1155

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

В.Г. Маханьков

1155

О НЕУСТОЙЧИВОСТЯХ В СИСТЕМЕ ПЛАЗМА-ПУЧОК ОГРАНИЧЕННОГО РАДИУСА

Дубна 1963 год

В.Г. Маханьков

1155

О НЕУСТОЙЧИВОСТЯХ В СИСТЕМЕ ПЛАЗМА-ПУЧОК ОГРАНИЧЕННОГО РАДИУСА

Дубна 1963 год

В данной работе рассмотрено взаимодействие ограниченного по радиусу пучка заряженных частиц с плазмой в гидродинамическом приближении, т.е. предполагается, что пучок и плазма холодные. Интеграл столкновения не учитывается. Исследован спектр колебаний для различных волновых векторов. Получены инкременты нарастания колебаний в соответствующих областях частот и волновых векторов.

В интересующем нас случае система состоит из квазинейтральной плазмы плотности n_2, через которую движется с релятивистской скоростью v_0 скомпенсированный пучок заряженных частиц плотности n_1. Вся система представляет из себя шнур радиуса r_0, с постоянной плотностью. Таким образом, функция распределения в стационарном состоянии будет иметь вид:

$$f = \sum_a n_a \delta(\vec{v} - \vec{v}_a)\, h(r), \tag{1.1}$$

где суммирование производится по всем сортам частиц в системе, а

$$h(r) = \begin{cases} 1 & r \le r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases} \qquad \vec{v}_a = \begin{cases} \vec{v}_{1e,i} = \vec{v}_0 = (0, 0, v_0) \\ v_{2e,i} = 0 \end{cases}.$$

Используя кинетическое уравнение в линейном приближении, получим аналогично [1] уравнение поля в области $r \le r_0$ (рассматриваются возмущения типа

$$E(r, z, t) = E(r, k, \omega, n)\exp\{i(kz + n\theta - \omega t)\});$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE_z}{dr}\right) - \frac{n^2}{r^2}E_z + \frac{\lambda^2}{r_0^2}E_z = 0,$$

$$x\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2 - n^2}\frac{d\Phi}{dx}\right) + \Phi = 0, \tag{1.2}$$

$$E_r = \frac{in}{x^2 - n^2}\frac{d\Phi}{dx} + \frac{i\left(k - \frac{\Omega^2}{c^2}b\right)}{\epsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}\cdot\frac{1}{x^2 - n^2}\frac{dE_z}{dr},$$

где

$$\frac{\lambda^2}{r_0^2} = \frac{\frac{\omega^2}{c^2}\eta\left(\epsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)}{\left(1 + \frac{\Omega^2 b^2}{c^2}\right)\left(\epsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) + \left(k - \frac{\Omega^2}{c^2}b\right)^2},$$

$$x = r\sqrt{\epsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2},$$

$$\Phi = xE_\theta + \frac{\left(k - \frac{\Omega^2}{c^2}b\right)n}{\sqrt{\epsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}}E_z \tag{1.3}$$

и

$$\eta = 1 - \frac{\Omega_2^2}{\omega^2} - \frac{\Omega_1^2}{\gamma^2(\omega - kv_0)^2}, \quad \epsilon = 1 - \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{\omega^2},$$

$$b = \frac{v_0}{\omega - k v_0}, \quad \Omega_1^2 = 4\pi n_1 e^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right), \quad \Omega_2^2 = 4\pi n_2 e^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right).$$

Уравнения поля в области $r > r_0$ получаются из (1.2) при $\epsilon = \eta = 1$, $b = 0$. В дальнейшем величины, относящиеся к области $r \le r_0$ снабжаются индексом 1, а к области $r > r_0$ – индексом 2. Решения (1.2) можно записать в виде:

$$E_z^{(1)} = A_1 J_n(\lambda r/r_0), \qquad E_z^{(2)} = A_2 H_n(\mu r/r_0),$$
$$\Phi^{(1)} = B_1 \Phi_1(\lambda r/r_0), \qquad \Phi^{(2)} = B_2 \Phi_2(\mu r/r_0), \tag{1.4}$$

где $\mu^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) r_0^2$, J_n и H_n суть функции Бесселя и Ганкеля, Φ_1 и Φ_2 – линейно независимые решения второго уравнения (1.2), причем Φ_1 ограничено в пуле, а Φ_2 дает на бесконечности расходяшуюся волну.

Граничные условия берем в виде:

$$E_z^{(1)} = E_z^{(2)}, \qquad H_z^{(1)} = H_z^{(2)},$$
$$E_\theta^{(1)} = E_\theta^{(2)}, \qquad H_\theta^{(1)} = H_\theta^{(2)}. \tag{1.5}$$

Здесь предполагается, что поверхностные заряды и токи отсутствуют, что для объемных волн является вполне оправданным.

Из уравнений Максвелла:

$$H_\theta = \frac{ic}{\omega} \left[\frac{dE_z}{dr} - ik E_r \right],$$
$$H_z = -\frac{ic}{\omega} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r E_\theta - \frac{in}{r} E_r \right] \tag{1.6}$$

Далее будем рассматривать азимутальные волны при $k = 0$ и бегущие волны при $n = 0$. Первый случай подробно исследован в работе /1/, поэтому останавливаться на нем мы здесь не будем. Приведем только нарастающее во времени решение дисперсионного уравнения в области частот $|\omega|^2 \lesssim \Omega_{1,2}^2$ (в обратном пределе дисперсионное уравнение решений не имеет):

$$\omega^2 = \tfrac{1}{2} \left\{ \left(\Omega_2^2 + \frac{\Omega_1^2}{\gamma^2} \right) + \sqrt{\left(\Omega_2^2 + \frac{\Omega_1^2}{\gamma^2} \right)^2 + 4\Omega_1^2 \Omega_2^2 \frac{v_0^2}{c^2}} \right\}. \tag{1.7}$$

При получении выражения (1.7) предполагалось, что $2\nu_2 = \frac{\Omega_2^2}{c^2} r_0^2 \ll 1$ и $\frac{2\nu_1}{\gamma} = \frac{\Omega_1^2}{c^2} r_0^2 \ll 1$. Эти условия ограничивают число частиц на единицу длины пучка (ν – "погонный" электрон).

В нерелятивистском пределе (1.7) переходит в

$$Im\, \omega = \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}} \frac{v_0}{c}. \tag{1.8}$$

2. Вернемся к случаю $n=0$, $k\neq 0$ тогда, как легко показать, уравнения для полей E_θ и E_z развязываются, и решениями этих уравнений служат линейные комбинации модифицированных функций Бесселя и функций Кельвина. Дисперсионное уравнение получим, удовлетворяя условиям (1.5):

$$\mu^2\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}E\right) I_0(\lambda)\, K_1(\mu)+\left(\epsilon-\frac{\Omega^2}{\omega^2}bk\right)\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\lambda K_0(\mu)\, I_1(\lambda)=0 . \tag{2.1}$$

Здесь

$$\frac{\lambda^2}{r_0^2}=\frac{\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\right)\frac{\omega^2}{c^2}\eta}{\left(k-\frac{\Omega^2}{c^2}b\right)^2-\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\right)\left(1+\frac{\Omega^2}{c^2}b^2\right)} \tag{2.2}$$

и

$$\mu^2=\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right) r_0^2 .$$

Исследовать уравнение (2.1) будем в двух областях частот $|\omega|\gg\Omega_{1,2}$ и $|\omega|\ll\Omega_{1,2}$. Первую область частот по отношению к волновому вектору можно разбить на две: а) резонансную $\frac{\omega-v_0k}{\omega}\ll 1$ и б) область далекую от резонанса $\frac{\omega-v_0k}{\omega}\gtrsim 1$.

Исследовать резонансную область будем ниже, сейчас рассмотрим дисперсионное уравнение (2.1) в нерезонансной области. Тогда $\epsilon_H=1$, $\eta_H=1$, $b_Hk\approx 1$, $\lambda=\mu$ и уравнение (2.1) перейдет в $I_0(\lambda)\,K_0'(\lambda)-K_0(\lambda)\,I_0'(\lambda)=0$, что не может выполняться, так как левая часть этого уравнения есть вронскиан линейно-независимых функций Бесселя. Таким образом, в области $|\omega|\gg\Omega_{1,2}$; $\frac{\omega-kv_0}{\omega}\gtrsim 1$ уравнение (2.1) решений не имеет.

В области $|\omega|<\Omega_{1,2}$ будем, как и ранее, предполагать, что ν_2 и $\nu_1/\gamma\ll 1$, тогда

$$\frac{\omega^2}{c^2}r_0^2\ll 1 .$$

Эту область по отношению к волновому вектору можно разбить на две $k^2\ll\frac{\Omega^2}{c^2}$ и $k^2\gg\frac{\Omega^2}{c^2}$. В первой области $\mu\ll 1$, во второй $\mu\gg 1$.

Исследуем случай $\mu\ll 1$, дисперсионное уравнение примет вид:

$$\left(k^2-\frac{\Omega_1^2+\Omega_2^2}{c^2}\right)I_0(\lambda)-\left(1-\frac{\Omega_1^2+\Omega_2^2}{\omega^2}-\frac{\Omega_1^2}{\omega^2}\frac{kv_0}{\omega-kv_0}\right)\left(k-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\lambda\ \ln\frac{\mu}{c_1}\ I_1(\lambda)=0 \tag{2.3}$$

и так как $\ln\mu/c_1$ велик, то с логарифмической точностью (2.3) имеет вид

$$\left(1-\frac{\Omega_1^2+\Omega_2^2}{c^2}-\frac{\Omega_1^2}{\omega^2}\frac{kv_0}{\omega-kv_0}\right)\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\lambda J_1(\lambda)=0 . \tag{2.4}$$

Последнее уравнение разбивается на четыре

$$1-\frac{\Omega_1^2+\Omega_2^2}{\omega^2}-\frac{\Omega_1^2}{\omega^2}\frac{kv_0}{\omega-kv_0}=0,\quad k^2-\frac{\omega^2}{c}=0, \tag{2.5}$$

$\lambda=0$ и $\lambda=\lambda_1$, причем $J_1(\lambda_1)=0$.

Первое из уравнений (2.5) является кубическим относительно ω, но детерминант его отрицателен, поэтому комплексных корней оно не имеет.

Уравнения $k^2-\frac{\omega^2}{c^2}=0$ и $k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon=0$ имеют также только действительные корни. Остается рассмотреть

$$1-\frac{\Omega_2^2}{\omega^2}-\frac{\Omega_1'^2}{(\omega-kv_0)^2}=0,\quad \Omega_1'=\frac{\Omega_1}{\gamma},\quad \gamma^2=\frac{1}{1-v_0^2/c^2} \tag{2.6}$$

и

$$\frac{(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon)\frac{\omega^2}{c^2}\eta}{(k-\frac{\Omega^2}{c^2}b)^2-(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon)(1+\frac{\Omega^2}{c^2}b^2)}=\frac{\lambda_1^2}{r_0^2}. \qquad (2.7)$$

Уравнение (2.6) исследовано в ряде работ (см. /2/,/3/ и цитированную там литературу). Добавим только, что в области $\omega \approx kv_0$ и $kv_0=\Omega_2$ решение (2.6) имеет вид

$$\omega = k v_0 + \frac{\Omega_2}{2^{4/3}}(-1\pm\sqrt{3})\left(\frac{n_1}{\gamma n_2}\right)^{1/3}. \qquad (2.8)$$

Выражение (2.8) справедливо при $n_1 \ll n_2\gamma$, инкремент

$$Im\,\omega = \frac{\Omega_2\sqrt{3}}{2^{4/3}}\left(\frac{n_1}{\gamma n_2}\right)^{1/3}.$$

Легко заметить, что если $\eta\neq 0$, $k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\neq 0$ и учесть $\frac{\omega^2}{c^2}r_0^2\ll 1$, то (2.7) упрощается

$$(k-\frac{\Omega_1^2}{c^2}b)^2-(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon)(1+\frac{\Omega_1^2}{c^2}b^2)=0$$

или

$$\omega^2\left(1-\frac{\Omega_1'^2}{(\omega-kv_0)^2}\right)-\Omega_2^2\left(1+\frac{\Omega_1^2\beta_0^2}{(\omega-kv_0)^2}\right)=0,\quad \beta_0=\frac{v_0}{c}. \qquad (2.9)$$

Из самого вида уравнения нетрудно заметить, что его решения имеют мнимые части, по крайней мере, в трех областях частот: 1) $\omega\ll kv_0$, 2) $\omega-kv_0\ll\Omega'$, 3) $\omega\gg kv_0$.

В первом пределе

$$\omega^2=\Omega_2^2\frac{1+\frac{\Omega_1^2\beta_0^2}{(kv_0)}}{1-\frac{\Omega'^2}{(kv_0)^2}}. \qquad (2.10)$$

Возбуждение имеет место при $\Omega_1>\gamma k v_0$. Если $\Omega_1\gg\gamma k v_0$, то (2.10) справедливо, когда $\Omega_2\ll\frac{kc}{\gamma}$.

В том случае, когда $\Omega_1'=kv_0$, решение (2.9) имеет вид

$$\omega=\Omega_2\frac{(-1\pm\sqrt{3})}{2^{4/3}}\left(\frac{\gamma n_1}{n_2}\right)^{1/3}. \qquad (2.11)$$

Это выражение справедливо при $\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{2/3}\gamma^{1/3}\ll 1$.

Во втором пределе $\omega-kv_0\ll\Omega_1'$, $\Omega_1\beta$, также имеются нарастающие решение вида:

$$Im\,\omega=+\Omega_2\gamma\beta. \qquad (2.12)$$

Полученное выражение справедливо при $\gamma\Omega_2\ll\Omega_1$ и $kv_0\ll\Omega'$. В третьем пределе, когда $\omega\gg kv_0$, получим выражение аналогичное (1.7) см /4/.

Рассмотрим теперь случай $\mu\gg 1$, т.е. $kr_0\gg 1$ при этом опять $\frac{\Omega_{1,2}^2}{c^2}r_0^2\ll 1$. В этих предположениях $(kc\gg\Omega_{1,2})$ уравнение (2.1) примет вид:

$$(k^2-\frac{\Omega_1^2+\Omega_2^2}{c^2})I_0(\lambda)\mu+(1-\frac{\Omega_1^2+\Omega_2^2}{\omega^2}-\frac{\Omega_1^2}{\omega^2}bk)(k^2-\frac{\omega^2}{c^2})\lambda I_1(\lambda)=0 \qquad (2.14)$$

или, так как $\mu \gg 1$, поэтому

$$k^2 - \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{c^2} = 0, \qquad I_0(\lambda\ ) = 0\ . \qquad (2.15)$$

Ни первое из уравнений (2.15), ни второе решений не имеет.

Таким образом, в этой области частот и волновых векторов нарастающих колебаний нет.

Нетрудно показать, что в области $\omega \gg \Omega_{1,2}$ и $\frac{\omega - kv_0}{\omega} \ll 1$ нарастающих колебаний нет, что вполне естественно, так как в этой области частот $\epsilon = 1$, и волны распространяются как бы в пустоте.

Во всем вышеприведенном рассмотрении существенным образом учитывалось наличие пространственной дисперсии в перпендикулярном к пучку направлении. В отсутствии таковой (достаточно положить $b = 0$) получим дисперсионное уравнение, аналогичное исследованному в работе /5/. В рассмотренной области $\nu \ll 1$ и $\beta_0 \approx 1$ оно комплексных решений не имеет.

Литература

1. О.И.Ярковой "Азимутальные волны в системе плазма-пучок ограниченного радиуса". Препринт ОИЯИ Р-1053 (1962).
2. В.П.Силин, А.А.Рухадзе "Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред". М.Атомиздат (1961).
3. В.Г.Маханьков. "Взаимодействие скомпенсированного пучка заряженных частиц с плазмой". Препринт ОИЯИ Р-910 (1962).
4. В.Г.Маханьков, А.А.Рухадзе "Возбуждение электромагнитных волн поперек пучка заряженных частиц в плазме". Препринт ОИЯИ Р-1005 (1962).
5. Г.И.Будкер. . Атомная энергия, 5, 9 (1956).

Рукопись поступила в издательский отдел
4 января 1963 года.