ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория высоких энергий

С.Б. Рубин, В.Н. Цытович

1129

О НЕЛИНЕЙНЫХ ПОТЕРЯХ ЭНЕРГИИ ЗАРЯДОМ В ПЛАЗМЕ

ЖЭТФ, 1964, т 34, в 1, с 310.

Дубна 1962 год

С.Б. Рубин, В.Н. Цытович

1129

О НЕЛИНЕЙНЫХ ПОТЕРЯХ ЭНЕРГИИ ЗАРЯДОМ В ПЛАЗМЕ

Дубна 1962 год

Аннотация

Получена система нелинейных уравнений, описывающих движение заряда в плазме в некоторых предельных случаях.

1. Теория потерь энергии зарядом в плазме обычно строится в рамках линейного приближения. Это оправдано в том случае, если рассматривается отдельная частица /элементарного и кратного ему заряда/. Вместе с тем очевидно, что если рассматривается сгусток зарядов и выполнены условия когерентности /размер меньше длины испускаемой волны/, то его торможение в плазме мало чем отличается от торможения отдельного заряда. Однако с ростом числа частиц в сгустке возбуждаемые зарядом волны в плазме становятся нелинейными. Это изменяет тормозящую силу. Несмотря на то, что в литературе неоднократно обсуждались вопросы увеличения эффективности взаимодействия зарядов с плазмой при выполнении условия когерентности, до сих пор нелинейная задача о потерях энергии зарядом в плазме не рассматривалась.

В настоящей работе задача о нелинейных потерях рассматривается в гидродинамическом приближении при температурах равных нулю. Рассматриваются лишь такие относительно небольшие нелинейности, которые не приводят к возникновению многоскоростных течений. В последнем случае использование гидродинамического подхода становится затруднительным. Мы будем также учитывать лишь смещения электронов, предполагая, что роль ионов сводится к фону, который компенсирует в среднем заряд электронов. Нас будет интересовать случай релятивистских скоростей зарядов.

2. Для описания движения электронов используем уравнения релятивистской гидродинамики в криволинейных координатах

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\;T_i^k) - \tfrac{1}{2}\frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^i}T^{k\ell} = F_{im}\,j^m \qquad /1/$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}\;j^i) = 0 \qquad /2/$$

$$T_i^k = w u_i u^k + p\,\delta_i^k \;;\; j^i = enu^i\,. \qquad /3/$$

Здесь u^k –четырехскорость, n –собственная плотность частиц, w –тепловая функция, p –давление. В дальнейшем будем интересоваться лишь задачами, имеющими цилиндрическую симметрию. Тогда /1/ /2/ приобретают вид

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}[r(w\gamma^2 v_r^2 + p)] + \frac{\partial}{\partial\phi}(rw\gamma^2 v_r v_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(rw\gamma^2 v_r v_z) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial t}(rw\gamma^2 v_r)\right\} - \frac{1}{r}(w\gamma^2 r^2 v_\phi^2 + p) = -en\gamma(H_z v_\phi r - H_\phi v_z + E_r)$$

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r^3 w\gamma^2 v_r v_\phi) + \frac{\partial}{\partial\phi}[r(w\gamma^2 v_\phi^2 r^2 + p)] + \frac{\partial}{\partial z}(r^3 w\gamma^3 v_\phi v_z) + \right.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(r^3 w\gamma^2 v_\phi) = -en\gamma(H_r r v_z - H_z r v_r + E_\phi r)$$

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rw\gamma^2 v_r v_z) + \frac{\partial}{\partial \phi}(rw\gamma^2 v_z v_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}[r(w\gamma^2 v_z + p)] +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial t}(rw\gamma^2 v_z)\right\} = - en\gamma(H_\phi v_r - H_r r v_\phi + E_z)$$

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rw\gamma^2 v_r) + \frac{\partial}{\partial \phi}(rw\gamma^2 v_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(rw\gamma^2 v_z) -\right.$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}[r(p - w\gamma^2)]\right\} = - en\gamma(E_r v_r + r v_\phi E_\phi + v_z E_z)$$

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r v_r n\gamma) + \frac{\partial}{\partial \phi}(rn\gamma v_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(rn\gamma v_z) + \frac{\partial}{\partial t}(rn\gamma)\right\} = 0,$$

где r, ϕ, z –цилиндрические координаты, $v_2 = \frac{dr}{dt}$, $v_\phi = \frac{d\phi}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$, $\gamma = (1 - v_z^2 - v_r^2 - r^2 v_\phi^2)^{-1/2}$. Из уравнений /4/–/7/ в стационарном случае следует сохранение вдоль линий тока величины /уравнение Бернули, для релятивистской жидкости/

$$\gamma \frac{w}{n} - e\Phi = Const, \qquad /8/$$

где Φ –скалярный потенциал электромагнитного поля.

В случае, когда отсутствует зависимость от ϕ вдоль линий тока сохраняется величина

$$-\frac{w}{n}\gamma v_\phi r^2 + eA_\phi r = Const. \qquad /9/$$

Если существует система отсчета, в которой вся картина стационарна /система, движущаяся вместе с нелинейной волной/, то при температурах, равных нулю / $p = 0$, $\frac{w}{n} = m$/, уравнения /4/–/7/ в этой системе отсчета записываются в виде

$$v_r \frac{\partial}{\partial r}(\gamma v_r) + v_z \frac{\partial}{\partial z}(\gamma v_r) - \gamma r v_\phi^2 = -\frac{e}{m}(H_z r v_\phi - H_\phi v_z + E_r) \qquad /10/$$

$$v_r \frac{\partial}{\partial r}(\gamma v_z) + v_z \frac{\partial}{\partial z}(\gamma v_z) = -\frac{e}{m}(H_\phi v_r - H_r r v_\phi + E_z) \qquad /11/$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rn\gamma v_r) + r\frac{\partial}{\partial z}(n\gamma v_z) = 0. \qquad /12/$$

Для получения замкнутой системы уравнений должны быть выписаны уравнения /8/,/9/ и уравнения Максвелла, в которых ток имеет вид

$$\gamma^i = en_\infty u^i_\infty - enu^i + j^i Q. \qquad /13/$$

Первый член /13/, описывающий неменяющийся ионный ток, выражен через электронный ток в точке, в которой имеется компенсация, $i^{\prime}_{Q}$ –плотность тока заряда, проходящего через плазму. В системе отсчета, в которой картина стационарна, не равна нулю лишь четвертая компонента $i^{\prime}_{Q}$.

3. Рассмотрим приближение, в котором скорость заряда, движущегося в плазме, можно считать постоянной. Пусть v_∞– скорость заряда. В системе отсчета, в которой заряд покоится, скорость плазмы v_z бесконечно далеко от заряда есть $-v_\infty$. Воспользуемся законами сохранения /8/, /9/. Так как вдали от заряда константа в /8/ одинакова на всех линиях тока, то во всем пространстве

$$\gamma = \gamma_\infty - \frac{e}{m}\Phi \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_\infty^2}} . \qquad /14/$$

В силу того, что вдали от заряда $A_\phi = 0$, $v_\phi = 0$, константа уравнения /9/ равна нулю. Если плотность $i^{\prime}_{Q}$ такова /нет тока/, что скорость v_ϕ не возбуждается, то во всем пространстве $v_\phi = 0$; $A_\phi = 0$; $H_z = \frac{\partial A_\phi}{\partial r} = 0$; $H_r = \frac{\partial A_\phi}{\partial z} = 0$. Уравнение непрерывности позволяет ввести потенциал

$$\frac{4\pi e^2}{m} r \frac{n\gamma v_r}{\gamma_\infty v_\infty} = \frac{\partial \chi}{\partial z} \qquad \text{или} \qquad \frac{n\gamma v_r}{n_\infty \gamma_\infty v_\infty} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \chi}{\partial \zeta} \qquad /15/$$

$$\frac{4\pi e^2}{m} r \frac{n\gamma v_z}{\gamma_\infty v_\infty} = -\frac{\partial \chi}{\partial r} \qquad \text{или} \qquad \frac{n\gamma v_z}{n_\infty \gamma_\infty v_\infty} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \chi}{\partial \rho}; \quad \rho = r\omega_\infty; \quad \zeta = z\omega_\infty ,$$

где $\omega_\infty^2 = \frac{4\pi n_\infty e^2}{m}$, n_∞ – собственная плотность невозмущенной плазмы. Уравнения Максвелла[x/]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\phi) = -4\pi e(n_\infty \gamma_\infty v_\infty + n\gamma v_z); \quad \frac{\partial H_\phi}{\partial z} = 4\pi e n\gamma v_r \qquad /16/$$

вместе с /15/ можно использовать, чтобы выразить магнитное поле H_ϕ через потенциал χ

$$h_\phi = \frac{H_\phi \omega_\infty}{e n_\infty v_\infty \gamma_\infty} = \frac{4\pi}{\rho}\left(\chi - \frac{\rho^2}{2}\right) . \qquad /17/$$

При $z \to \infty$, $\chi \to \frac{\rho^2}{2}$. Из /10/, /11/ при использовании /14/ следует /см.[1]/ сохранение обобщенного вихря во всем пространстве

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma v_r - \frac{e}{m}A_r\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma v_z - \frac{e}{m}A_z\right) = 0 . \qquad /18/$$

Или из /17/

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\gamma v_r}{\gamma_\infty v_\infty}\right) - \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\gamma v_z}{\gamma_\infty v_\infty}\right) = \frac{1}{\rho}\left(\chi - \frac{\rho^2}{2}\right).^{xx/} \qquad /19/$$

---

x/ Плазма квазинейтральна на ∞.

xx/ В плоскостях, проходящих через ось /$0z$/, обтекание заряда является "плоским"; /19/ и /17/ означает, что в каждой такой плоскости циркуляция $\gamma\vec{v}$ по любому замкнутому контуру равна потоку $\vec{H}$ через этот контур: $\int_L \gamma\vec{v}\,d\vec{l} = \frac{e}{m}\int_S H_\phi dS$.

Все величины можно выразить только через две функции $\chi = \chi(\rho, \zeta)$ и $\gamma = \gamma(\rho, \zeta)$.
Так, магнитное поле выражается через χ формулой /17/, а потенциал электрического поля – /14/. Из /15/ имеем

$$\frac{n^2}{n_\infty^2} = \frac{\gamma_\infty^2 - 1}{\gamma^2 - 1} \cdot \frac{1}{\rho^2}\left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial \zeta}\right)^2\right]. \qquad /20/$$

Используя /19/, получаем одно из нелинейных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\sqrt{\gamma_\infty^2-1}} \cdot \frac{\frac{\partial \chi}{\partial \rho}}{\sqrt{(\frac{\partial \chi}{\partial \rho})^2 + (\frac{\partial \chi}{\partial \zeta})^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\sqrt{\gamma_\infty^2-1}} \frac{\frac{\partial \chi}{\partial \zeta}}{\sqrt{(\frac{\partial \chi}{\partial \rho})^2 + (\frac{\partial \chi}{\partial \zeta})^2}}\right) = \frac{1}{\rho}\left(\chi - \frac{\rho^2}{2}\right). \qquad /21/$$

Второе уравнение получится подстановкой в уравнение Пуассона для потенциала выражений /14/ и /20/

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\gamma}{\gamma_\infty}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\frac{\gamma}{\gamma_\infty} = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{\gamma_\infty^2-1}}{\gamma_\infty} \cdot \frac{1}{\rho}\sqrt{\left(\frac{\partial \chi}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial \zeta}\right)^2} - 1 - q(\rho, \zeta), \qquad /22/$$

где $q(\rho, \zeta)$ связано с плотностью заряда $\rho_{\text{стор.}}$, проходящего через плазму соотношением $\rho_{\text{стор.}} = e n_\infty \gamma_\infty q$ /23/. Таким образом задача свелась к решению системы уравнений /21/, /22/. Поскольку общее ее решение затруднительно, разберем ряд частных случаев.

Покажем, как из /21/, /22/ следуют результаты линейной теории. Положим, что χ и γ мало отличаются от значений, принимаемых ими вдали от заряда,

$$\chi = \frac{\rho^2}{2}(1 + \mu); \quad \frac{\gamma}{\gamma_\infty} = 1 + \epsilon; \quad \epsilon \ll 1; \quad \mu \ll 1. \qquad /24/$$

Учитывая лишь линейные по ϵ и μ члены /21/, /22/, получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \zeta^2} = -\frac{\epsilon}{\gamma_\infty^2 - 1} + \mu + \frac{\rho}{2}\frac{\partial \mu}{\partial \rho} - q \qquad /25/$$

$$\frac{2}{\rho}\frac{\gamma_\infty^2}{\gamma_\infty^2 - 1} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial \zeta^2} = \mu. \qquad /26/$$

Раскладываем все величины по ζ в интеграл Фурье, а по ρ по функциям Бесселя индекса нуль. Например,

$$q(\rho, \zeta) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\kappa \zeta} d\kappa \int_0^\infty J_0(k\rho)\, q_{\kappa,k}\, dk. \qquad /27/$$

Получаем

$$\epsilon_{\kappa,k} = \frac{q_{\kappa,k}(\gamma_\infty^2 - 1)(1 + \kappa^2)}{[\kappa^2(\gamma_\infty^2 - 1) - 1](k^2 + \kappa^2 + 1)}. \qquad /28/$$

Работа сил над зарядом W в системе отсчета, в которой плазма покоится /л -система/, есть

$$W = \int \vec{I}_л \vec{E}_л \, dv_л = -\frac{m v_\infty \gamma_\infty n_\infty}{\omega_\infty^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_0^\infty 2\pi\rho\, d\rho\, q(\zeta, \rho)\frac{\partial \epsilon}{\partial \zeta}. \qquad /29/$$

Или, используя /28/, /27/,

$$W = -\frac{Q^2\omega_\infty^2 v_\infty}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \int_0^{\infty} dk i\kappa k\,|\bar{q}_{\kappa,k}|\,\frac{2(\gamma_\infty^2-1)(1+\kappa^2)}{[\kappa^2(\gamma_\infty^2-1)-1](k^2+\kappa^2+1)} \quad . \qquad /30/$$

Здесь Q –полный заряд сгустка. В /30/ вместо $q_{\varkappa,k}$ введена $\bar{q}_{\kappa,k} = \frac{e n_\infty \gamma_\infty}{Q\,\omega_\infty^3 k} q_{\kappa,k}$. Для точечного заряда $\bar{q}_{\kappa,k}$ обращается в единицу. В силу принципа причинности необходимо учесть бесконечно малую добавку к κ, поэтому

$$Im\,\frac{1}{\kappa^2(\gamma_\infty^2-1)-1} = \frac{\kappa}{|\kappa|}\,\pi\delta(\kappa^2(\gamma_\infty^2-1)-1). \qquad /31/$$

Интегрирование по κ дает

$$W = \frac{Q^2\omega_\infty^2}{v_\infty}\int_0^{\infty}\frac{k\,dk}{k^2+\frac{1}{v_\infty^2}}\,\Big|q_{\frac{1}{\gamma_\infty^2 v_\infty^2},k}\Big|^2 . \qquad /32/$$

Формфактор $|\bar{q}|^2$ обрезает k большие $k_{max} = \frac{1}{a\,\omega_\infty}$, где a –характерный размер заряда. В случае точечного заряда k_{max} выбирается из условия допустимости макроскопического описания. Для макроскопического заряда обычно считают $|\bar{q}_{\kappa,k}|^2$ равным единице до $k<k_{max}$, нулю при $k>k_{max}$.

Если выполнено условие когерентности $\frac{a\,\omega_\infty}{v_\infty} \ll 1$, то

$$W = \frac{Q^2\omega_\infty^2}{2v_\infty}\,\ln\frac{v_\infty^2}{a^2\omega_\infty^2} . \qquad /33/$$

Если условие когерентности не выполняется $\frac{a\,\omega_\infty}{v_\infty} \gg 1$

$$W \approx \frac{Q^2 v_\infty}{2a^2} . \qquad /34/$$

5. Увеличение заряда Q приводит к нелинейной зависимости работы сил W от Q^2. Рассмотрим случай, когда продольные размеры заряда удовлетворяют условию когерентности, тогда как поперечные значительно превосходят длину волны $\frac{v_\infty}{\omega_\infty}$. В этом случае заряд можно приближенно считать поверхностным и силу, приходящуюся на единицу поверхности, получить из рассмотрения задачи о возбуждении волн бесконечной плоскостью. Последняя задача становится одномерной. Линии тока остаются прямыми и, следовательно, $\chi = \frac{\rho^2}{2}$; $\frac{\partial\gamma}{\partial\rho} = 0$. Уравнение /21/ удовлетворяется тождественно, а /22/ приводится к виду, рассмотренному в работе/2/. Можно воспользоваться решениями, найденными в/2/. Перед заряженной плоскостью волна отсутствует, а за плоскостью имеем решение/2/. Амплитуда нелинейной волны может быть найдена из граничного условия $E_z = -4\pi\frac{Q}{S}$ при $\gamma = \gamma_\infty$, или

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\zeta} = \sqrt{\frac{4\pi Q^2}{S^2 n_\infty m}} \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_\infty \qquad /35/$$

Здесь S – площадь поверхности заряда. Из непрерывности следует, что на поверхности заряда $\gamma = \gamma_\infty$. Из /35/ находим амплитуду волны λ.

$$\lambda = 1 + \frac{2\pi Q^2}{S^2 m n_\infty}. \qquad /36/$$

Как показано в[/2/], многоскоростное течение в волне не возникает, если $\lambda < \gamma_\infty$. Таким образом наше рассмотрение ограничено условием

$$\frac{2\pi}{S^2 m n_\infty} \le \gamma_\infty - 1. \qquad /37/$$

Волна является нелинейной, если λ существенно больше единицы. В нерелятивистском пределе условие отсутствия многоскоростного течения /37/ автоматически приводит к линейности задачи. Это значит, что нелинейная задача в этом случае всегда соответствует "турбулизации" потока и возникновению т.н. бесстолкновительных "ударных" волн, /см. Сагдеев[/3/]/. В ультрарелятивистском пределе $\gamma_\infty \gg 1$ существует широкая область, в которой задача является нелинейной, но многоскоростное течение не возникает. Для нахождения потерь энергии достаточно найти увеличение энергии плазмы из-за наличия за зарядом нелинейных волн. Это увеличение на единицу пути и единицу поперечного сечения совпадает со средней плотностью энергии волн за зарядом в системе отсчета, в которой плазма перед волной покоится. Эта система совпадает /см.[/2/]/ с той, в которой средняя по периоду плотность импульса нелинейной волны, возникающей за зарядом, равна нулю. Это условие позволяет выразить среднюю плотность энергии $-\bar{T}_{44}$, и плотность импульса $\bar{T}_{11}$ в системе волны

$$\bar{T}_{44,\text{л}} = \frac{1}{1 + v_\infty^2} \left(\bar{T}_{44} + v_\infty^2 \bar{T}_{11} \right). \qquad /38/$$

Используя $\bar{T}_{44}$ и T_{11}, найденные в[/2/], получим

$$-T_{44,\text{л}} = 2/3 \frac{m n_\infty}{\sqrt{1-k^2}} \left\{ 2 - k^2 - 2(1-k^2) \frac{K(k)}{E(k)} \right\}, \qquad /39/$$

где K и E полные эллиптические интегралы, а k^2 из /36/ имеет вид

$$k^2 = \frac{2Q\sqrt{4\pi}}{S\sqrt{mn_\infty}} \frac{\sqrt{1 + \frac{\pi Q^2}{S^2 m n_\infty}}}{1 + \frac{4\pi Q^2}{m S^2 n_\infty} + \frac{Q\sqrt{4\pi}}{S\sqrt{mn_\infty}} \sqrt{1 + \frac{\pi Q^2}{S^2 m n_\infty}}}. \qquad /40/$$

Работа сил над зарядом есть $W = -\bar{T}_{44,\text{л}} v_\infty S$. В линейном приближении $k^2 \ll 1$, разложение эллиптических интегралов дает

$$W = \frac{4\pi Q^2 v_\infty}{S}. \qquad /41/$$

Этот результат совпадает с формулой некогерентных потерь /34/. В нелинейном случае зависимость от заряда дается /39/. В пределе $k^2 \to 1$ имеем

$$W = \frac{16}{3} \frac{Q^2 \pi v_\infty}{S} \qquad /42/$$

Отметим также, что если Q приближается к предельному значению, соответствующему знаку равенства в /37/, в плазме возбуждаются волны максимально возможной амплитуды.

6. Рассмотрим другой предельный случай, когда поперечные размеры налетающей плазмы и заряда значительно меньше длины волны $\frac{v_\infty}{\omega_\infty}$. Рассмотрим решение однородной системы /21/, /22/ вида $\gamma(\rho,\zeta) = \bar\gamma(\zeta)\phi(\rho)$. При малых ρ достаточно ограничиться первыми членами разложений по ρ. $\phi(\rho) = 1 - \beta\frac{\rho^2}{2}$ /член пропорциональный ρ отсутствует в силу требования конечности величины при $\rho \to 0$ /. Для χ оставим лишь первый член разложения по ρ^2 : $\chi = \frac{\rho^2}{2}\chi(\zeta)$. Из /21/, /22/ получим

$$-2\beta\frac{\bar\gamma}{\gamma_\infty} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\frac{\bar\gamma}{\gamma_\infty} = \frac{\bar\gamma}{\sqrt{\bar\gamma^2-1}}\cdot\frac{\sqrt{\gamma_\infty^2-1}}{\gamma_\infty} - 1 + \frac{\bar\gamma}{\sqrt{\bar\gamma^2-1}}\cdot\frac{\sqrt{\gamma_\infty^2-1}}{\gamma_\infty}(\bar\chi - 1) \qquad /43/$$

$$\bar\chi = 1 - \frac{2\beta\bar\gamma^2}{\sqrt{\bar\gamma^2-1}\cdot\sqrt{\gamma_\infty^2-1}} - \frac{\sqrt{\bar\gamma^2-1}}{\sqrt{\gamma_\infty^2-1}}\cdot\frac{1}{\bar\chi^2}\left(\frac{\partial\bar\chi}{\partial\zeta}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\sqrt{\bar\gamma^2-1}}{\sqrt{\gamma_\infty^2-1}}\frac{1}{\bar\chi}\frac{\partial\bar\chi}{\partial\zeta}\right). \qquad /44/$$

Предположим, что поперечные скорости v_r в волне малы и отбросим два последние члена в /44/. Тогда

$$\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\frac{\bar\gamma}{\gamma_\infty} = \frac{\bar\gamma}{\sqrt{\bar\gamma^2-1}}\cdot\frac{\sqrt{\gamma_\infty^2-1}}{\gamma_\infty} - 1 - \frac{2\beta\bar\gamma}{\gamma_\infty(\bar\gamma^2-1}. \qquad /45/$$

Уравнение /45/ имеет первый интеграл. Когда /45/ имеет волновые решения, среднее по периоду от левой части /45/ равно нулю: $< \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\frac{\bar\gamma}{\gamma_\infty} > = 0$. . Если мы потребуем, чтобы средний за период заряд на стержне был равен нулю, то $\beta = 0$, т.к. плотность заряда отличается от правой части /45/ на $-2\beta\frac{\bar\gamma}{\bar\gamma_\infty}$, а $<\bar\gamma> \neq 0$. Т.о. задача приводится к одномерной и может быть решена так же, как в предыдущем пункте.

7. Из-за сложности уравнений /21/, /22/ вопрос о движении заряженного сгустка можно поставить иначе. Рассматривать как известную, например, функцию тока $\chi(\rho,\zeta)$. Тогда /21/ представится как квазилинейное уравнение 1-ого порядка относительно величины $\gamma(\rho,\zeta)$, а из /22/ простым дифференцированием определится $q(\rho,\zeta)$ – распределение заряда, которое создает данную картину обтекания. Если за исходную величину принять $\gamma(\rho,\zeta)$, то /21/ оказывается квазилинейным уравнением 2-го порядка относительно $\chi(\rho,\zeta)$, а /22/ определит распределение $q(\rho,\zeta)$.

В качестве примера рассмотрим, каким случаям обтекания соответствует связь между χ и γ следующего вида:

$$\sqrt{\gamma^2-1} = \frac{1}{\rho}\sqrt{\gamma_\infty^2-1}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial\chi}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\right)^2}, \qquad /46/$$

/21/, /22/ принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\chi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\chi}{\partial\zeta^2} = \frac{1}{\rho}\left(\chi - \frac{\rho^2}{2}\right). \qquad /47/$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\gamma}{\gamma_\infty}\right)\right]+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left(\frac{\gamma}{\gamma_\infty}\right)=\frac{\gamma}{\gamma_\infty}-1-q(\rho,\zeta). \qquad /48/$$

Из /47/ находим χ в общем виде:

$$\chi=\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[C_1(\kappa)\,J_1(\rho\sqrt{\kappa^2+1})+C_2(\kappa)\,K(\rho\sqrt{\kappa^2+1})\right]e^{i\kappa\zeta}\,d\kappa, \qquad /49/$$

где $C_1(\kappa)$, $C_2(\kappa)$ — произвольные коэффициенты. После выбора C_1, C_2 /46/ дает выражение для γ, а из /48/ находится распределение q. Например, положив $C_1=0$, $C_2=S_0\sqrt{\kappa^2+1}$, из /49/ получим

$$\chi=\frac{\rho^2}{2}+S_0\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}, \qquad /50/$$

$\Psi=\dfrac{e^{-\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}$ /51/, S_0 – безразмерная константа. Из /46/ находим /51/

$$\gamma=\left\{(\gamma_\infty^2-1)\left[\left(1-S_0\Psi\frac{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}+1}{\rho^2+\zeta^2}+S_0\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2}\right)^2+S_0^2\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\,\partial\zeta}\right)^2\right]+1\right\}^{1/2}, \qquad /52/$$

Для q из /48/ получается довольно громоздкое выражение, чётное относительно ζ и экспоненциально убывающее при $\zeta\to\infty$ и при $\rho\to\infty$. При одновременном устремлении $\zeta\to0$, $\rho\to0$ функция эта имеет особенность. Однако можно показать, что "полный заряд" $\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}q(\rho,\zeta)\,\rho\,d\rho\,d\zeta$ является конечной величиной. Таким образом можно считать, что распределение $q(\rho,\zeta)$ описывает заряд, локализованный около начала координат. Знак заряда определяется знаком S_0. Формулы /50/, /51/, /52/ являются нелинейным решением задачи обтекания такого заряда плазмой.

Авторы искренне признательны В.И.Векслеру за постоянное внимание и многочисленные обсуждения.

Литература

1. В.Н.Цытович. ЖЭТФ № 5, 1961.
2. В.Н.Цытович. ДАН 142, №63, 1962.
3. Р.З.Сагдеев. Сборник "Физика плазмы и проблема упр. терм. реакций" т.3, стр.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 ноября 1962 г.