1106

3
3-67

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

И.С. Златев, А.В. Николов

Р-1106

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ АМПЛИТУДЫ ФЕЙНМАНА I

Дубна 1962 г.

И.С. Златев*, А.В. Николов*

Р-1106

1171/3 кр.

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ АМПЛИТУДЫ ФЕЙНМАНА I

* Софийский Государственный Университет

Резюме

На основе предварительно разработанного удобного представления амплитуды Фейнмана, соответствующей произвольной сильно связной диаграмме с отрицательным индексом, сделано несколько первых шагов по пути реализации намеченной в работе программы /подсказанной нам работами /3/ и /5/ / по нахождению сингулярностей такой амплитуды. Упомянутое представление основывается на обоснованной в Приложении технике интегрирования по независимым внутренним импульсам и на удобной "диаграмной технике", которая, со своей стороны, основывается на введенных в работе квазидиаграммах. С помощью этого прадставления установлено, например, что когда число независимых импульсов не меньше 3, аппарат так называемых результантных форм не может послужить для нахождения сингулярностей - что заранее не ясно; точнее, хотя на первый взгляд кажется, что исследование можно провести с помощью этого аппарата, на деле оказывается, что необходимо искать более мощные средства /или вполне изменить программу/. Исследования в этом направлении будут продолжены в последующей работе.

1.

Пусть дана произвольная сильно связная диаграмма Фейнмана G с n узлами /т. е. диаграмма порядка n/ и с l внутренними линиями, которые мы будем считать ориентированными; внешние линии мы будем также считать ориентированными и при том так, чтобы они были "входящими". Для простоты мы будем предполагать, что в каждом узле G сходятся 3 и только 3 линии. Будем считать, конечно, что узлы и внутренние линии G занумерованы некоторым способом /независимо одни от других/. Обозначим через k_ν внутренний импульс, соответствующий линии с номером ν, $\nu=1,\dots,l$, а через p_i внешний импульс, соответствующий узлу с номером i, $i=1,\dots,n$ /конечно, некоторые из внешних импульсов могут быть нулями, а другие из них могут являться суммами из нескольких слагаемых/. Закон сохранения импульса в каждом узле G можно записать в виде

/1.1/ $$\sum_{\nu=1}^{l} e_{i\nu} k_\nu = p_i\,,\ i=1,\dots,n,$$

где

/1.2/ $$e=\begin{Vmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{n1} & \cdots & e_{nl} \end{Vmatrix}$$

– матрица инцидентности G, введенная Логуновым, Тодоровым и Черниковым/2/. Как они обратили внимание, в каждом столбце e два и только два элемента отличны от нуля, при чем один из них равен 1, а другой равен -1, так что

/1.3/ $$\sum_{i=1}^{n} e_{i\nu} = 0,\ \nu=1,\dots,l.$$

Из этого с помощью /1.1/ легко получается

/1.4/ $$\sum_{i=1}^{n} p_i = 0.$$

Кроме того соотношения /1.3/ показывают, что строки матрицы e линейно зависимы. Следовательно, ранг r матрицы e, который равен/6/ максимальному числу линейно независимых ее строк, меньше числа ее строк: $r \leqslant n-1$. Можно доказать[ж], что $r=n-1$. Это означает, что существует отличный от нуля минор e ранга $n-1$ /а все миноры e ранга n равны нулю/. Без ограничения общности можно считать, что именно

/1.5/ $$\begin{vmatrix} e_{1,f+1} & \cdots & e_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{n-1,f+1} & \cdots & e_{n-1,l} \end{vmatrix} \neq 0,$$

где

/1.6/ $$f = l-n+1.$$

Положим:

/1.7/ $$E'=\begin{Vmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1f} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{n-1,1} & \cdots & e_{n-1,l} \end{Vmatrix},\quad E''=\begin{Vmatrix} e_{1,f+1} & \cdots & e_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{n-1,f+1} & \cdots & e_{n-1,l} \end{Vmatrix},\quad E=\begin{Vmatrix} E' & E'' \end{Vmatrix}$$

/очевидно, что E'' является $(n-1)\times(n-1)$-матрицей; обратим внимание на то, что, согласно /1.2/, E получается из e устранением ее последней строки/.

[ж]См. приложение I.

Согласно /1.5/ и /1.7/, матрица E'' регулярна, т. е. $(E'')^{-1}$ существует. Из этого следует, что блочная матрица $\begin{Vmatrix} I & 0 \\ E' & E'' \end{Vmatrix}$, где I - единичная $f\times f$-матрица, также регулярна и

/1.8/ $$\begin{Vmatrix} I & 0 \\ E' & E'' \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} I & 0 \\ -(E'')^{-1}E' & (E'')^{-1} \end{Vmatrix}.$$

Покажем, что одно - например последнее - из уравнений /1.1/ является следствием остальных; действительно, с помощью /1.3/, /1.4/ и первых $n-1$ из уравнений /1.1/ мы получаем

$$\sum_{\nu=1}^{l} e_{n\nu}k_\nu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{l} e_{i\nu}k_\nu - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{l} e_{i\nu}k_\nu = \sum_{\nu=1}^{l} k_\nu \sum_{i=1}^{n} e_{i\nu} - \sum_{i=1}^{n-1} p_i = p_n .$$

Поэтому мы в праве рассматривать только систему первых $n-1$ из уравнений /1.1/. Очевидно, что минор /1.5/ является главным определителем этой системы. Следовательно, ее можно решить относительно $k_{f+1},\dots,k_l$ и это решение дает выражение для $k_{f+1},\dots,k_l$ в виде линейных функций от $p_1,\dots,p_{n-1}$ и $k_1,\dots,k_f$, при чем значения $k_1,\dots,k_f$ остаются совершенно произвольными /это утверждение является следствием известной теоремы Руше из линейной алгебры; точнее, имеем в виду "векторный вариант" теоремы, т. е. случай, когда неизвестные в системе линейных уравнений являются векторами/. Итак, чтобы решить систему /1.1/, достаточно решить лишь первые $n-1$ из ее уравнений относительно $k_{f+1},\dots,k_l$, при чем в этой системе вместо $k_1,\dots,k_f$ можно поставить произвольные /векторные/ параметры. Обозначив, как в /2/, эти параметры соответственно через $t_1,\dots,t_f$, мы можем написать

$$\left|\begin{array}{l} \sum_{\nu=1}^{l} \delta_{i\nu}k_\nu = t_i \, , \; i=1,\dots,f \\ \sum_{\nu=1}^{l} e_{i-f,\nu}k_\nu = p_{i-f} \, , \; i=f+1,\dots,l \end{array}\right.$$

/вторая группа равенств - это система первых $n-1$ из уравнений /1.1/, так как при $f+1 \leq i \leq l$ мы имеем, согласно /1.6/, $1 \leq i-f \leq n-1$/. С помощью матриц /1.7/ получаем более компактную запись этих соотношений:

/1.9/ $$\begin{Vmatrix} I & 0 \\ E' & E'' \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} k' \\ k'' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} t \\ p \end{Vmatrix},$$

где

/1.10/ $$k' = \begin{Vmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_f \end{Vmatrix}, \quad k'' = \begin{Vmatrix} k_{f+1} \\ \vdots \\ k_l \end{Vmatrix}, \quad t = \begin{Vmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_f \end{Vmatrix}, \quad p = \begin{Vmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{Vmatrix}.$$

Умножив /1.9/ слева на $\begin{Vmatrix} I & 0 \\ E' & E'' \end{Vmatrix}^{-1}$ и принимая во внимание /1.8/, мы получаем

$$\begin{Vmatrix} k' \\ k'' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} t \\ -(E'')^{-1}E't + (E'')^{-1}p \end{Vmatrix},$$

т. е.

/1.11/ $$\begin{vmatrix} k' = t - q' \\ k'' = -(E'')^{-1}E't - q'' \end{vmatrix},$$

где q' - нулевая /векторная/ $f \times 1$-матрица и

/1.12/ $$q'' = -(E'')^{-1}p,$$

т. е. q'' является $(n-1) \times 1$-матрицей. Другими словами, q' и q'' имеют вид:

/1.13/ $$q' = \begin{Vmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \end{Vmatrix}, \; q_1 = \cdots = q_f = 0, \; q'' = \begin{Vmatrix} q_{f+1} \\ \vdots \\ q_l \end{Vmatrix}$$

/здесь мы приняли еще раз во внимание, что, согласно /1.6/, $n-1 = l-f$/. Наконец, положив

/1.14/ $$k = \begin{Vmatrix} k' \\ k'' \end{Vmatrix}, \quad q = \begin{Vmatrix} q' \\ q'' \end{Vmatrix}$$

и

/1.15/ $$F = \begin{Vmatrix} I \\ -(E'')^{-1}E' \end{Vmatrix}$$

/F является $l \times f$-матрицей/, из /1.11/ получаем

/1.16/ $$k = Ft - q.$$

Согласно /1.2/, /1.7/ и /1.15/, F определяется /однозначно/ матрицей инцидентности e. Что касается q, то для ее определения, т. е. согласно /1.13/ и /1.14/ - для определения векторов $q_1, \ldots, q_l$, мы дадим удобную "диаграммную технику". Однако, перед этим мы дадим несколько определений. Будем называть векторные параметры $t_1, \dots, t_f$ СВОБОДНЫМИ /НЕЗАВИСИМЫМИ/ ИМПУЛЬСАМИ диаграммы $\check{G}_{n}$, а внутренние линии $\check{G}$ с номерами $1,\dots,f$ - ее СВОБОДНЫМИ ЛИНИЯМИ; в связи с этим будем называть число f - определяемое /1.6/ - ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ диаграммы G.

Покажем теперь, что векторы $q_1, \dots, q_l$ удовлетворяют уравнениям

/1.17/ $$\sum_{\nu=1}^{l} \varepsilon_{i\nu} q_\nu = -p_i \, , \; i=1,\dots,n.$$

Для этой цели заметим прежде всего, что, согласно /1.10/, /1.13/ и /1.14/,

$$k = \left\| \begin{matrix} k_1 \\ \vdots \\ k_l \end{matrix} \right\|, \quad q = \left\| \begin{matrix} q_1 \\ \vdots \\ q_l \end{matrix} \right\|.$$

Следовательно, равенству /1.16/ можно придать вид:

$$\left\| \begin{matrix} k_1 \\ \vdots \\ k_l \end{matrix} \right\| = Ft - \left\| \begin{matrix} q_1 \\ \vdots \\ q_l \end{matrix} \right\|.$$

Из вышесказанного следует, что при любом выборе t последнее равенство определяет решение $k_1, \dots, k_l$ системы /1.1/. Положив в нем $t=0$, мы убеждаемся, что система векторов $-q_1, \dots, -q_l$ является одним из возможных решений. Подставляем это решение в /1.1/ и получаем /1.17/. Итак, внутренней линии G с номером ν мы сопоставили вектор q_ν, $\nu=1,\dots,l$, при чем, согласно /1.13/, $q_\nu = 0$, $\nu=1,\dots,f$; эти векторы удовлетворяют, как мы только-что показали, уравнениям /1.17/ и вполне определяются ими /точнее, на основании этих уравнений $q_1, \dots, q_l$ могут быть однозначно выражены в виде линейных функций от $p_1, \dots, p_{n-1}$/[ж]. Будем называть векторы $q_1, \dots, q_l$

[ж]Действительно, записывая первые $n-1$ из уравнений /1.17/ в компактном виде

$$Eq = -p$$

и принимая во внимание, что, согласно /1.7/, /1.13/ и /1.14/,

$$Eq = E'q' + E''q'' = E''q''$$

сразу получаем /1.12/. Этим мы показали, что q'' вполне определяется уравнениями /1.17/. Тогда из /1.13/ и /1.14/ следует, что то же самое можно сказать и о q, т. е. о $q_1, \dots, q_l$.

КВАЗИИМПУЛЬСАМИ диаграммы G. Сравнение /1.17/ и /1.1/ дает нам основание утверждать, что мы получили своего рода "закон сохранения квазиимпульса" в каждом узле G; при этом надо помнить, что $q_\nu = 0$, $\nu=1,\dots,f$ и что внешние импульсы изменяют свой знак. Сказанное можно редактировать более точно так: устранением свободных линий и переменой ориентации внешних линий /все остальное сохраняется - например сохраняются остальные внутренние линии и их ориентация/ из G получается новая диаграмма $\mathfrak{g}$; для каждого узла $\mathfrak{g}$ записывается "закон сохранения квазиимпульса" /соотношения типа $q_\nu = 0$, $\nu=1,\dots,f$ автоматически отчитываются устранением свободных линий!/; таким образом получаются explicitum уравнения /1.17/, которыми, как мы отметили выше, все квазиимпульсы вполне определяются. В том и состоит техника определения квазиимпульсов. Как мы видим, она основывается на вспомагательной диаграмме $\mathfrak{g}$, которую мы будем называть КВАЗИДИАГРАММОЙ ФЕЙНМАНА, соответствующей диаграмме Фейнмана G.

Квазидиаграммы могут быть использованы и для других целей - например для быстрого и удобного вычисления элементов основной матрицы $(E'')^{-1}$ или для доказательства интересного утверждения, что система свободных линий G состоит из таких и только таких внутренних линий G, перерезание которых не нарушает связность G. Все это, однако, мы пока оставим в стороне.

2.

Пусть теперь диаграмма G такая, что для нее $l > 2f$ /можно показать, что для диаграмм рассматриваемого типа, у которых не меньше 3 узлов - т. е. у которых $n \geq 3$ - и не меньше 2 вершин*, это неравенство выполняется, так что оно выполняется во всех более интересных случаях; чтобы не перегружать изложение, мы не будем входить в детали по этому вопросу/. Обратим внимание, что неравенство $l > 2f$ эквивалентно неравенству $\omega(G)<0$,

---

*Под "вершиной", как обычно, подразумеваем внешний узел диаграммы.

где $\omega(G)$ - индекс диаграммы G /1/. Для простоты будем считать, что причинные функции Δ_ν^c, $\nu=1,\dots,l$, соответствующие внутренним линиям G, являются причинными функциями "скалярного типа":

$$\Delta_\nu^c = \frac{1}{m_\nu^2 - k_\nu^2 - i\varepsilon}, \quad \nu = 1,\dots,l,$$

где m_ν - масса, соответствующая линии с номером ν, $\nu=1,\dots,l$. Тогда, как обратили внимание Polkinghorne и Screaton /3/, вклад J_G диаграммы G в пертурбационном ряде /т. е. соответствующая G амплитуда Феймана J_G/ имеет, с точностью до постоянного множителя, следующий вид:

/2.1/
$$J_G = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^1 d\alpha_1\dots d\alpha_l \int d^4t_1\dots d^4t_f \frac{\delta\left(\sum_{\nu=1}^{l}\alpha_\nu - 1\right)}{[Q(\alpha,q,t)+i\varepsilon]^l},$$

где $\alpha_1,\dots,\alpha_l$ - так называемые параметры Феймана, а $\alpha = \left\|\begin{matrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_l\end{matrix}\right\|$ и где

/2.2/
$$Q(\alpha,q,t) = \sum_{\nu=1}^{l}\alpha_\nu(k_\nu^2 - m_\nu^2);$$

здесь $k_1,\dots,k_l$ определяются соотношением /1.16/, т. е., согласно /1.10/, /1.13/ и /1.14/,

/2.3/
$$k_\nu = \sum_{i=1}^{f} F_{\nu i} t_i - q_\nu, \quad \nu = 1,\dots,l.$$

Интегрированием по $t_1,\dots,t_f$ из /2.1/ получается /3/

/2.4/
$$J_G = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^1 d\alpha_1\dots d\alpha_l \frac{\varphi(\alpha)\,\delta\left(\sum_{\nu=1}^{l}\alpha_\nu - 1\right)}{[Q'(\alpha,q)+i\varepsilon]^{l-2f}},$$

где $\varphi(\alpha)$ является рациональной функцией от $\alpha_1,\dots,\alpha_l$, а $Q'(\alpha,q)$ получается /3/ из $Q(\alpha,q,t)$ заменой $t_1,\dots,t_f$ на решение $t_1(\alpha,q),\dots,t_f(\alpha,q)$ системы уравнений

/2.5/
$$\frac{\partial Q}{\partial t_i} = 0, \quad i = 1,\dots,f$$

/в которых неизвестными считаются $t_1,\dots,t_f$/.*

---

*См. приложение II. Напомним, что по сделанному выше предположению наряду с /2.4/ мы имеем $l > 2f$ - при этом именно предположении в приложении II обоснована рецептура получения $Q'(\alpha,q)$ из $Q(\alpha,q,t)$.

Исследуем более детально вид $Q'(\alpha, q)$. Подставляя /2.3/ в /2.2/, получаем

/2.6/
$$Q=\sum_{i,j=1}^{f} a_{ij} t_i t_j - 2\sum_{i=1}^{f} b_i t_i + c,$$

где

/2.7/
$$\left| \begin{aligned} & a_{ij}=\sum_{\nu=1}^{l}\alpha_\nu F_{\nu i} F_{\nu j}, \ i,j=1,\dots,f \\ & b_i=\sum_{\nu=1}^{l}\alpha_\nu F_{\nu i} q_\nu, \ i=1,\dots,f \\ & c=\sum_{\nu=1}^{l}\alpha_\nu (q_\nu^2-m_\nu^2) \end{aligned} \right. .$$

Тогда на основании /2.5/ и /2.6/ нетрудно установить[2], что

/2.8/
$$Q'=\frac{D_0}{D_1},$$

где

/2.9/
$$D_0=\begin{vmatrix} c & b_1 & \cdots & b_f \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1f} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_f & a_{f1} & \cdots & a_{ff} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1f} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{f1} & \cdots & a_{ff} \end{vmatrix}.$$

Из /2.7/, /2.8/ и /2.9/ ясно, что Q' является функцией от α и q, причем Q' зависит от $q_1,\dots,q_l$ посредством скалярных произведений $q_\mu q_\nu$, $\mu,\nu=1,\dots,l$. Так как, согласно /1.17/, $q_1,\dots,q_l$ являются линейными функциями от $p_1,\dots,p_{n-1}$, то из только-что сказанного становится ясным, что Q' можно рассматривать как функции от α и p, при чем Q зависит от $p_1,\dots,p_{n-1}$ посредством скалярных произведений $p_i p_j$, $i,j=1,\dots,n-1$. Другими словами, можем считать, что Q' является функцией от α и Z, где $Z=\|Z_{ij}\|$, а $Z_{ij}=p_i p_j$, $i,j=1,\dots,n-1$.

Мы будем предполагать, как и Polkinghorne и Screaton[3], что подходящая процедура регуляризации обеспечивает сходимость интеграла J_G, определяемого /2.4/, который, согласно сказанному, является функцией от Z: $J_G=J_G(Z)$ /очевидно, что эти слова нуждаются в уточнении, но пока мы оставим в стороне детальное рассмотрение этого вопроса/. Polkinghorne и

Screeton исследовали аналитическое продолжение этой функции - первоначально определенной для вещественных z - в комплексной области. Они установили, что ее можно аналитически продолжить для всех значений z, для которых не выполняются соотношения

$$\text{/2.10/} \qquad \left| \begin{array}{l} \text{либо } \alpha_\nu = 0 \\ \text{либо } \dfrac{\partial Q'}{\partial \alpha_\nu} = 0 \end{array} \right. , \quad \nu = 1, \ldots, l,$$

т. е., другими словами, $J_G(z)$ может иметь сингулярности лишь при условии, что выполняются эти соотношения; при этом в /2.10/ $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ считаются комплексными переменными /здесь мы не будем впускаться в детали и по вопросу об обосновании соотношений /2.10/ - наша главная цель в настоящей работе будет попытка получить дальнейшие результаты на основании этих соотношений/. Точнее, Polkinghorne и Screeton установили, что к /2.10/ надо прибавить и условие $\sum_{\nu=1}^{l} \alpha_\nu = 1$, а также и условие, требующее появления - в процессе аналитического продолжения $J_G(z)$ - "защипнутых" /"pinched"/ контуров интегрирования /см. [3]/, а эти дополнительные ограничения могут сузить совокупность случаев, в которых $J_G(z)$ может иметь сингулярности. Ясно, однако, что значения z, для которых $J_G(z)$ имеет сингулярности, находятся среди тех значений z, для которых выполнены соотношения /2.10/; назовем первые значения z ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ СИНГУЛЯРНОСТЯМИ, а вторые - ЭВЕНТУАЛЬНЫМИ СИНГУЛЯРНОСТЯМИ. Естественным образом водникает следующая программа для дальнейших действий: прежде всего отыскать совокупность эвентуальных сингулярностей, потом сузить ее с помощью упомянутых выше условий и, наконец, извлечь из нее совокупность действительных сингулярностей. По подобной программе работает и Tarski[5], который, однако, ограничивается рассмотрением только диаграмм с одной степенью свободы; для таких диаграмм он получает интересные и довольно полные результаты. В настоящей работе мы сделаем несколько первых шагов по пути реализации намеченной программы для диаграмм с произвольным числом степеней свободы.

Нетрудно установить с помощью /2.7/, /2.8/ и /2.9/, что Q' является однородной функцией первой степени относительно $\alpha_1,\dots,\alpha_l$; следовательно, согласно известной теореме Эйлера, мы будем иметь

$$Q' = \sum_{\nu=1}^{l} \alpha_\nu \frac{\partial Q'}{\partial \alpha_\nu}$$

так что, согласно /2.10/, $Q'=0$ для эвентуальных сингулярностей. Тогда, принимая во внимание, что в силу /2.8/

$$\frac{\partial D_0}{\partial \alpha_\nu} = \frac{\partial Q'}{\partial \alpha_\nu} D_1 + Q' \frac{\partial D_1}{\partial \alpha_\nu}, \quad \nu = 1,\dots,l,$$

мы убеждаемся с помощью /2.10/, что для эвентуальных сингулярностей выполняются соотношения

$$\left| \begin{array}{l} \text{либо} \quad \alpha_\nu = 0 \\ \text{либо} \quad \dfrac{\partial D_0}{\partial \alpha_\nu} = 0 \end{array} \right. , \quad \nu = 1,\dots,l.$$

Будем говорить, что имеем /эвентуальную/ сингулярность типа $C^k E^{n-k}$, если выполнены k из второй группы соотношений /2.10/, соответственно из второй группы последних соотношений и, значит, $n-k$ из первой группы /подобное определение дает и Tarski[5]; по существу наше определение эквивалентно данному им/. Для простоты ограничимся рассмотрением лишь /эвентуальных/ сингулярностей типа $C^l E^0$; аналогичным образом рассматриваются и остальные типы /что даже проще, чем рассмотрение типа $C^l E^0$, потому что число уравнений и участвующих в них неизвестных уменьшается/. Обратим внимание на то, что, раз мы рассматриваем лишь тип $C^l E^0$, то можно без ограничения общности считать, что $\alpha_\nu \neq 0$, $\nu=1,\dots,l$, так как в противном случае оказывается, что мы имеем дело с другим, "более низшем", типом. Итак, из последних соотношений в частности - для типа $C^l E^0$ - получаем

/2.11/ $$\frac{\partial D_0}{\partial \alpha_\nu} = 0, \ \nu = 1,\dots,l, \quad \alpha_\nu \neq 0, \ \nu = 1,\dots,l,$$

т. е. интересующие нас значения λ должны быть прежде всего такими, чтобы существовало ненулевое решение системы уравнений /2.11/ относительно $\alpha_1,\dots,\alpha_l$. Согласно сказанному выше, имеется в виду решение в поле комплексных чисел.

3.

Приступаем к более детальному исследованию вида D_0 и $\frac{\partial D_0}{\partial \alpha_\nu}$, $\nu=1,\dots,l$. На основании последнего из соотношений /2.7/ и соотношения /2.9/ получаем

$$D_0 = D - \sum_{\nu=1}^{l} \alpha_\nu m_\nu^2 D_1, \tag{3.1}$$

где

$$D = \begin{vmatrix} d & b_1 & \dots & b_f \\ b_1 & a_{11} & \dots & a_{1f} \\ \hdotsfor{4} \\ b_f & a_{f1} & \dots & a_{ff} \end{vmatrix}, \quad d = \sum_{\nu=1}^{l} \alpha_\nu q_\nu^2. \tag{3.2}$$

На основании же последнего результата и первых двух групп из соотношений /2.7/ получаем

$$D = \begin{vmatrix} \sum\limits_{\nu_0=1}^{l} \alpha_{\nu_0} q_{\nu_0}^2 & \sum\limits_{\nu_0=1}^{l} \alpha_{\nu_0} F_{\nu_0 1} q_{\nu_0} & \dots & \sum\limits_{\nu_0=1}^{l} \alpha_{\nu_0} F_{\nu_0 f} q_{\nu_0} \\ \sum\limits_{\nu_1=1}^{l} \alpha_{\nu_1} F_{\nu_1 1} q_{\nu_1} & \sum\limits_{\nu_1=1}^{l} \alpha_{\nu_1} F_{\nu_1 1} F_{\nu_1 1} & \dots & \sum\limits_{\nu_1=1}^{l} \alpha_{\nu_1} F_{\nu_1 1} F_{\nu_1 f} \\ \hdotsfor{4} \\ \sum\limits_{\nu_f=1}^{l} \alpha_{\nu_f} F_{\nu_f f} q_{\nu_f} & \sum\limits_{\nu_f=1}^{l} \alpha_{\nu_f} F_{\nu_f f} F_{\nu_f 1} & \dots & \sum\limits_{\nu_f=1}^{l} \alpha_{\nu_f} F_{\nu_f f} F_{\nu_f f} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{\nu_i=1 \\ i=0,\dots,f}}^{l} \prod_{j=0}^{f} \alpha_{\nu_j} \cdot q_{\nu_0} \prod_{k=1}^{f} F_{\nu_k k} \begin{vmatrix} q_{\nu_0} & F_{\nu_0 1} & \dots & F_{\nu_0 f} \\ q_{\nu_1} & F_{\nu_1 1} & \dots & F_{\nu_1 f} \\ \hdotsfor{4} \\ q_{\nu_f} & F_{\nu_f 1} & \dots & F_{\nu_f f} \end{vmatrix},$$

т. е.

$$D = \sum_{\substack{\nu_i=1 \\ i=0,\dots,f}}^{l} \prod_{j=0}^{f} \alpha_{\nu_j} \cdot q_{\nu_0} \prod_{k=1}^{f} F_{\nu_k k} F^{\nu_0 \dots \nu_f}(q), \tag{3.3}$$

где

$$/3.4/ \qquad F^{\nu_0\cdots\nu_f}(q)=\begin{vmatrix} q_{\nu_0} & F_{\nu_0 1} & \cdots & F_{\nu_0 f} \\ q_{\nu_1} & F_{\nu_1 1} & \cdots & F_{\nu_1 f} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{\nu_f} & F_{\nu_f 1} & \cdots & F_{\nu_f f} \end{vmatrix}, \ \nu_i=1,\dots,l,\ i=0,\dots,f.$$

Аналогичным образом /использованием второго из соотношений /2.9/ - вместо /3.2/ - и первой группы из соотношений /2.7// получается

$$/3.5/ \qquad D_1=\sum_{\substack{\nu_i=1\\ i=1,\dots,f}}^{l}\prod_{j=1}\alpha_{\nu_j}\prod_{k=1}^{f}F_{\nu_k k}F^{\nu_1\cdots\nu_f},$$

где

$$/3.6/ \qquad F^{\nu_1\cdots\nu_f}=\begin{vmatrix} F_{\nu_1 1} & \cdots & F_{\nu_1 f} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{\nu_f 1} & \cdots & F_{\nu_f f} \end{vmatrix}, \ \nu_i=1,\dots,l,\ i=1,\dots,f.$$

Как нетрудно показать, из /3.4/ следует, что

$$/3.7/ \qquad \varepsilon_{h_0\cdots h_f}F^{\nu_0\cdots\nu_f}(q)=\varepsilon^2_{h_0\cdots h_f}F^{\nu_{h_0}\cdots\nu_{h_f}}(q),\ \nu_i,\nu_{h_i}=1,\dots,l,\ i=0,\dots,f,$$

где числа $h_0,\dots,h_f$ выбраны произвольным образом среди чисел $0,\dots,f$ и где $\varepsilon_{h_0\cdots h_f}\neq 0$ лишь при условии, что числа $h_0,\dots,h_f$ образуют перестановку чисел $0,\dots,f$, при чем $\varepsilon_{h_0\cdots h_f}=+1$, если эта перестановка четная и $\varepsilon_{h_0\cdots h_f}=-1$, если она нечетная. Принимая во внимание, что, согласно /3.4/,

$$F^{\nu_0\cdots\nu_f}(q)=\sum_{\substack{h_g=0\\ g=0,\dots,f}}^{f}\varepsilon_{h_0\cdots h_f}q_{\nu_{h_0}}\prod_{k=1}^{f}F_{\nu_{h_k}k}\ ,\ \nu_i=1,\dots,l,\ i=0,\dots,f,$$

с помощью /3.3/ и /3.7/ получаем

$$\sum_{\substack{\nu_i=1\\ i=0,\dots,f}}^{l}\prod_{j=0}^{f}\alpha_{\nu_j}F^{\nu_0\cdots\nu_f}(q)F^{\nu_0\cdots\nu_f}(q)=\sum_{\substack{\nu_i=1\\ i=0,\dots,f}}^{l}\prod_{j=0}^{f}\alpha_{\nu_j}\sum_{\substack{h_g=0\\ g=0,\dots,f}}^{f}q_{\nu_{h_0}}\prod_{k=1}^{f}F_{\nu_{h_k}k}\cdot\varepsilon_{h_0\cdots h_f}F^{\nu_0\cdots\nu_f}(q)=$$

$$=\sum_{\substack{h_g=0\\ g=0,\dots,f}}^{f}\sum_{\substack{\nu_i=1\\ i=0,\dots,f}}^{l}\prod_{j=0}^{f}\alpha_{\nu_j}\cdot q_{\nu_{h_0}}\prod_{k=1}^{f}F_{\nu_{h_k}k}\cdot\varepsilon^2_{h_0\cdots h_f}F^{\nu_{h_0}\cdots\nu_{h_f}}(q)=$$

$$=\sum_{\substack{h_g=0\\ g=0,\dots,f}}^{f}\varepsilon^2_{h_0\dots h_f}\sum_{\substack{\nu_{h_i}=1\\ i=0,\dots,f}}^{l}\prod_{j=0}^{f}\alpha_{\nu_{h_j}}\cdot q_{\nu_{h_0}}\prod_{k=1}^{f}F_{\nu_{h_k}k}\cdot F^{\nu_{h_0}\dots\nu_{h_f}}(q)^{*}=$$

$$=\sum_{\substack{h_g=0\\ g=0,\dots,f}}^{f}\varepsilon^2_{h_0\dots h_f}\sum_{\substack{\nu_i=1\\ i=0,\dots,f}}^{l}\prod_{j=0}^{f}\alpha_{\nu_j}\cdot q_{\nu_0}\prod_{k=1}^{f}F_{\nu_k k}F^{\nu_0\dots\nu_f}(q)^{**}=\sum_{\substack{h_g=0\\ g=0,\dots,f}}^{f}\varepsilon^2_{h_0\dots h_f}D=(f+1)!\,D^{***}.$$

Итак,

$$/3.8/\qquad D=\frac{1}{(f+1)!}\sum_{\substack{\nu_i=1\\ i=0,\dots,f}}^{l}D^{\nu_0\dots\nu_f}(q)\prod_{j=0}^{f}\alpha_{\nu_j},\quad D^{\nu_0\dots\nu_f}(q)=\left[F^{\nu_0\dots\nu_f}(q)\right]^2,\ \nu_i=1,\dots,l,\ i=0,\dots,f.$$

Аналогичным образом /использованием /3.5/ и /3.6/ вместо /3.3/ и /3.4// получается

$$/3.9/\qquad D_1=\frac{1}{f!}\sum_{\substack{\nu_i=1\\ i=1,\dots,f}}^{l}D^{\nu_1\dots\nu_f}\prod_{j=1}^{f}\alpha_{\nu_j},\quad D^{\nu_1\dots\nu_f}=\left(F^{\nu_1\dots\nu_f}\right)^2,\ \nu_i=1,\dots,l,\ i=1,\dots,f.$$

Ясно, что D и D_1 являются формами степени соответственно $f+1$ и f от $\alpha_1,\dots,\alpha_l$, при чем коэффициенты этих форм - как нетрудно установить с помощью /3.4/ и /3.8/, соответственно /3.6/ и /3.9/ - являются симметрическими функциями от $\nu_0,\dots,\nu_f$, соответственно $\nu_1,\dots,\nu_f$; другими словами, по существу мы произвели симметрирование D и D_1. Это симметрирование облегчит нижеследующие рассуждения.

---

*Конечно, символ $\sum\limits_{\substack{\nu_{h_i}=1\\ i=0,\dots,f}}^{l}$ не лишен смысла лишь при условии, что числа $h_0,\dots,h_f$ образуют перестановку чисел $0,\dots,f$; это условие, однако, в нашем случае выполняется, так как в самой внешней сумме /из-за присуствия множителя $\varepsilon^2_{h_0\dots h_f}$/ участвуют только слагаемые, для которых $h_0,\dots,h_f$ образуют перестановку чисел $0,\dots,f$.

**На этом месте в сумме $\sum\limits_{\substack{\nu_{h_i}=1\\ i=0,\dots,f}}^{l}$ мы заменили ν_{h_i} на ν_i, $i=0,\dots,f$, воспользовавшись тем, что числа $h_0,\dots,h_f$ оразуют перестановку чисел $0,\dots,f$; эта замена не изменяет, конечно, значения суммы.

***Нетрудно установить, что $\sum\limits_{\substack{h_g=0\\ g=0,\dots,f}}^{f}\varepsilon^2_{h_0\dots h_f}$ в точности равняется числу перестановок чисел $0,\dots,f$.

В самом деле, из /3.8/ и /3.9/, принимая во внимание только-что сказанное, получаем

/3.10/
$$\left|\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial \alpha_\nu} &= \frac{1}{f!}\sum_{\substack{\nu_i=1\\ i=1,\dots,f}}^{l} D^{\nu\nu_1\dots\nu_f}(q)\prod_{j=1}^{f}\alpha_{\nu_j} \\ \frac{\partial D_1}{\partial \alpha_\nu} &= \frac{1}{(f-1)!}\sum_{\substack{\nu_i=1\\ i=2,\dots,f}}^{l} D^{\nu\nu_2\dots\nu_f}\prod_{j=2}^{f}\alpha_{\nu_j} \end{aligned}\right. \quad , \nu=1,\dots,l.$$

Кроме того, согласно /3.1/, мы имеем

$$\frac{\partial D_0}{\partial \alpha_\nu} = \frac{\partial D}{\partial \alpha_\nu} - \sum_{\nu_1=1}^{l}\alpha_{\nu_1} m_{\nu_1}^2 \frac{\partial D_1}{\partial \alpha_\nu} - m_\nu^2 D_1\,, \quad \nu=1,\dots,l.$$

Подставляя /3.9/ и /3.10/ в этих соотношениях, получаем окончательно

/3.11/
$$\frac{\partial D_0}{\partial \alpha_\nu} = \frac{1}{f!}\sum_{\substack{\nu_i=1\\ i=1,\dots,f}}^{l} d^{\nu}_{\nu_1\dots\nu_f}(q)\prod_{j=1}^{f}\alpha_{\nu_j}\,, \quad \nu=1,\dots,l,$$

где

$$d^{\nu}_{\nu_1\dots\nu_f}(q) = D^{\nu\nu_1\dots\nu_f}(q) - f\,m_{\nu_1}^2 D^{\nu\nu_2\dots\nu_f} - m_\nu^2 D^{\nu_1\dots\nu_f}, \quad \nu,\nu_i=1,\dots,l,\ i=1,\dots,f,$$

т. е. где, согласно /3.4/, /3.6/, /3.8/ и /3.9/, мы имеем

/3.12/
$$d^{\nu}_{\nu_1\dots\nu_f}(q) = \begin{vmatrix} q_\nu & F_{\nu 1} & \cdots & F_{\nu f} \\ q_{\nu_1} & F_{\nu_1 1} & \cdots & F_{\nu_1 f} \\ \hdotsfor{4} \\ q_{\nu_f} & F_{\nu_f 1} & \cdots & F_{\nu_f f} \end{vmatrix}^2 - f\,m_{\nu_1}^2 \begin{vmatrix} F_{\nu 1} & \cdots & F_{\nu f} \\ F_{\nu_2 1} & \cdots & F_{\nu_2 f} \\ \hdotsfor{3} \\ F_{\nu_f 1} & \cdots & F_{\nu_f f} \end{vmatrix}^2 - m_\nu^2 \begin{vmatrix} F_{\nu_1 1} & \cdots & F_{\nu_1 f} \\ \hdotsfor{3} \\ F_{\nu_f 1} & \cdots & F_{\nu_f f} \end{vmatrix}^2, \quad \nu,\nu_i=1,\dots,l,\ i=1,\dots,f.$$

Ясно, что при $f \geqslant 3$ и $\nu_1=\dots=\nu_f=\mu$ каждый из участвующих в последних соотношениях определителей имеет одинаковые строки, так что

/3.13/
$$d^{\nu}_{\mu\dots\mu} = 0, \quad \mu,\nu=1,\dots,l \quad (f\geqslant 3).$$

При $f<3$ эти равенства не выполняются; например, при $f=2$ из /3.12/ следует, что

/3.14/
$$d^{\nu}_{\mu\mu} = -2\,m_\mu^2 \begin{vmatrix} F_{\nu 1} & F_{\nu 2} \\ F_{\mu 1} & F_{\mu 2} \end{vmatrix}^2, \quad \mu,\nu=1,\dots,l \quad (f=2).$$

4.

Естественным образом возникает идея попробовать найти обобщение рассуждений, на основании которых Tarski[5] /при $f=1$/ пришел к заключению, что значения z, для которых система уравнений типа системы /2.11/ имеет ненулевое решение относительно $\alpha_1,\dots,\alpha_l$, удовлетворяют, со своей стороны, некоторому алгебраическому уравнению /в котором $\alpha_1,\dots,\alpha_l$ не участвуют!/. Это заключение по существу основывается на известной теореме Руше из линейной алгебры; мы воспользуемся другой алгебраической теоремой, являющейся в известном смысле обобщением теоремы Руше. /Эту теорему нетрудно получить комбинированием теоремы I, §6 с теоремой II, §9 и с рассуждениями в начале §9, главы IV монографии Ходжа и Пидо[6]./

ТЕОРЕМА: Пусть дана система

$$\varphi_\nu(\alpha_1,\dots,\alpha_l)=0,\ \nu=1,\dots,l,\ l\geqslant 2, \qquad /4.1/$$

однородных уравнений с неопределенными коэффициентами и пусть

$$\overline{\varphi}_\nu(\alpha_1,\dots,\alpha_l)=0,\ \nu=1,\dots,l \qquad /4.2/$$

- система уравнений, получающаяся из /4.1/ при некоторой специализации ее коэффициентов. Тогда существуют неаннулирующиеся тождественно многочлены T от коэффициентов уравнений системы /4.1/, обладающие следующими свойствами:

I. при подходящем выборе целого неотрицательного числа τ_μ имеют место тождества

$$T\alpha_\mu^{\tau_\mu}\equiv\sum_{\nu=1}^{l}A_{\mu\nu}(\alpha_1,\dots,\alpha_l)\,\varphi_\nu(\alpha_1,\dots,\alpha_l),\ \mu=1,\dots,l, \qquad /4.3/$$

где $A_{\mu\nu}(\alpha_1,\dots,\alpha_l)$, $\mu,\nu=1,\dots,l$ - некоторые, подходящим образом выбранные, многочлены от $\alpha_1,\dots,\alpha_l$ с коэффициентами являющимися многочленами от коэффициентов уравнений системы /4.1/;

II. необходимое и достаточное условие существования ненулевого решения системы /4.1/ при специализации, которая превращает ее в систему

/4.2/, заключается в том, что при рассматриваемой специализации многочлены T обращаются в нуль.

Каждый многочлен T с этими свойствами называется **РЕЗУЛЬТАНТНОЙ ФОРМОЙ** системы /4.1/.

Согласно /3.11/, все уравнения /2.11/ алгебраические и однородные степени f; согласно /3.12/, их коэффициенты являются многочленами от $q_\mu q_\nu$, $\mu,\nu=1,\dots,l$, т. е., согласно сказанному в 2., они являются многочленами от z. Пусть дана произвольная специализация $z\to\bar{z}$. Она превращает формы $\frac{\partial D_0}{\partial\alpha_\nu}$, $\nu=1,\dots,l$ опять в формах степени f от $\alpha_1,\dots,\alpha_l$, но уже с независящими от z коэффициентами. Имея в виду все это, мы рассмотрим случай, когда степень /однородных/ многочленов φ_ν, $\nu=1,\dots,l$ равняется f и когда $\bar{\varphi}_\nu$, $\nu=1,\dots,l$ - многочлены, в которые превращаются $\frac{\partial D_0}{\partial\alpha_\nu}$, $\nu=1,\dots,l$ в результате специализации $z\to\bar{z}$. Ясно, что специализацию, которая превращает /4.1/ в /4.2/ можно произвести в два этапа: сперва мы специализируем коэффициенты системы /4.1/ таким образом, чтобы она превратилась в систему /2.11/, т. е. сперва производим специализацию, при которой $\varphi_\nu\to\frac{\partial D_0}{\partial\alpha_\nu}$, $\nu=1,\dots,l$; потом производим специализацию $z\to\bar{z}$, т. е. специализацию, при которой $\frac{\partial D_0}{\partial\alpha_\nu}\to\bar{\varphi}_\nu$, $\nu=1,\dots,l$. Очевидно, что после первого этапа каждая результантная форма T превращается в многочлен $T(z)$ от z, при чем тождества /4.3/ превращаются в тождества

/4.4/ $$T(z)\alpha_\mu^{\tau_\mu}\equiv\sum_{\nu=1}^{l}B_{\mu\nu}(\alpha_1,\dots,\alpha_l)\frac{\partial D_0}{\partial\alpha_\nu},\ \mu=1,\dots,l,$$

где $B_{\mu\nu}(\alpha_1,\dots,\alpha_l)$, $\mu,\nu=1,\dots,l$ - /подходящим образом выбранные/ многочлены от $\alpha_1,\dots,\alpha_l$ с коэффициентами являющимися многочленами от z. Очевидно, что после второго этапа $T(z)\to T(\bar{z})$, так что в результате двух последовательных специализаций /эквивалентных специализацию, при которой $\varphi_\nu\to\bar{\varphi}_\nu$, $\nu=1,\dots,l$/ будем иметь $T\to T(\bar{z})$. Следовательно, в силу вышеприведенной теоремы необходимое и достаточное условие существования ненулевого решения системы /4.2/ заключается в выполнении равенства $T(\bar{z})=0$ /при каждом выборе результантной формы T/. Принимая во внимание, что после второго этапа система /2.11/ превращается в систему /4.2/, мы убеждаемся в том, что можно высказать следующее утверждение: существуют многочлены $T(z)$, удовлетворяющие /4.4/, такие, что необходимое и достаточное условие существования ненулевого решения /относительно $\alpha_1,\ldots,\alpha_l$/ системы /2.11/ при специализации $z\to\bar{z}$ заключается в выполнении равенства $T(\bar{z})=0$ для каждого такого многочлена $T(z)$. Так как специализация $z\to\bar{z}$ произвольна, то сказанное остается в силе при любом ее выборе. Будем называть каждый многочлен с указанными свойствами РЕЗУЛЬТАНТНОЙ ФОРМОЙ системы /2.11/. Обратим внимание на следующий факт: из того, что результантные формы системы /4.1/ не аннулируются тождественно, нельзя заключить, что и результантные формы системы /2.11/ не аннулируются тождественно. Обратим еще внимание и на то, что все многочлены, о которых идет речь выше, зависят от z, согласно сказанному выше, посредством многочленов от $q_\mu q_\nu$, $\mu,\nu=1,\ldots,l$ и что каждой специализации z соответствует некоторая специализация $q_\mu q_\nu$, $\mu,\nu=1,\ldots,l$.

Можем надеяться, что с помощью результантных форм системы /2.11/ нам удастся сузить совокупность значений z, среди которых находятся интересующие нас - в связи с рассуждениями в 2. - значения z. Как мы отметили в 2., последние значения z прежде всего такие, что существует ненулевое решение системы /2.11/ относительно $\alpha_1,\ldots,\alpha_l$ и значит - согласно сказанному немного выше - такие, чтобы для этих значиний z мы имели $T(z)=0$ при любом выборе результантной формы $T(z)$. Ясно, что уравнения типа $T(z)=0$ дают возможность сузить упомянутую совокупность, если только соответствующие результантные формы не аннулируются тождественно /конечно, относительно z/. К сожалению, при $f\geqslant 3$ предположение, что с помощью результантных форм системы /2.11/ нам удастся сузить упомянутую совокупность, не оправдывается, так как при $f\geqslant 3$ все результантные формы аннулируются тождественно. В самом деле, если $T(z)$ - произвольная результантная форма системы /2.11/, то, согласно /4.4/,

$$T(z)\equiv\sum_{\nu=1}^{l}B_{\mu\nu}\frac{\partial D_0}{\partial\alpha_\nu}\bigg|_{\alpha_\lambda=\delta_{\lambda\mu}},\quad \lambda,\mu=1,\ldots,l,$$

где $B_{\mu\nu}=B_{\mu\nu}(\alpha_1,\dots,\alpha_l)\Big|_{\alpha_\lambda=\delta_{\lambda\mu}}$, $\lambda,\mu,\nu=1,\dots,l$ и где, согласно /3.11/ и /3.13/,

$$\text{/4.5/}\qquad \frac{\partial D_0}{\partial\alpha_\nu}\Big|_{\alpha_\lambda=\delta_{\lambda\mu}}=\frac{1}{f!}\,d^{\nu}_{\mu\dots\mu}(q)=0,\quad \lambda,\mu,\nu=1,\dots,l\ (f\geqslant 3)$$

/последние равенства являются тождествами относительно z!/, так что при $f\geqslant 3$ мы имеем

$$T(z)\equiv 0.$$

Другими словами, при $f\geqslant 3$ система /2.11/ имеет /по меньшей мере одно/ ненулевое решение относительно $\alpha_1,\dots,\alpha_l$ при любом выборе z. В справедливости последнего утверждения можно убедиться и непосредственным подсчетом с помощью /4.5/; из /4.5/ становится ясным, что $\alpha_1=\delta_{1\mu},\dots,\alpha_l=\delta_{l\mu}$, $\mu=1,\dots,l$ – система l ненулевых решений. Эти решения, однако, для нас не представляют интереса, потому что в силу /2.11/ нас интересуют только решения, для которых $\alpha_\nu\neq 0$, $\nu=1,\dots,l$. Пока остается открытым вопрос, имеет ли система /2.11/ решения последнего типа при $f\geqslant 3$; если окажется, что она не имеет других ненулевых решений, кроме указанных l, тогда будет иметь место заключение, что сингулярностей типа C^lE^0 не существует. Исследование этого вопроса нуждается в средствах гораздо более сложных, чем аппарат результантных форм. Последний, как мы видим, не может послужить для наших целей. Становится ясным, что для реализирования намеченной в 2. программы необходим аппарат, годный дать ответ на вопросы подобные только-что упомянутому вопросу. /Конечно, возможен и иной подход: наметить другую программу./

Что касается случаев, когда $f=1,2$, мы отметим следующее. Случай $f=1$ исследовал, как мы сказали в 2., довольно полно Tarski[5]; так как при $f=1$ уравнения /2.11/ являются линейными, исследование можно провести сравнительно элементарными средствами – вместо вышеприведенной теоремы можно использовать теорему Руше из линейной алгебры /как мы уже отметили, именно так и поступает Tarski; теорема Руше, как мы тоже отметили, является в известном смысле частным случаем вышеприведенной теоремы – вот почему мы только-что сказали, что средства, при помощи которых Tarski исследовал случай $f=1$, сравнительно элементарны/. Итак, одним словом, можно считать, что случай $f=1$ в общих чертах исчерпан. В случае $f=2$ /4.5/ не выполняется /при выводе /4.5/ мы использовали /3.13/, а теперь вместо /3.13/ выполняется /3.14//, так что мы можем ожидать, что в случае $f=2$ будем иметь $T(z)\not\equiv 0$; если это предположение оправдается, то, согласно вышесказанному, уравнения типа $T(z)=0$ дадут нам возможность /при $f=2$/ сузить совокупность значений z, среди которых находятся интересующие нас значения z; пока остается открытым вопрос, оправдается ли это предположение и если да - то каким образом построить результантные формы системы /2.11/ /при $f=2$/.

Открытым остается пока и вопрос, каким образом осуществить реализацию как второй части, так и третьей части намеченной в 2. программы. Попытки для разрешения перечисленных вопросов мы сделаем в последующей работе.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I.

В 1. мы существенным образом воспользовались следующей теоремой.

ТЕОРЕМА I: Ранг матрицы инцидентности произвольной связной диаграммы равняется числу ее узлов /т. е. ее порядку/, уменьшенному на единицу.

Несмотря на то, что в 1. мы применили эту теорему для сильно связной диаграммы, здесь мы докажем ее во всей общности, включительно и для слабо связных диаграмм. Справедливость содержащегося в теореме утверждения для простейших диаграмм очевидна. Поэтому мы продолжим доказательство по индукции, с помощью введенных Боголюбовым и Ширковым[1] операций а/ и б/. Как они обратили внимание, "... любая /следует подразумевать: любая <u>связная</u>! - прим. авт./ диаграмма может быть построена из простейших диаграмм последовательным применением должного числа этих операций" /стр. 223/. Следовательно, чтобы закончить доказательство, достаточно показать, что, если содержащееся в теореме утверждение справедливо для некоторой диаграммы, оно справедливо и для каждой диаграммы, которая может быть построена из нее с помощью операций а/ и б/.

Итак, предположим, что для рассматриваемой в 1. диаграммы G упомянутое утверждение справедливо, т. е., что ранг матрицы e равняется $n-1$. Применим к G сперва операцию а/; без ограничения общности можно считать, что внутренняя линия добавилась между узлами с номерами 1 и 2. Обозначим новополученную диаграмму через G_a, а новый внутренний импульс - через k_0; конечно, значения остальных внутренних импульсов, вообще говоря, изменятся, но обозначения для них можно сохранить те же /см. рис. 1/. Очевидно, что последние $n-2$ из уравнений /1.1/, а именно

$$\sum_{\nu=1}^{l} e_{i\nu} k_\nu = p_i, \quad i=3,\dots,n$$

сохраняют свою справедливость, а вместо первых двух из уравнений /1.1/ выполняются уравнения

$$\sum_{\nu=1}^{l} e_{1\nu} k_\nu - k_0 = p_1, \quad \sum_{\nu=1}^{l} e_{2\nu} k_\nu + k_0 = p_2.$$

Следовательно,

$$\sum_{\nu=0}^{l} e_{i\nu} k_\nu = p_i, \quad i=1,\dots,n,$$

где $e_{10}=-1$, $e_{20}=1$, $e_{i0}=0$, $i=3,\dots,n$. Это означает, что матрица инцидентности e_a диаграммы G_a получается из e прибавлением одного столбца, так что ее ранг r_a не меньше ранга e, который по **предположению индукции** равняется $n-1$, т. е. $r_a \geqslant n-1$; с другой стороны, принимая во внимание, что рассуждения, на основании которых в 1. мы установили, что ранг матрицы инцидентности G меньше числа ее узлов, можно провести для каждой диаграммы, мы убеждаемся, что ранг G_a меньше n /число узлов у G_a такое же, как и у G/, т. е. $r_a \leqslant n-1$. Следовательно, $r_a = n-1$. Другими словами, содержащееся в теореме утверждение справедливо и для G_a.

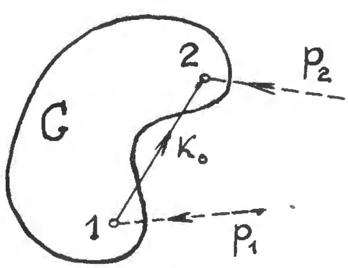

рис. 1

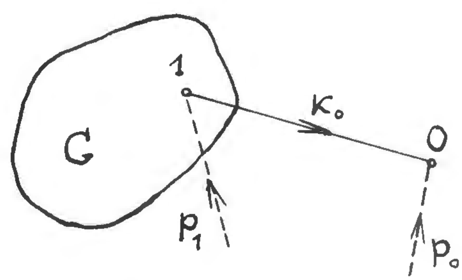

рис. 2

Применим теперь к G операцию б/; без ограничения общности можно считать, что новый узел соединяется /посредством внутренней линии/ с узлом с номером 1. Обозначим новополученную диаграмму через G_δ, а новый узел, новый внутренний импульс и новый внешний импульс – соответственно через 0, k_0 и p_0; конечно, значения остальных внутренних импульсов, вообще говоря, снова изменятся, но обозначения для них опять можно сохранить те же /см. рис. 2/. Очевидно, что последние $n-1$ из уравнений /1.1/, а именно

$$\sum_{\nu=1}^{l} e_{i\nu} k_\nu = p_i\,, \quad i=2,\dots,n$$

сохранят свою справедливость, а вместо первого из уравнений /1.1/, выполняется уравнение

$$\sum_{\nu=1}^{l} e_{1\nu} k_\nu - k_0 = p_1;$$

кроме того, выполняется и уравнение

$$k_0 = p_0\,.$$

Следовательно,

$$\sum_{\nu=0}^{l} e_{i\nu} k_\nu = p_i\,, \quad i=0,\dots,n,$$

где $e_{00}=1$, $e_{0\nu}=0$, $\nu=1,\dots,l$, $e_{10}=-1$, $e_{i0}=0$, $i=2,\dots,n$. Это означает, что матрица инцидентности e_δ диаграммы G_δ имеет вид

$$e_\delta = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ e_0 & e \end{Vmatrix}, \qquad e_0 = \begin{Vmatrix} e_{10} \\ \vdots \\ e_{n0} \end{Vmatrix}.$$

Поэтому, если мы обозначим ранг e_δ через r_δ, а ранг e – через r, то будем иметь $r_\delta = r+1$ /нетрудно показать, что максимальное число линейно независимых столбцов e_δ на единицу больше максимального числа линейно независимых столбцов e; напомним, что ранг произвольной матрицы равняется[6] максимальному числу линейно независимых ее столбцов/. Но так как по предположению индукции $r=n-i$, то $r_\delta = n$. Другими словами, содержащееся в теореме утверждение справедливо и для G_δ.

Согласно сказанному выше, этим доказательство теоремы закончено.

II.

Как мы отметили в 2., Polkinghorne и Screaton[3] утверждают, что интегрированием по $t_1,\dots,t_s$ из /2.1/ получается /2.4/; они, однако, не дают доказательства этого утверждения; насколько нам известно, до сих пор такое доказательство не публиковалось и другими авторами, не считая одного частичного исследования подобных интеграций, которое сделал Mathews[4] для некоторых простых диаграмм /конечно, нельзя считать, что этим исследованием исчерпывается общий случай/. Поэтому в настоящем приложении мы займемся доказательством упомянутого утверждения /в общем случае/.

Предварительно докажем одну лемму, которую Tarski[5] формулирует /по другому поводу/ без доказательства. Пусть $a=\|a_{st}\|$ - произвольная симметрическая $(N+1)\times(N+1)$-матрица, где $N\geqslant 2$. Положим:

/1/ $$X=\sum_{s,t=0}^{N} a_{st}x_s x_t ,$$

где $x_0,\dots,x_N$ - произвольные переменные. Очевидно, что мы имеем

/2/ $$X=A_N x_N^2+2B_N x_N+C_N , \quad \left| \begin{array}{l} A_N=a_{NN} \\ B_N=\sum\limits_{s=0}^{N-1} a_{Ns}x_s \\ C_N=\sum\limits_{s,t=0}^{N-1} a_{st}x_s x_t \end{array} \right. .$$

Нетрудно показать, что если через $R(x)$ мы обозначим оператор, который действует на /произвольный/ квадратный тричлен $Ax^2+2Bx+C$ по закону

/3/ $$R(x)\left(Ax^2+2Bx+C\right)=AC-B^2 ,$$

то

/4/ $$R(x_s)\cdots R(x_N)X=A_{s-1}x_{s-1}^2+2B_{s-1}x_{s-1}+C_{s-1},\ s=1,\dots,N,$$

где A_s, $s=0,\dots,N-1$ не зависят от $x_0,\dots,x_N$, а B_s и C_s являются соответственно линейной и квадратичной формами от $x_0,\dots,x_N$, $s=1,\dots,N-1$; что касается B_0 и C_0, нетрудно показать, что $B_0=C_0=0$. Итак, принимая во внимание и /2/, мы можем утверждать, что A_s, $s=0,\dots,N$ не зависят от $x_0,\dots,x_N$

и что

$$
/5/ \qquad \left|\begin{array}{l} B_0=0,\ B_s=\sum\limits_{\sigma=0}^{s-1} b_s^\sigma x_\sigma \\ C_0=0,\ C_s=\sum\limits_{\sigma,\tau=0}^{s-1} c_s^{\sigma\tau} x_\sigma x_\tau \end{array}\right. , \quad s=1,\dots,N,
$$

где b_s^σ, $c_s^{\sigma\tau}$, $\sigma,\tau=0,\dots,s-1$, $s=1,\dots,N$ не зависят от $x_0,\dots,x_N$. Наконец, нетрудно показать с помощью /4/ и /5/, что

$$
/6/ \qquad \left|\begin{array}{l} A_{s-1}=A_s c_s^{s-1,s-1}-(b_s^{s-1})^2, \quad s=1,\dots,N \\ b_{s-1}^\sigma = A_s c_s^{s-1,\sigma}-b_s^{s-1}\, b_s^\sigma, \quad \sigma=0,\dots,s-2,\ s=2,\dots,N \\ c_{s-1}^{\sigma\tau}=A_s c_s^{\sigma\tau}-b_s^\sigma b_s^\tau, \quad \sigma,\tau=0,\dots,s-2,\ s=2,\dots,N \end{array}\right. .
$$

Все это можно установить индукцией по s с помощью /2/. /Следует обратить внимание на то, что вывод соотношений /6/ основывается, между прочим, на факте, что матрицы $\left\|c_s^{\sigma\tau}\right\|$, $s=1,\dots,N$ симметричны. Этот факт устанавливается тоже индукцией по s одновременно с установлением третьей группы соотношений /6/. Конечно, чтобы воспользоваться методом индукции, необходимо прежде всего показать, что матрица $\left\|c_N^{\sigma\tau}\right\|$ симметрична. Но так как матрица $\left\|a_{st}\right\|$ симметрична и, согласно /2/, $c_N^{\sigma\tau}=a_{\sigma\tau}$, $\sigma,\tau=0,\dots,N-1$, то справедливость последнего утверждения не вызывает сомнений./

Положим:

$$
/7/ \qquad a_r=\left\|\begin{array}{c} a_{rr}\cdots a_{rN} \\ \dots\dots\dots \\ a_{Nr}\cdots a_{NN}\end{array}\right\|, \ r=0,\dots,N, \qquad a_r^s=\left\|\begin{array}{c} a_{r+1,s} \\ \vdots \\ a_{Ns}\end{array}\right\|, \ r,s=0,\dots,N-1
$$

и[ж]

$$
/8/ \qquad \Delta_{rst}=\begin{vmatrix} a_{rr} & \overset{T}{a}{}_r^r \\ a_r^r & a_{r+1}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{st} & \overset{T}{a}{}_r^s \\ a_r^t & a_{r+1}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{rs} & \overset{T}{a}{}_r^r \\ a_r^s & a_{r+1}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{rt} & \overset{T}{a}{}_r^r \\ a_r^t & a_{r+1}\end{vmatrix}-|a_{r+1}|\cdot\begin{vmatrix} a_{st} & a_{rs} & \overset{T}{a}{}_r^s \\ a_{rt} & a_{rr} & \overset{T}{a}{}_r^r \\ a_r^t & a_r^r & a_{r+1}\end{vmatrix}, \quad r,s,t=0,\dots,N-1.
$$

[ж]Если a - произвольная матрица, то, как обычно, через $|a|$ мы будем обозначать ее определитель, а через $\overset{T}{a}$ - матрицу, транспонированную по отношению к a.

Так как матрица [illegible] симметрична, на основании /7/ мы можем написать:

$$/9/ \qquad |a_r| = \begin{vmatrix} a_{rr} & \overset{T}{\bar{a}}{}^{r}_{r} \\ a^{r}_{r} & a_{r+1} \end{vmatrix}, \ r=0,\dots,N-1, \quad |a_N| = a_{NN} = A_N$$

/последнее равенство получается из /2//. С помощью /7/ мы убеждаемся, что матрицы a_{r+1}, $r=0,\dots,N-1$ тоже симметричны, так что будем иметь $\overset{T}{\bar{a}}_{r+1} = a_{r+1}$, $r=0,\dots,N-1$; следовательно,

$$\begin{vmatrix} a_{rs} & \overset{T}{\bar{a}}{}^{r}_{r} \\ a^{s}_{r} & a_{r+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{rs} & \overset{T}{\bar{a}}{}^{s}_{r} \\ a^{r}_{r} & \overset{T}{\bar{a}}_{r+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{rs} & \overset{T}{\bar{a}}{}^{s}_{r} \\ a^{r}_{r} & a_{r+1} \end{vmatrix}, \ r,s=0,\dots,N-1.$$

Сперва рассмотрим случай, когда $|a_{r+1}| \neq 0$, $r=0,\dots,N-1$. Принимая во внимание только-что полученный результат, по известным правилам/7/ мы получаем

$$\Delta_{rst} = \left|a_{rr} - \overset{T}{\bar{a}}{}^{r}_{r} a^{-1}_{r+1} a^{r}_{r}\right| |a_{r+1}| \left|a_{st} - \overset{T}{\bar{a}}{}^{s}_{r} a^{-1}_{r+1} a^{t}_{r}\right| |a_{r+1}| -$$

$$- \left|a_{rs} - \overset{T}{\bar{a}}{}^{s}_{r} a^{-1}_{r+1} a^{r}_{r}\right| |a_{r+1}| \left|a_{rt} - \overset{T}{\bar{a}}{}^{r}_{r} a^{-1}_{r+1} a^{t}_{r}\right| |a_{r+1}| -$$

$$- |a_{r+1}| \cdot \left| \left\| \begin{matrix} a_{st} & a_{rs} \\ a_{rt} & a_{rr} \end{matrix} \right\| - \left\| \begin{matrix} \overset{T}{\bar{a}}{}^{s}_{r} \\ \overset{T}{\bar{a}}{}^{r}_{r} \end{matrix} \right\| a^{-1}_{r+1} \left\| a^{t}_{r} \ \ a^{r}_{r} \right\| \right| \cdot |a_{r+1}| =$$

$$= |a_{r+1}|^2 \Big[(a_{rr} - \overset{T}{\bar{a}}{}^{r}_{r} a^{-1}_{r+1} a^{r}_{r})(a_{st} - \overset{T}{\bar{a}}{}^{s}_{r} a^{-1}_{r+1} a^{t}_{r}) - (a_{rs} - \overset{T}{\bar{a}}{}^{s}_{r} a^{-1}_{r+1} a^{r}_{r})(a_{rt} - \overset{T}{\bar{a}}{}^{r}_{r} a^{-1}_{r+1} a^{t}_{r}) -$$

$$- \begin{vmatrix} a_{st} - \overset{T}{\bar{a}}{}^{s}_{r} a^{-1}_{r+1} a^{t}_{r} & a_{rs} - \overset{T}{\bar{a}}{}^{s}_{r} a^{-1}_{r+1} a^{r}_{r} \\ a_{rt} - \overset{T}{\bar{a}}{}^{r}_{r} a^{-1}_{r+1} a^{t}_{r} & a_{rr} - \overset{T}{\bar{a}}{}^{r}_{r} a^{-1}_{r+1} a^{r}_{r} \end{vmatrix} \Big] = 0, \quad r,s,t=0,\dots,N-1$$

/матрицы первого, третьего, пятого и седьмого из участвующих в этих преобразованиях определителей являются просто числами; то же самое можно сказать и о матрицах, которые входят в элементы последнего определителя/.

Итак, при $|a_{r+1}| \neq 0$, $r=0,\dots,N-1$ мы имеем

$$/10/ \qquad \Delta_{rst} = 0, \quad r,s,t = 0,\dots,N-1.$$

Из "соображения непрерывности"/7/ следует, что /10/ остается справедливым и в случае, когда некоторые из определителей $|a_{r+1}|$, $r=0,\dots,N-1$ аннулируются. Заменив r на $N-r$, s – на σ и t – на τ, из /8/ и /10/ получаем в частности

$$/11/\quad \begin{vmatrix} a_{N-r,N-r} & \overset{T}{a}{}^{N-r}_{N-r} \\ a^{N-r}_{N-r} & a_{N-r+1}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{\sigma\tau} & \overset{T}{a}{}^{\sigma}_{N-r} \\ a^{\tau}_{N-r} & a_{N-r+1}\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{N-r,\sigma} & \overset{T}{a}{}^{N-r}_{N-r} \\ a^{\sigma}_{N-r} & a_{N-r+1}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{N-r,\tau} & \overset{T}{a}{}^{N-r}_{N-r} \\ a^{\tau}_{N-r} & a_{N-r+1}\end{vmatrix} = |a_{N-r+1}|\begin{vmatrix} a_{\sigma\tau} & a_{N-r,\sigma} & \overset{T}{a}{}^{\sigma}_{N-r} \\ a_{N-r,\tau} & a_{N-r,N-r} & \overset{T}{a}{}^{N-r}_{N-r} \\ a^{\tau}_{N-r} & a^{N-r}_{N-r} & a_{N-r+1}\end{vmatrix},$$

$$\sigma,\tau = 0,\dots,N-r-1,\ r = 1,\dots,N-1.$$

С помощью этого результата мы докажем следующие соотношения:

$$/12/\quad \left.\begin{aligned} A_{N-r} &= k_r\begin{vmatrix} a_{N-r,N-r} & \overset{T}{a}{}^{N-r}_{N-r} \\ a^{N-r}_{N-r} & a_{N-r+1}\end{vmatrix} \\ b^{\sigma}_{N-r} &= k_r\begin{vmatrix} a_{N-r,\sigma} & \overset{T}{a}{}^{N-r}_{N-r} \\ a^{\sigma}_{N-r} & a_{N-r+1}\end{vmatrix},\ \sigma = 0,\dots,N-r-1 \\ c^{\sigma\tau}_{N-r} &= k_r\begin{vmatrix} a_{\sigma\tau} & \overset{T}{a}{}^{\sigma}_{N-r} \\ a^{\tau}_{N-r} & a_{N-r+1}\end{vmatrix},\ \sigma,\tau = 0,\dots,N-r-1 \end{aligned}\right\}\ r = 1,\dots,N-1;\quad k_1 = 1,\ k_r = \prod_{\rho=1}^{r-1} A^{r-\rho}_{N-\rho+1},\ r = 2,\dots,N-1.$$

Принимая во внимание, что, согласно /2/ и /5/, $A_N = a_{NN}$, $b^{\sigma}_N = a_{N\sigma}$, $C^{\sigma\tau}_N = a_{\sigma\tau}$, $\sigma,\tau = 0,\dots,N-1$, на основании /6/ легко получаем

$$A_{N-1} = A_N C^{N-1,N-1}_N - \left(b^{N-1}_N\right)^2 = \begin{vmatrix} a_{N-1,N-1} & a_{N,N-1} \\ a_{N,N-1} & a_{NN}\end{vmatrix},$$

$$b^{\sigma}_{N-1} = A_N C^{N-1,\sigma}_N - b^{N-1}_N b^{\sigma}_N = \begin{vmatrix} a_{N-1,\sigma} & a_{N,N-1} \\ a_{N\sigma} & a_{NN}\end{vmatrix},\ \sigma = 0,\dots,N-2,$$

$$C^{\sigma\tau}_{N-1} = A_N C^{\sigma\tau}_N - b^{\sigma}_N b^{\tau}_N = \begin{vmatrix} a_{\sigma\tau} & a_{N\sigma} \\ a_{N\tau} & a_{NN}\end{vmatrix},\ \sigma,\tau = 0,\dots,N-2;$$

этим справедливость /12/ при $r = 1$ установлена. Нетрудно установить справедливость /12/ и при $r = 2$; в самом деле, на основании /6/, /7/, /9/, /11/ и только-что доказанного получаем, например,

$$C^{\sigma\tau}_{N-2} = A_{N-1} C^{\sigma\tau}_{N-1} - b^{\sigma}_{N-1} b^{\tau}_{N-1} = \begin{vmatrix} a_{N-1,N-1} & a_{N,N-1} \\ a_{N,N-1} & a_{NN}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{\sigma\tau} & a_{N\sigma} \\ a_{N\tau} & a_{NN}\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{N-1,\sigma} & a_{N,N-1} \\ a_{N\sigma} & a_{NN}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{N-1,\tau} & a_{N,N-1} \\ a_{N\tau} & a_{NN}\end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} a_{N-1,N-1} & \overset{T}{a}{}^{N-1}_{N-1} \\ a^{N-1}_{N-1} & a_N \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{\sigma\tau} & \overset{T}{a}{}^{\sigma}_{N-1} \\ a^{\tau}_{N-1} & a_N \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{N-1,\sigma} & \overset{T}{a}{}^{N-1}_{N-1} \\ a^{\sigma}_{N-1} & a_N \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{N-1,\tau} & \overset{T}{a}{}^{N-1}_{N-1} \\ a^{\tau}_{N-1} & a_N \end{vmatrix} =$$

$$=|a_N|\cdot\begin{vmatrix} a_{\sigma\tau} & a_{N-1,\sigma} & \overset{T}{a}{}^{\tau}_{N-1} \\ a_{N-1,\tau} & a_{N-1,N-1} & \overset{T}{a}{}^{N-1}_{N-1} \\ a^{\tau}_{N-1} & a^{N-1}_{N-1} & a_N \end{vmatrix} = A_N\begin{vmatrix} a_{\sigma\tau} & \overset{T}{a}{}^{\sigma}_{N-2} \\ a^{\tau}_{N-2} & a_{N-1} \end{vmatrix}, \quad \sigma,\tau=0,\dots,N-3;$$

этим третья группа соотношений /12/ доказана и при $r=2$; аналогичным образом доказываются и остальные из них при $r=2$. Дальше доказательство продолжим индукцией по r. Итак, пусть соотношения /12/ справедливы для каждого целого положительного числа, не превышающего r, $2\leqslant r\leqslant N-1$. Тогда, согласно /6/, /7/, /9/, /11/ и /12/, будем иметь, например,

$$C^{\sigma\tau}_{N-r-1} = A_{N-r}C^{\sigma\tau}_{N-r} - b^{\sigma}_{N-r}b^{\tau}_{N-r} =$$

$$=\left(A^{r-1}_N A^{r-2}_{N-1}\cdots A_{N-r+2}\right)^2\left[\begin{vmatrix} a_{N-r,N-r} & \overset{T}{a}{}^{N-r}_{N-r} \\ a^{N-r}_{N-r} & a_{N-r+1} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{\sigma\tau} & \overset{T}{a}{}^{\sigma}_{N-r} \\ a^{\tau}_{N-r} & a_{N-r+1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{N-r,\sigma} & \overset{T}{a}{}^{N-r}_{N-r} \\ a^{\sigma}_{N-r} & a_{N-r+1} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{N-r,\tau} & \overset{T}{a}{}^{N-r}_{N-r} \\ a^{\tau}_{N-r} & a_{N-r+1} \end{vmatrix}\right] =$$

$$=\left(A^{r-1}_N A^{r-2}_{N-1}\cdots A_{N-r+2}\right)^2 |a_{N-r+1}|\cdot\begin{vmatrix} a_{\sigma\tau} & a_{N-r,\sigma} & \overset{T}{a}{}^{\sigma}_{N-r} \\ a_{N-r,\tau} & a_{N-r,N-r} & \overset{T}{a}{}^{N-r}_{N-r} \\ a^{\tau}_{N-r} & a^{N-r}_{N-r} & a_{N-r+1} \end{vmatrix} =$$

$$=A^r_N A^{r-1}_{N-1}\cdots A^2_{N-r+2}\cdot\left[A^{r-2}_N A^{r-3}_{N-1}\cdots A_{N-r+3}\begin{vmatrix} a_{N-r+1,N-r+1} & \overset{T}{a}{}^{N-r+1}_{N-r+1} \\ a^{N-r+1}_{N-r+1} & a_{N-r+2} \end{vmatrix}\right]\cdot\begin{vmatrix} a_{\sigma\tau} & \overset{T}{a}{}^{\sigma}_{N-r-1} \\ a^{\tau}_{N-r-1} & a_{N-r} \end{vmatrix} =$$

$$=A^r_N A^{r-1}_{N-1}\cdots A^2_{N-r+2}A_{N-r+1}\begin{vmatrix} a_{\sigma\tau} & \overset{T}{a}{}^{\sigma}_{N-r-1} \\ a^{\tau}_{N-r-1} & a_{N-r} \end{vmatrix}, \quad \sigma,\tau=0,\dots,N-r-2;$$

этим третья группа соотношений /12/ доказана; аналогичным образом доказываются и остальные из них. После того, как справедливость соотношений /12/ установлена при $r=N-1, N-2$, нетрудно установить на основании этого и справедливость соотношения

$$A_0 = A_N^{N-1} A_{N-1}^{N-2} \cdots A_2 \begin{vmatrix} a_{00} & \overset{T}{a}{}_0^0 \\ a_0^0 & a_1 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Это можно сделать с помощью рассуждений того же типа как и вышеприведенные /с той разницей, что вместо /11/ теперь следует использовать /10/ - при $r=1$ и $s=t=0$/. Наконец, принимая во внимание, что, согласно /7/ и /9/,

$$\begin{vmatrix} a_{N-r,N-r} & \overset{T}{a}{}_{N-r}^{N-r} \\ a_{N-r}^{N-r} & a_{N-r+1} \end{vmatrix} = |a_{N-r}| = \begin{vmatrix} a_{N-r,N-r} & \cdots & a_{N-r,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N,N-r} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}, \quad r=1,\dots,N,$$

из /12/ и /13/ получаем

$$A_{N-r} = k_r \begin{vmatrix} a_{N-r,N-r} & \cdots & a_{N-r,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N,N-r} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}, \; r=1,\dots,N; \; k_1 = 1, \; k_r = \prod_{\rho=1}^{r-1} A_{N-\rho+1}^{r-\rho}, \; r=2,\dots,N. \tag{14}$$

Таким образом мы доказали следующую лемму.

ЛЕММА II_1: Пусть дана квадратичная форма /1/ /где $N \geqslant 2$/ и пусть A_s, $s=0,\dots,N$ определяются соотношениями /2/ и /4/, где $R(x)$ - оператор, действующий по закону /3/. Тогда справедливо соотношение /14/.*

Рассмотрим теперь интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C+i\varepsilon)^M}, \tag{15}$$

где $A \neq 0$, B, C, $\varepsilon \neq 0$ и $M > \frac{1}{2}$ - некоторые вещественные числа; нетрудно показать, что этот интеграл сходится. Очевидно, что он зависит от A, B, C и ε. Чтобы выяснить вид этой зависимости, сделаем следующую замену переменных:

$$z = \frac{A}{[A(C+i\varepsilon)-B^2]^{\frac{1}{2}}} x + \frac{B}{[A(C+i\varepsilon)-B^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{16}$$

/знаменатель отличен от нуля!/. Ясно, что когда x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, z описывает прямую L в комплексной плоскости; эта прямая проходит через начало координат /при $x = -\frac{B}{A}$, $z=0$/ и не совпадает с мнимой осью /если

---

*Эта лемма не совпадает в точности с леммой, которую формулирует /без доказательства/ Tarski[5], но по существу она эквивалентна ей.

допустить противное, то - так как в таком случае коэффициент и свободный член в /16/ являются чисто мнимыми числами - выходит, что $A\varepsilon = 0$, а это противоречит сделанным предположениям относительно A и ε/. В результате указанной замены переменных получается

$$I = K\frac{A^{M-1}}{(AC-B^2+i\varepsilon A)^{M-\frac{1}{2}}}, \tag{17}$$

где

$$K = \int\limits_L \frac{dz}{(z^2+1)^M}. \tag{18}$$

Из вышесказанного становится ясным, что подинтегралная функция $W(z)=(z^2+1)^{-M}$ аналитична в той части z-плоскости, которая находится между L и вещественной осью и которая не содержит мнимой оси /заштрихованная область на рис. 3/. Кроме того, если L_r - окружность радиуса r с центром в начале координат и если L_r^+ и L_r^- - дуги L_r, первая заключенная между L и положительной частью вещественной оси, вторая - между L и отрицательной частью вещественной оси, то

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{L_r^+}\frac{dz}{(z^2+1)^M} = 0, \quad \lim_{r\to\infty}\int\limits_{L_r^-}\frac{dz}{(z^2+1)^M} = 0.$$

В самом деле, например на L_r^+ мы имеем $|W(z)| \leqslant (r^2-1)^{-M}$, так что, обозначая через $[\varphi_1, \varphi_2]$ интервал, в котором изменяется аргумент φ переменной z на L_r^+, получаем

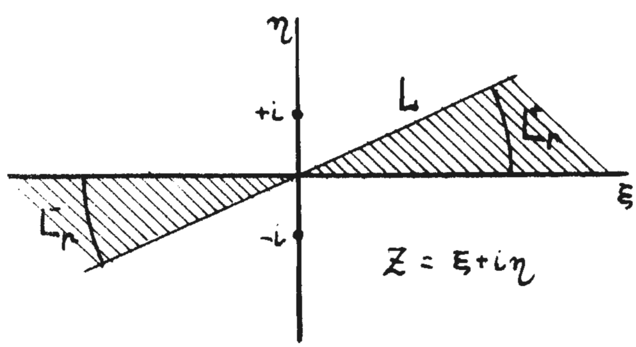

рис. 3

$$\left|\int\limits_{L_r^+} W(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} W(re^{i\varphi})\,rie^{i\varphi}\,d\varphi\right| \leqslant \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} (r^2-1)^{-M}\,r\,d\varphi = (\varphi_2-\varphi_1)\left(1-\frac{1}{r^2}\right)^{-M} r^{-2M+1};$$

отсюда вытекает первое из вышеприведенных соотношений; аналогичным образом доказывается и второе. Тогда, на основании всего этого, с помощью теоремы Коши легко получаем из /18/

$$K = \epsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^M},$$

где $\epsilon = +1$ или $\epsilon = -1$ в зависимости от ориентации L; с другой стороны, нетрудно установить с помощью /~~17~~ 16/, что ориентация L определяется знаком A, так что $\epsilon = +1$ или $\epsilon = -1$ в зависимости от знака A. Следовательно,

$$K = \text{const}\cdot \text{sign}\, A^{*},$$

где через "const" мы обозначили величину, независящую от x, A, B, C и ε. Подставляя в /17/ и принимая во внимание /3/, находим

/19/
$$I = \frac{\text{const}\cdot \text{sign}\, A\cdot A^{M-1}}{\left[R(x)(Ax^2+2Bx+C)+i\varepsilon A\right]^{M-\frac{1}{2}}}.$$

Положим:

/20/
$$J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_N \frac{1}{(X+i\varepsilon)^M},$$

где X определяется соотношением /1/ и где $\varepsilon \neq 0$, а $M > \frac{N}{2}$, т. е. $M > \frac{1}{2}$, так как по условию $N \geqslant 2$. Согласно /4/, /15/ и /19/, при предположении, что $A_N \neq 0$, мы будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_N}{(X+i\varepsilon)^M} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_N}{(A_N x_N^2 + 2B_N x_N + C_N + i\varepsilon)^M} = \frac{\text{const}\cdot \text{sign}\, A_N \cdot A_N^{M-1}}{\left[R(x_N)(A_N x_N^2 + 2B_N x_N + C_N) + i\varepsilon A_N\right]^{M-\frac{1}{2}}}.$$

---

*Как известно, $\text{sign}\, A = +1$, если $A > 0$ и $\text{sign}\, A = -1$, если $A < 0$.

$$= \mathrm{const} \cdot \mathrm{sign} A_N \cdot A_N^{M-1} \frac{1}{\left(A_{N-1} x_{N-1}^2 + 2 B_{N-1} x_{N-1} + C_{N-1} + i\varepsilon A_N\right)^{M-\frac{1}{2}}},$$

ввиду чего из /20/ мы получаем

$$J = \mathrm{const} \cdot \mathrm{sign} A_N \cdot A_N^{M-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_N \frac{1}{\left(A_{N-1} x_{N-1}^2 + 2 B_{N-1} x_{N-1} + C_{N-1} + i\varepsilon A_N\right)^{M-\frac{1}{2}}}.$$

Далее, при предположении, что и $A_s \neq 0$, $s = 1, \ldots, N-1$, посредством рассуждений того же типа, получаем методом индукции

$$J = \mathrm{const} \cdot \mathrm{sign} A_N \, \mathrm{sign} A_{N-1} \cdots \mathrm{sign} A_1 \cdot A_N^{M-\frac{2}{2}} A_{N-1}^{M-\frac{3}{2}} \cdots A^{M-\frac{N+1}{2}} \frac{1}{\left(A_0 x_0^2 + 2 B_0 x_0 + C_0 + i\varepsilon A_N A_{N-1} \cdots A_1\right)^{M-\frac{N}{2}}}.$$

Наконец, принимая во внимание, что, согласно /5/, $B_0 = C_0 = 0$ и что

$$\mathrm{sign} A_N \, \mathrm{sign} A_{N-1} \cdots \mathrm{sign} A_1 = \mathrm{sign}\left(A_N A_{N-1} \cdots A_2\right) \mathrm{sign} \frac{1}{A_1} = \mathrm{sign} \frac{A_N A_{N-1} \cdots A_2}{A_1},$$

на основании леммы II_1 /т. е. на основании /14// мы получаем - при $N \geqslant 3$ -

$$J_{x_0=1} = \mathrm{const} \cdot \mathrm{sign} \frac{A_N A_{N-1} \cdots A_2}{A_1} \cdot \frac{A_N^{M-\frac{2}{2}} A_{N-1}^{M-\frac{3}{2}} \cdots A_1^{M-\frac{N+1}{2}}}{A_N^{M-\frac{N}{2}} A_{N-1}^{M-\frac{N}{2}} \cdots A_1^{M-\frac{N}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{A_0}{A_N A_{N-1} \cdots A_1} + i\varepsilon\right)^{M-\frac{N}{2}}} =$$

$$= \mathrm{const} \cdot \mathrm{sign} \frac{A_N A_{N-1} \cdots A_2}{A_N^{N-2} A_{N-1}^{N-3} \cdots A_3 \Delta_1} \cdot \frac{A_N^{\frac{N-2}{2}} A_{N-1}^{\frac{N-3}{2}} \cdots A_3^{\frac{1}{2}}}{A_1^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{A_N^{N-1} A_{N-1}^{N-2} \cdots A_2 \Delta_0}{A_N A_{N-1} \cdots A_1} + i\varepsilon\right)^{M-\frac{N}{2}}} =$$

$$= \mathrm{const} \cdot \mathrm{sign} \frac{A_2}{A_N^{N-3} A_{N-1}^{N-4} \cdots A_4 \Delta_1} \cdot \left(\frac{A_N^{N-2} A_{N-1}^{N-3} \cdots A_3}{A_1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{A_N^{N-2} A_{N-1}^{N-3} \cdots A_3 \Delta_0}{A_1} + i\varepsilon\right)^{M-\frac{N}{2}}} =$$

$$= \mathrm{const} \cdot \mathrm{sign} \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdot \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\Delta_0}{\Delta_1} + i\varepsilon\right)^{M-\frac{N}{2}}},$$

где

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0N} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N0} & a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}; \tag{21}$$

этот результат мы получили при предположении, что $N \geqslant 3$, однако, как нетрудно проверить, он остается справедливым и при $N=2$ /в последнем случае под Δ_2, естественно, следует подразумевать a_{22}/. Итак, при $N \geqslant 2$ имеем:

$$J_{x_0=1} = \frac{\varphi}{\left(\frac{\Delta_0}{\Delta_1} + i\varepsilon\right)^{M-\frac{N}{2}}}, \tag{22}$$

где

$$\varphi = \mathrm{const} \cdot \mathrm{sign}\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdot \Delta_1^{-\frac{1}{2}}. \tag{23}$$

Кроме того, нетрудно показать с помощью /14/, что неравенства $A_s \neq 0$, $s=1,\dots,N$ выполняются тогда и только тогда, когда выполняются и неравенства

$$a_{NN} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{N-1,N-1} & \cdots & a_{N-1,N} \\ a_{N,N-1} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} \neq 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{24}$$

Таким образом мы доказали следующую лемму.

ЛЕММА II_2: Пусть X - квадратичная форма /1/ /при $N \geqslant 2$/, а J - интеграл /20/, где $\varepsilon \neq 0$ и $M > \frac{N}{2}$ и пусть A_s, $s=0,\dots,N$ определяются соотношениями /2/ и /4/, где $R(x)$ - оператор, действующий по закону /3/. Тогда при предположении, что выполняются неравенства /24/, справедливо соотношение /22/.

Теперь мы уже в состоянии доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА II: Пусть дан интеграл

$$J^4 = \int \frac{d^4t_1 \dots d^4t_f}{(Q+i\varepsilon)^l}, \tag{25}$$

где Q определяется соотношением /2.6/ и где $\varepsilon \neq 0$ и $l > 2f$; положим:

$$/26/ \qquad D_0 = \begin{vmatrix} c & b_1 & \cdots & b_f \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1f} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_f & a_{f1} & \cdots & a_{ff} \end{vmatrix}, \quad D_i = \begin{vmatrix} a_{ii} & \cdots & a_{if} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{fi} & \cdots & a_{ff} \end{vmatrix}, \; i=1,\dots,f,$$

где a_{ij}, b_i, $i,j=1,\dots,f$ и C определяются соотношениями /2.7/. Тогда при предположении, что $D_i \neq 0$, $i=1,\dots,f$, имеем

$$/27/ \qquad J^4 = \frac{\varphi}{\left(\frac{D_0}{D_1} + i\varepsilon\right)^{l-2f}},$$

где

$$/28/ \qquad \varphi = \mathrm{const}\cdot \mathrm{sign}\frac{D_2}{D_1}\cdot D_1^{-2} \quad \left(D_2 = 1 \text{ при } f=1\right).$$

Чтобы доказать теорему, мы представим Q в виде /1/. Положим:

$$/29/ \qquad a = \|a_{ij}\|, \quad b = \left\|\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_f \end{matrix}\right\|.$$

Обозначая через $g_{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta=0,1,2,3$ компоненты метричиского тензора Минковского $g=\|g_{\alpha\beta}\|$ и через $g\times a$ - прямое произведение g и a, на основании /2.6/ мы получаем

$$Q = \sum_{i,j=1}^{f} a_{ij}\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta} t_i^\alpha t_j^\beta + 2\sum_{i=1}^{f}\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta} b_i^\beta t_i^\alpha + c =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=0}^{3}\sum_{i,j=1}^{f} g_{\alpha\beta} a_{ij} t_i^\alpha t_j^\beta + 2\sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{i=1}^{f}\left(\sum_{\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta} b_i^\beta\right) t_i^\alpha + c =$$

$$= \sum_{(\alpha i),(\beta j)=1}^{4f} a_{(\alpha i)(\beta j)} x_{(\alpha i)} x_{(\beta j)} + \sum_{(\alpha i)=1}^{4f}\left(a_{0(\alpha i)} + a_{(\alpha i)0}\right) x_{(\alpha i)} x_0 + a_{00} x_0^2,$$

где

$$/30/ \qquad a_{(\alpha i)(\beta j)} = (g\times a)_{(\alpha i)(\beta j)}, \quad a_{0(\alpha i)} = a_{(\alpha i)0} = \sum_{\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta} b_i^\beta, \; (\alpha i),(\beta j)=1,\dots,4f, \quad a_{00} = c,$$

/31/ $$x_{(\alpha i)} = t_i^{\alpha}, \quad \alpha=0,1,2,3, \; i=1,\dots,f, \quad x_0=1.$$

Итак, мы нашли, что

$$Q=\sum_{(\alpha i),(\beta j)=0}^{4f} a_{(\alpha i)(\beta j)} x_{(\alpha i)} x_{(\beta j)} .$$

Отметим при этом, что в силу первой группы соотношений /2.7/ матрица $\|a_{ij}\|$ симметрична и, следовательно, как нетрудно показать с помощью /30/, матрица $\|a_{(\alpha i)(\beta j)}\|$ тоже симметрична. Сравнение последнего соотношения с /1/ убеждает нас в том, что в рассматриваемом теперь случае $N=4f>2$, в то время как сравнение /25/ с /20/ убеждает нас в том, что в рассматриваемом случае $M=l$, так что $M-\frac{N}{2}=l-2f>0$; другими словами, все условия леммы II_2 выполнены. Пусть $f\geqslant 2$; положим:

/32/ $$\Delta_0^4=\begin{vmatrix} c & -\overset{T}{b^0} & \overset{T}{b^1} & \overset{T}{b^2} & \overset{T}{b^3} \\ -b^0 & -a & 0 & 0 & 0 \\ b^1 & 0 & a & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & 0 & a & 0 \\ b^3 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}, \quad b^{\alpha}=\begin{Vmatrix} b_1^{\alpha} \\ \vdots \\ b_f^{\alpha} \end{Vmatrix}, \; \alpha=0,1,2,3,$$

/33/ $$\Delta_1^4=\begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}, \quad \Delta_2^4=\begin{vmatrix} -\tilde{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}, \quad \tilde{a}=\begin{Vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2f} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{f2} & \cdots & a_{ff} \end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим сперва случай, когда $|a|\neq 0$; так как в этом случае a^{-1} существует, то существует и

$$\begin{Vmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} -a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-1} \end{Vmatrix}.$$

По известным правилам[7] из /32/, принимая во внимание /26/ и /29/, получаем

$$\Delta_0^4=\left[c-\left\|-\overset{T}{b}{}^0\ \overset{T}{b}{}^1\ \overset{T}{b}{}^2\ \overset{T}{b}{}^3\right\|\left\|\begin{matrix}-a^{-1}&0&0&0\\0&a^{-1}&0&0\\0&0&a^{-1}&0\\0&0&0&a^{-1}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}-b^0\\b^1\\b^2\\b^3\end{matrix}\right\|\right]\cdot\left|\begin{matrix}-a&0&0&0\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{matrix}\right|=$$

$$=\left[c-\left(-\overset{T}{b}{}^0a^{-1}b^0+\overset{T}{b}{}^1a^{-1}b^1+\overset{T}{b}{}^2a^{-1}b^2+\overset{T}{b}{}^3a^{-1}b^3\right)\right]|-a||a|^3=$$

$$=\left(c-\sum_{\alpha,\beta=0}^{3}g_{\alpha\beta}\overset{T}{b}{}^\alpha a^{-1}b^\beta\right)(-1)^f|a|^4=\left(c-\sum_{\alpha,\beta=0}^{3}g_{\alpha\beta}\sum_{i,j=1}^{f}a^{-1}_{ij}b_i^\alpha b_j^\beta\right)(-1)^f|a|^4=$$

$$=\left(c-\sum_{i,j=1}^{f}a^{-1}_{ij}\sum_{\alpha,\beta=0}^{3}g_{\alpha\beta}b_i^\alpha b_j^\beta\right)(-1)^f|a|^4=\left(c-\sum_{i,j=1}^{f}a^{-1}_{ij}b_ib_j\right)(-1)^f|a|D_1^3=$$

$$=\left[\left(c-\overset{T}{b}a^{-1}b\right)|a|\right](-1)^fD_1^3=\begin{vmatrix}c&\overset{T}{b}\\b&a\end{vmatrix}(-1)^fD_1^3=D_0(-1)^fD_1^3.$$

Из "соображения непрерывности"[7] следует, что этот результат остается справедливым и при $|a|=0$. Итак, мы нашли, что

/34/ $$\Delta_0^4=(-1)^fD_0D_1^3.$$

Кроме того, по известным правилам[7] из /33/, принимая во внимание /26/, находим:

/35/ $$\Delta_1^4=(-1)^fD_1^4,\quad \Delta_2^4=(-1)^{f-1}D_1^3D_2;$$

можно показать, что этот результат сохраняет свою справедливость и при $f=1$ /в этом случае под D_2 следует подразумевать число 1/. Наконец, посредством рассуждений того же типа нетрудно показать, что неравенства типа /24/ для матрицы $\left\|a_{(\alpha i)(\beta j)}\right\|$ выполняются тогда и только тогда, когда выполняются и неравенства $D_i\neq0$, $i=1,\dots,f$. Следовательно, согласно лемме II_2 /как мы видели выше, все условия этой леммы выполнены/, при $D_i\neq0$, $i=1,\dots,f$ мы будем иметь:

$$J^4=\frac{\varphi}{\left(\frac{\Delta_0^4}{\Delta_1^4}+i\varepsilon\right)^{l-2f}},\quad \varphi=\mathrm{const}\cdot\mathrm{sign}\frac{\Delta_2^4}{\Delta_1^4}\cdot\left(\Delta_1^4\right)^{-\frac12}$$

/как мы видели выше, $M-\frac{N}{2}=l-2f$; кроме того, сравнение /20/ с /25/ и /21/ с /32/ и /33/ убеждает нас в том, что J^4 является "четырехмерным" аналогом J, а Δ_0^4, Δ_1^4 и Δ_2^4 - "четырехмерными" аналогами соответственно Δ_0, Δ_1 и Δ_2, так что написанные выше соотношения сразу вытекают из /22/ - согласно /31/, $\mathcal{X}_0=1$! - и из /23//. Первое из этих соотношений с помощью /34/ и /35/ превращается в /27/. Второе с помощью /35/ дает

$$\varphi=\mathrm{const}\cdot\mathrm{sign}\left(-\frac{D_2}{D_1}\right)\cdot\left[(-1)^f D_1^4\right]^{-\frac{1}{2}}=(-1)^{1-\frac{f}{2}}\mathrm{const}\cdot\mathrm{sign}\frac{D_2}{D_1}\cdot D_1^{-2},$$

т. е. дает /28/. Этим теорема доказана.

Сравнение /2.1/ с /25/, /2.4/ вместе с /2.8/ - с /27/ и /2.9/ - с /26/ убеждает нас в том, что таким образом мы обосновали рецептуру для получения $Q'(\alpha,q)$ из $Q(\alpha,q,t)$, использованную нами в 2.[ж]. При этом мы получили еще один результат - соотношение /28/, т. е. мы нашли явный вид φ; согласно /2.7/, /26/ и /28/, φ является функцией от $\alpha_1,\dots,\alpha_l$: $\varphi=\varphi(\alpha)$. Покажем, что при $\alpha_\nu\geqslant 0$, $\nu=1,\dots,l$ вместо /28/ мы можем написать

/36/ $$\varphi(\alpha)=\mathrm{const}\, D_1^{-2}.$$

Для этой цели мы рассмотрим квадратичную форму

$$\Xi=\sum_{i,j=1}^{f}a_{ij}\xi_i\xi_j\,,$$

где $\xi_1,\dots,\xi_f$ - вещественные /числовые/ переменные. Согласно /2.7/, имеем:

/37/ $$\Xi=\sum_{i,j=1}^{f}\sum_{\nu=1}^{l}\alpha_\nu F_{\nu i}F_{\nu j}\xi_i\xi_j=\sum_{\nu=1}^{l}\alpha_\nu\left(\sum_{i=1}^{f}F_{\nu i}\xi_i\right)^2.$$

[ж]Предложенное здесь обоснование этой рецептуры является косвенным. Его можно заменить более непосредственным /точнее, можно формулировать лемму II_2 так, чтобы ввести дифференцирование типа дифференцирования в /2.5/; что же касается леммы II_1, то она остается без изменения; обратим внимание на то, что в этом случае доказательство упомянутой рецептуры не основывается на лемме II_1, но она безусловно необходима для получения явного вида φ/.

Отметим еще, что аналогичным образом /с помощью рассуждений одного из двух указанных типов/ можно обосновать и аналогичную рецептуру, использованную например Логуновым, Тодоровым и Черниковым/2/; несмотря на то, что они не исходят из интеграла /2.1/ /в их работе порядок интегрирования по внутренним импульсам и по параметрам Фейнмана отличается от нашего и поэтому оказывается, что вместо интегралов типа /15/ теперь следует рассматривать интегралы так называемого гауссова типа/1/, основа рассуждений сохранится неизменной.

Пусть теперь $\alpha_\nu \geq 0$, $\nu=1,\dots,l$. Тогда, согласно /37/, $\Xi \geq 0$ и поэтому[7] все главные миноры матрицы $\|a_{ij}\|$ тоже неотрицательны. Поскольку, согласно /26/, D_1 и D_2 являются главными минорами этой матрицы, то $D_1, D_2 \geq 0$. Кроме того, по предположению теоремы II, $D_1, D_2 \neq 0$, так что $D_1, D_2 > 0$ /эти неравенства выполняются и в случае $f=1$, потому что в этом случае под D_2 подразумевается число 1/. Следовательно, $\operatorname{sign}\frac{D_2}{D_1}=1$ и /28/ превращается в /36/. Так как, согласно /2.4/, функция $\varphi(\alpha)$ представляет интерес для нас лишь при $\alpha_\nu \geq 0$, $\nu=1,\dots,l$, то без ограничения общности мы можем считать, что она определяется соотношением /36/; следовательно, согласно /26/, $\varphi(\alpha)$ – как мы отметили в 2. – является рациональной функцией от $\alpha_1,\dots,\alpha_l$.

Необходимо еще установить справедливость неравенств $D_i \not\equiv 0$, $i=1,\dots,f$ /теорема II доказывается при предположении, что $D_i \neq 0$, $i=1,\dots,f$, т. е. прежде всего неявно предполагается, что $D_1,\dots,D_f$ не аннулируются тождественно/. Для этой цели мы снова рассмотрим квадратичную форму Ξ. Согласно /1.15/ и /37/, при подходящем выборе $\alpha_1,\dots,\alpha_l$ /например при $\alpha_\nu>0$, $\nu=1,\dots,f$, $\alpha_\nu \geq 0$, $\nu=f+1,\dots,l$/ эта форма оказывается положительно определенной и, следовательно[7], все главные миноры матрицы $\|a_{ij}\|$ положительны. Поскольку, согласно /26/, $D_1,\dots,D_f$ являются главными минорами этой матрицы, то $D_i>0$, $i=1,\dots,f$ /при таком же выборе $\alpha_1,\dots,\alpha_l$/. Поэтому $D_i \not\equiv 0$, $i=1,\dots,f$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, Москва, 1957.

2. А. А. Логунов, И. Т. Тодоров и Н. А. Черников, Вопросы теории мажорирования диаграмм Фейнмана - препринт ОИЯИ, Д-578 /1960/.

3. J. C. Polkinghorne, G. R. Screaton, The Analytic Properties of Perturbation Theory - I, Nuovo Cimento, 2, 289 /1960/.

4. J. Mathews, Application of Linear Network Analysis to Feynman Diagrams, Phys. Rev., 113, 381 /1959/.

5. J. Tarski, Spectral Representation in Perturbation Theory - III /препринт/.

6. В. Ходж и Д. Пидо, Методы алгебраической геометрии, т. I, Москва, 1954.

7. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Москва, 1953.