже мы рассмотрим поведение тонкого релятивистского заряженного кольца с током в двух практически интересных случаях. При этом будем интересоваться поведением лишь большого радиуса кольца предполагая, что малый радиус R стабилизирован.

1. Рассмотрим вначале движение кольца в пространственно-периодическом, аксиально -симметричном магнитном поле. Аксиально-симметричное магнитное поле описывается одной компонентой вектор-потенциала A_ϕ , удовлетворяющей в пространстве, где нет проводников с током, уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_\phi}{\partial r}\right) - \frac{A_\phi}{r^2} + \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial z^2} = 0 . \qquad /1/$$

Решением этого уравнения будет выражение

$$A_\phi = \frac{H_0 r}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} D_m I_m \left(\frac{2\pi m}{s} r\right) \operatorname{Cos} \frac{2\pi m}{s} z , \qquad /2/$$

где s – период изменения магнитного поля вдоль оси Z ,

H_0 – постоянная составляющая поля,

I_m – функция Бесселя мнимого аргумента,

D_m – постоянные коэффициенты.

В дальнейшем ограничимся в /2/ только двумя первыми членами, т.е. рассмотрим движение кольца в поле

$$A_\phi = \frac{H_0 r}{2} + D_1 I_1 \left(\frac{2\pi}{s} r\right) \operatorname{Cos} \frac{2\pi}{s} z . \qquad /3/$$

Пусть заряженное релятивистское кольцо с током перемещается вдоль z и вращается относительно своей оси, совпадающей с осью симметрии поля. Исследование будем проводить в системе координат, в которой кольцо покоится в z – направлении. Таким образом, все дальнейшие рассуждения и соотношения будут справедливы именно в этой системе координат.

Лагранжиан, описывающий движение кольца в выбранной системе координат, можно записать в виде:

$$L = - Mc^2\sqrt{1-\beta^2} + \frac{I^2 L}{2c^2} - \frac{Q^{*2}}{2C} + \frac{I\Phi}{c} , \qquad /4/$$

где M – масса кольца, I – ток, Φ – магнитный поток через площадь ограниченную кольцом, L – индуктивность, а C – емкость, определяемые формулами

$$L = 4\pi R\left(\ln\frac{8R}{a} - 2\right), \quad C = \frac{\pi R}{\ln\frac{8R}{a}} . \qquad /5/$$

Q^* – эквивалентный заряд кольца, определяемый из следующих соображений. Для того, чтобы по малому радиусу действующие силы были скомпенсированы, необходимо предположить в кольце наличие ионов. Ионы в выбранной системе координат считаются неподвижными. Отсюда мы получаем для Q^* соотношение

$$\beta_\phi = \frac{Q^*}{Q} , \qquad /6/$$

где Q – полный заряд электронов в кольце, а β_ϕ – скорость их вращения, выраженная в единицах скорости света. При выводе /6/ предполагалось, что частота обращения электронов в кольце $\dot\phi$ постоянна по его сечению и связана с током соотношением $\dot\phi = \frac{2\pi I}{Q}$. Считая переменные составляющие магнитного поля h_z, h_r малыми величинами по сравнению с H_0, в линейном приближении по $\xi = \frac{R-R_0}{R_0}$, $q = \frac{z}{R_0}$ / R_0 –радиус кольца в равновесном состоянии/ получим из /4/ следующие уравнения

$$\ddot\xi + \nu^2\xi = -\frac{\omega^2 a_1}{1+a\gamma^2\frac{\ell+2}{\ell}}\Big[\Big(1+\frac{n\omega_z^2\gamma_z^2}{\Omega^2(1+a)}\Big)\mathrm{Cos}\,\Omega t + \Big(\frac{2a}{1+a} - (1+n)\Big)\xi\,\mathrm{Cos}\,\Omega t -$$

$$- \frac{\omega_z}{\Omega}\Big(\frac{\Omega^2}{\omega_z^2} + \frac{n\gamma_z^2}{1+a}\Big) q\,\mathrm{Sin}\,\Omega t\Big] , \qquad /7/$$

$$\ddot q = -\frac{\omega^2 a_1}{1+a\gamma^2\frac{\ell+2}{\ell}}\Big[\frac{n\omega_z\gamma_z^2}{\Omega}\mathrm{Sin}\,\Omega t + n\gamma_z^2 q\,\mathrm{Cos}\,\Omega t - \frac{\omega_z}{\Omega}\Big(\frac{\Omega^2}{\omega_z^2} + \frac{n\gamma_z^2}{1+a}\Big)\xi\,\mathrm{Sin}\,\Omega t\Big].$$

Здесь введены обозначения: $\omega_z = \frac{v_z}{R_0}$, v_z –равновесная скорость движения кольца вдоль оси z в лабораторной системе координат; $\omega = \frac{Q\,cH_0}{E}$, E –энергия; a_1 – амплитуда переменной составляющей магнитного поля h_z на равновесном радиусе, отнесенная к H_0; $\ell = 2\left(\ln\frac{8R_0}{a} - 2\right)$ – погонная индуктивность кольца; $\Omega = \frac{2\pi}{s'} v_z$ частота модуляции магнитного поля, $s' = s/\gamma_z$ – период изменения магнитного поля в выбранной системе координат, γ – энергия в единицах энергии покоя,

$$\gamma_z = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_z^2}} , \quad n = -\left(\frac{r}{h_z}\frac{\partial h_z}{\partial r}\right)_{r=R_0} .$$

Величина $$a\gamma^2\frac{\ell+2}{\ell} = \frac{r_e N(\ell+2)}{2\pi R_0\gamma}$$

/ r_e -классический радиус электрона, N – полное число электронов в кольце/ является отношением сил, расталкивающих кольцо по большому радиусу и связанных с наличием у кольца тока и заряда, к центробежной силе. Если данная величина мала, то мы получаем из /7/ уравнения одночастичного приближения. Собственная частота ν колебаний системы по ξ выражается через ее параметры соотношением:

$$\nu^2 = \frac{\omega^2\left(1+\dfrac{a^2\gamma^2}{(1+a)\left(1+a\gamma^2\dfrac{\ell+2}{\ell}\right)}\right)}{1+a\gamma^2\dfrac{\ell+2}{\ell}} . \qquad /8/$$

Проанализируем уравнения /7/. Первый член в правой части уравнения /7/ для ξ приводит при $\nu=\Omega$ к простому / или внешнему/ резонансу. В данном случае амплитуда колебаний растет пропорционально времени, а коэффициент пропорциональности p равен

$$p \approx \frac{a_1\omega\left[1+\dfrac{n\omega_z^2\gamma_z^2\left(1+a\gamma^2\dfrac{\ell+2}{\ell}\right)}{\omega^2\left(1+a+a^2\gamma^2/1+a\gamma^2\dfrac{\ell+2}{\ell}\right)}\right]}{2\sqrt{1+a\gamma^2\dfrac{\ell+2}{\ell}+\dfrac{a^2\gamma^2}{1+a}}} . \qquad /9/$$

Хотя вторые и третьи члены в правых частях уравнений /7/ имеют второй порядок малости, при определенных условиях они могут играть существенную роль. Второй член в квадратных скобках в уравнении для ξ при $\Omega=2\nu$ приводит к параметрическому резонансу. При этом амплитуды колебаний нарастают со временем как e^{gt}, где

$$g = \frac{a_1\omega\,/(1+n)-\dfrac{2a}{1+a}/}{4\sqrt{1+a\gamma^2\dfrac{\ell+2}{\ell}+\dfrac{a^2\gamma^2}{1+a}}} \qquad /10/$$

Для q – движения аналогичный член не приводит к резонансным явлениям, так как собственная частота колебаний в этом случае равна нулю. Третьи члены в квадратных скобках в уравнениях /7/ ответственны за связь q и ξ -движений. Эта связь вытекает непосредственно из закона сохранения полной энергии системы

$$E\left(1+\frac{\omega_z R_0^2}{c^2}\dot{q}\right)+\frac{LI^2}{2c^2}+\frac{Q^{*2}}{2C} = Const . \qquad /11/$$

Хотя скорость v_z кольца релятивистская, при резонансных условиях кольцо может успеть значительно раскачаться при длине транспортирующей системы в несколько десятков метров. В связи с этим при изготовлении системы /например, из набора соленоидов, разделенных промежутками/ необходимо так выбрать структуру, чтобы резонансные явления не появлялись. Рассмотрим следующий численный пример Пренебрежем собственными силами расталкивания и положим $\gamma_z = 3$, $\gamma_{лаб.} = 10$. Тогда при R_0=10 см, $H_0 \approx 550$ э., $\omega = 2{,}8.10^9$ сек$^{-1}$, а $p \approx 1{,}4.10^9 a_l$, $g \approx 7.10^8 a_l$. При величине модуляции поля $a_l = 0{,}1$ и длине системы $S = 30$ м будет иметь $pt \approx 4$, $gt \approx 2$.

2. Рассмотрим теперь случай движения заряженного кольца в однородном магнитном поле при наличии возмущений. При этом будем предполагать, что возмущения в поле h_z, h_ϕ, h_r зависят от всех трех переменных r, ϕ, z и удовлетворяют условию $\frac{h_l}{H_0} \ll 1$. Как и раньше, задачу будем решать в системе, где кольцо покоится в z -направлении, и ограничимся в окончательных уравнениях лишь членами первого порядка малости.

Уравнения движения кольца в выбранной системе будут иметь вид

$$\ddot{\xi} = \frac{R\dot{\phi}^2 E}{R_0 E_*} + \frac{Q^2\dot{\phi}^2}{8\pi^2 E_* R_0}\frac{\partial L}{\partial R} - \frac{c^2 Q^{*2}}{2E_* R_0}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{C}\right) + \frac{cQR\dot{\phi}H_z'}{E_* R_0} + \frac{c^2 Q\,\mathcal{E}_r'}{E_* R_0},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\phi}R^2 E}{c^2} + \frac{Q^2\dot{\phi}L}{4\pi^2 c^2} + \frac{QR^2 H_0}{2c}\right) = QR\,\mathcal{E}_\phi',$$

$$\ddot{q} = -\frac{cQ\dot{\phi}R}{E_* R_0}h_r',$$

где E_* -равновесная энергия, $H_z' = H_0 + h_z'$ компоненты электрического поля согласно формулам преобразования полей из одной системы координат в другую, равны $\mathcal{E}_r' = \beta_z h_\phi'$, $\mathcal{E}_\phi' = -\beta_z h_r'$. В уравнениях /12/ сразу сделано пренебрежение членами второго порядка малости вида $\dot{q}h_\phi'$, $\dot{\xi}h_\phi'$, $\dot{\xi}h_z'$, $\dot{q}h_r'$. Проводя дальнейшее разложение и ограничиваясь первым порядком по q и ξ, окончательно получим:

$$\ddot{\xi} + \nu^2\xi = -\frac{\omega^2}{1+a\gamma^2\frac{\ell+2}{\ell}}a_z' + \omega\omega_z a_\phi' + \frac{\omega^2\omega_z}{(1+a)(1+a\gamma^2\frac{\ell+2}{\ell})}\int_{t_1}^{t} a_r'\,dt,$$

/13/

$$\ddot{q} = \frac{\omega^2}{1+a\gamma^2\frac{\ell+2}{\ell}}a_r',$$

где a_l' - соответствующая компонента возмущения поля на равновесном радиусе, отнесенная к H_0. Остальные обозначения те же самые, что и в п. 1.

Если разложить a_l' в двойные ряды Фурье, то условие резонанса запишется в виде

$$m\omega_0 \pm j\,\Omega_0 = \nu, \qquad /14/$$

где m, j -целые числа, $\Omega_0 = \frac{2\pi}{S'}v_z$ / S' -длина магнитной системы в выбранной системе координат/. Величина ω_0 определяет частоту обращения электронов кольца в равновесном состоянии, и равна

$$\omega_0^2 = \frac{\omega^2}{1+a\gamma^2\frac{\ell+2}{\ell}}. \qquad /15/$$

Из сопоставления выражений для ω_0 и ν видно, что учет собственных полей кольца приводит к дополнительному члену, который способствует фокусировке по ξ -направлению. Он появляется, если учитывать изменение емкости C и индуктивности L кольца при колебаниях его радиуса или, иными словами, - градиенты собственных полей.

Знак плюс в /14/ относится к случаю $m = 0$, совпадающему с рассмотренным в п. 1, причем для приведенного выше примера резонанс будет при $j = 15$. Для количественных оцен ок действия различных гармоник в данном случае требуется, конечно, конкретное задание возму щений поля a'_1.

В заключение следует отметить, что все рассмотрение базировалось на ряде предположений: малые отклонения от равновесного состояния, фиксированный малый радиус, пренебрежение поляризацией кольца. В силу этих обстоятельств полученные результаты имеют несколько ориентировочный характер, так как последовательное рассмотрение проблемы с учетом движения ионов и изменений малого радиуса кольца может привести к дополнительным факторам, с которыми необходимо будет считаться.

Авторы признательны В.И. Векслеру за внимание к работе и М.Л. Иовновичу за плодотворное обсуждение затронутых вопросов.

Литература

1. В.Д. Шафранов. ЖЭТФ, 33 710 /1957/.
2. С.М. Осовец. Сб физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций, Изд-во АН СССР, 1958.
3. Л.М. Коврижных, ЖЭТФ, 36 , 1834 /1959/.
4. М.Л. Левин. Научные труды, т. 3, вып. 2, стр. 3. РИАН СССР /1961/.
5. В.Д. Федорченко, Б.Н. Руткевич, Б.М. Черный, ЖТФ, 29 , 1212 /1959/.
6. К.Д. Синельников, Б.Н. Руткевич, В.Д. Федорченко, ЖТФ, 30 , 249 /1960/.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 декабря 1962 г.