

1101

14.
Г 54



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

Н.Н. Говорун, И.В. Попова, Л.А. Смирнова, Т.В. Рыльцева

1101

ОБРАБОТКА СЛЕДОВ ЧАСТИЦ
МАЛОЙ ЭНЕРГИИ,
ПОЛУЧАЕМЫХ В КАМЕРЕ ВИЛЬСОНА

Дубна 1962 год

Н.Н. Говорун, И.В. Попова, Л.А. Смирнова, Т.В. Рыльцева

1101

1810/2 48

ОБРАБОТКА СЛЕДОВ ЧАСТИЦ
МАЛОЙ ЭНЕРГИИ,
ПОЛУЧАЕМЫХ В КАМЕРЕ ВИЛЬСОНА

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Дубна 1962 год

Производится определение величины импульса и его направления, а также угла между полем направлений (векторное поле, описывающее первичный пучок мезонов, не видимый при рабочем состоянии камеры.) и траекторией частицы в точке взаимодействия. Учитывается как торможение частицы в камере, так и изменение магнитного поля при переходе с точки к точке камеры.

Тема работы была предложена сотрудниками Лаборатории высоких энергий И.В. Чурило и Л.Н. Струновым в связи с постановкой группой Л.Н. Струнова эксперимента по рассеянию мезонов на протонах. Программу для обработки экспериментальных данных составили И.В. Попова, Л.А. Смирнова и Т.В. Рыльцева. Подпрограмму для счета корреляционной матрицы написали Б.В. Феоктистов и А.И. Родионов.

Разработку методики счета, написание задания для программирования и руководство работой осуществлял Н.Н. Говорун.

В в е д е н и е

Исходными данными для обработки отдельного события являются координаты точек правого и левого снимков траектории, а также координаты реперных точек. Предусмотрена возможность поступления этих данных как с измерительного микроскопа (координаты правого и левого кадров для соответственных точек), так и с автомата А П С (даются координаты несоответственных точек).

Первый этап обработки начинается с обсчета плоских стереопроекций трека на правом и левом кадрах снимков и заканчивается восстановлением пространственных координат траектории.

При поступлении данных с автомата производится расшифровка поступившей информации, запись чисел в нормальной форме, переход к оптической системе координат в соответствии с реперными точками, проверка гладкости кривых на правом и левом кадрах и выброс "плохих" точек, нахождение соответственных точек на кадрах и получение пространственных координат трека.

Для данных, поступающих с микроскопа, производится перевод чисел в двоичную систему, перенос начала координат в соответствии с реперными точками, получение пространственных координат трека и выброс "плохих" точек в пространстве по гладкости проекции трека на плоскость $x = 0$.

На втором этапе обработки находится нулевое приближение для импульса и его направления. Для этого через первые 10 точек пространственной траектории (или через все точки, если их число меньше 10) проводится по методу наименьших квадратов винтовая линия. При этом магнитное поле считается постоянным и равным полю в точке взаимодействия. Далее находятся направляющие косинусы касательного вектора к винтовой линии в точке взаимодействия. Затем по радиусу кривизны проекции винтовой линии на плоскость, перпендикулярную к вектору \vec{H} , и значению магнитного поля H находится импульс частицы.

Следующий этап обработки сводится к нахождению оптимальных значений импульса и его направления. Используя в качестве начальных условий для уравнения движения частицы координаты первой точки трека, а также нулевые значения для импульса и его направления, при интегрировании уравнения получаем траекторию частицы с импульсом в точке взаимодействия, равным его нулевому значению.

Затем находятся расстояния R_i от точек траектории, полученной путем измерений, до точек траектории, получаемой при интегрировании уравнения. Оптимальные значения импульса и его направления находятся путем минимизации функционала $\Phi = \sum R_i^2$, нелинейного по искомым величинам, методом линеаризации относительно нулевого приближения. При минимизации функционала находятся β , θ , ϕ и матрица ошибок, где β - скорость частицы в долях скорости света, θ - меридиональный угол, а ϕ - азимутальный угол вектора скорости в сферической системе координат. Для тех случаев,

когда частицы останавливаются в камере, в программе предусмотрен режим работы, включающий в функционал также разность $l - l_{\text{изм.}}$, где l - длина пробега, полученная при интегрировании уравнений, а $l_{\text{изм.}}$ - длина пробега по измеренной траектории. Далее находятся в точке взаимодействия в лабораторной системе и системе центра масс импульсы частицы, импульс мезона и его направление, угол между траекториями частицы и мезона, а также ошибки всех получаемых величин.

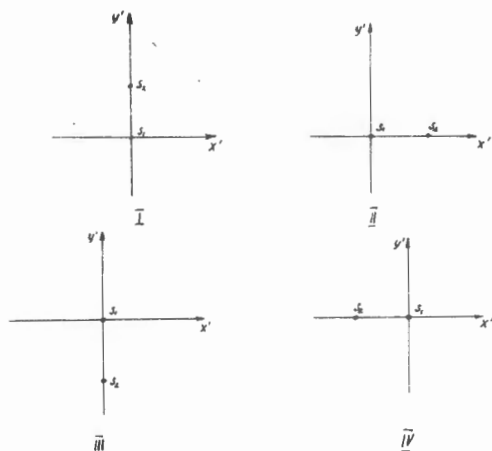
Кроме вышеперечисленных величин дополнительно выдается на печать много другой информации (как-то: пробег частицы, координаты первой и последних точек, азимутальный угол и др.), помогающей при дальнейшей обработке материала.

По окончании обработки одного события автоматически производится переход (после обновления программы с магнитного барабана) к обработке следующего события.

Дальнейшее изложение материала начнем с описания отдельных частей программы, тем более, что многие из них могут быть использованы и в других задачах по обработке экспериментальных данных, получаемых на различных камерах.

§ 1. Нахождение плоской кривой по данным автомата

Для первичной обработки числового материала, поступающего с пленки, полученной на автомате, сделана специальная подпрограмма. Она считает число точек в кривой, при этом в качестве признака конца информации используются два подряд пробитых нуля. Подпрограмма может обрабатывать треки с любым количеством точек. После подсчета числа точек производится расшифровка поступившей информации и запись чисел в нормальной форме. Затем в соответствии с реперными точками производится поворот и перенос системы координат (преобразование ее в оптическую систему). В связи с тем, что реперные точки могут быть заданы произвольным образом, в программе предусмотрена обработка данных для следующих комбинаций расположения реперных точек $S_1(x_1, y_1)$, $S_2(x_2, y_2)$. Точка $S_1(x_1, y_1)$ всегда идет первой, она дает новое начало системы координат.



Р и с. 1.

Формулами, по которым производится преобразование системы координат, для разных случаев будут:

1.
$$x' = (x - x_1) \cos \phi - (y - y_1) \sin \phi ,$$

$$y' = (x - x_1) \sin \phi + (y - y_1) \cos \phi .$$
2.
$$x' = (x - x_1) \sin \phi + (y - y_1) \cos \phi ,$$

$$y' = -(x - x_1) \cos \phi + (y - y_1) \sin \phi .$$
3.
$$x' = -(x - x_1) \cos \phi + (y - y_1) \sin \phi ,$$

$$y' = (x - x_1) \sin \phi - (y - y_1) \cos \phi .$$
4.
$$x' = -(x - x_1) \sin \phi - (y - y_1) \cos \phi ,$$

$$y' = (x - x_1) \cos \phi - (y - y_1) \sin \phi ,$$

где

$$\sin \phi = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} ,$$

$$\cos \phi = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} .$$

При решении данной задачи встречаются случаи 2 и 4.

На автомате в одной ячейке пробиваются координаты и x , и y . Разряды 1-18 отводятся для координаты x , а разряды 21-38 - для координаты y . Поэтому для записи числа в нормальной форме следует выделить информацию, произвести необходимые сдвиги и приформировать соответствующие порядки (см. /1/).

Для данной подпрограммы информация задается в таком порядке: сначала пробиваются 2 реперные точки, далее идут координаты проекций трека и в качестве признака конца информации пробиваются два нуля.

§ 2. Нахождение пространственной траектории по несоответственным точкам

Для восстановления пространственной траектории по координатам и числу несоответственных точек на правом и левом кадрах, получаемых программой, описанной в §1, сделана небольшая стандартная программа в системе ИС-2. В качестве информации в обращении к этой программе указываются адреса ячеек для точек левого кадра $x_л$, $y_л$; правого кадра $x_п$, $y_п$, числа точек для левого и правого кадра, а также адреса ячеек для базы съемки B и расстояния V от заднего фокуса объектива до изображения (пленки). Программа для каждой точки левого кадра $x_л$, $y_л$ при помощи программы параболической интерполяции находит соответственные точки на правом кадре

$x_п = f(y_л)$. Далее вычисляются пространственные координаты по формулам (камера Вильсона):

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{B}{x_{\text{л}} - x_{\text{п}}} x_{\text{л}} , \\
 y &= \frac{B}{x_{\text{л}} - x_{\text{п}}} y_{\text{л}} , \\
 z &= \frac{B v}{x_{\text{л}} - x_{\text{п}}} ,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

$x_{\text{л}}$, $y_{\text{л}}$, $x_{\text{п}}$, $y_{\text{п}}$ заданы в оптической системе координат. Число точек в пространстве получается равным числу точек на левом кадре.

§ 3. Нахождение пространственной траектории по данным
микроскопных измерений
(соответственные точки)

Для нахождения пространственных координат по данным микроскопных измерений также составлена стандартная программа в ИС-2. В качестве исходной информации для нее указывается адрес ячейки, начиная с которой помешаются реперные точки и координаты правого и левого кадров. Указывается ячейка для базы B и расстояния v от заднего фокуса объектива до изображения (пленки). Число точек не указывается и может быть любым^{х/}. Признаком конца информации являются две рядом стоящие нулевые ячейки. Если в середине информации встречается один нуль, то он выбрасывается.

Программа предварительно производит подсчет числа точек, затем после переноса начала координат в соответствии с реперными точками^{хх/} по формулам (1) получает пространственные координаты.

§ 4. Выброс "плохих" точек (сглаживание кривых)

В качестве основы для программы выброса взята стандартная программа, написанная в ИС-2 (см.^{1/}) для выброса точек по кривой четвертого порядка. Эта программа через точки в плоскости, подлежащие сглаживанию, проводит по методу наименьших квадратов кривую четвертого порядка, и точки, далеко отстоящие от этой кривой, последовательно выбрасываются. В нашем случае обработки треков для медленных частиц, которые могут и останавливаться в камере, для описания траектории иногда необходимо брать до 40 точек. Описать кривой четвертого порядка закручивающуюся спираль, проходящую по этим точкам, не всегда возможно и поэтому для выброса "плохих" точек в нашем случае пришлось сделать дополнительно к существующей СП^{xxx/} еще одну программу в системе ИС-2.

х/ Однако в нашей задаче число точек не может быть больше сорока.

хх/ Для случая микроскопных измерений реперные точки дают только новое начало системы координат, так как поворот сделан при выставлении кадров на микроскопе.

xxx/ Здесь и в дальнейшем так обозначена стандартная программа.

Эта программа рассматривает всю кривую^{x/} в виде отдельных отрезков, хорошо описываемых кривой четвертого порядка (брались отрезки по 15 точек). Если точек в последнем отрезке оставалось меньше 15, то он дополнялся до 15 за счет точек предыдущих отрезков. Если же точек оказывалось вообще меньше 15, то брались все точки кривой. После выделения из трека первых 15 точек программа при помощи программы выброса^{/1/} производит выброс "плохих" точек в этой группе точек. Затем выделяется следующая группа точек и снова производится выброс в выделенной группе и т.д.

Выброс точек программой производится по информации о месте нахождения координат x , y и z , ячейки для числа точек без единицы и ячейки для величины допустимой дисперсии для отклонения.

В результате работы СП по гладкости кривой в проекции на плоскость $x = 0$ производится выброс точек в пространстве. Сглаженная кривая помещается на прежнем месте, число точек после выброса указывается в другой ячейке. Если выброс производится для плоской кривой, то в качестве z должны указываться любые свободные ячейки.

§ 5. Нахождение нулевого приближения для скорости частицы

Для нахождения нулевого приближения вначале использовалась \bar{V} -ая программа из^{/1/}, которая проводила через точки параболу, а затем по параметрам параболы находила радиус кривизны трека. Поскольку парабола хорошо описывает только высоко энергетичные частицы, мы получали сравнительно плохое нулевое приближение. В дальнейшем была сделана специальная стандартная программа, которая через точки пространства проводит винтовую линию. Программой получаются радиус кривизны и направляющие косинусы касательной к винтовой линии в точке взаимодействия (первая точка). Считаются также корреляционная матрица для выдаваемых величин и проекция первой точки на винтовую линию. Однако для счета по данной программе до настоящего времени эти величины не использовались.

Приведем последовательность операций, выполняемых стандартной программой, и формулы для этих операций.

1/ Работа СП начинается с поворота системы координат. Производится переход из оптической системы координат в систему координат с осью z , параллельной задаваемому вектору магнитного поля $\vec{H} = \{H_x, H_y, H_z\}$

$$x' = \frac{H_x H_z}{|\bar{H}| \sqrt{H_x^2 + H_y^2}} x + \frac{H_y H_z}{|\bar{H}| \sqrt{H_x^2 + H_y^2}} y + \frac{\sqrt{H_x^2 + H_y^2}}{|\bar{H}|} z ; \quad (2)$$

$$y' = - \frac{H_y}{\sqrt{H_x^2 + H_y^2}} x + \frac{H_x}{\sqrt{H_x^2 + H_y^2}} y ;$$

$$z' = \frac{H_x}{|\bar{H}|} x + \frac{H_y}{|\bar{H}|} y + \frac{H_z}{|\bar{H}|} z .$$

^{x/} Может быть задана уже любым числом точек.

2/ Проведение окружности через проекцию трека на плоскость $z = 0$.

Сначала через проекцию трека на плоскость по методу наименьших квадратов проводится прямая линия

$$y' = cx' + D. \quad (3)$$

Затем производится преобразование системы координат в плоскости $z = 0$ так, чтобы ось x новой системы координат (обозначим ее (x, x)) была направлена вдоль прямой (3):

$$x'' = \frac{x}{\sqrt{1+c^2}} + \frac{cy}{\sqrt{1+c^2}} - \frac{1}{n\sqrt{1+c^2}} \left(c \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n x_i \right),$$

$$y'' = \frac{cx}{\sqrt{1+c^2}} - \frac{y}{\sqrt{1+c^2}} + \frac{D}{\sqrt{1+c^2}}. \quad (4)$$

Чтобы избежать решения нелинейной задачи при проведении окружности через точки проекции трека, применяется итерационный метод, основанный на проведении сначала параболы, а затем нахождении поправки к параболе.

Пусть дана окружность $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

После тождественных преобразований можно записать^{x/}

или
$$y = \frac{1}{2y_0} x^2 - x \frac{x_0}{y_0} + \frac{x_0^2 + y_0^2 - R^2}{2y_0} + \frac{y^2}{2y_0}$$

$$y = ax^2 + \beta x + \gamma + ay^2,$$

где

$$a = \frac{1}{2y_0},$$

$$\beta = -\frac{x_0}{y_0},$$

$$\gamma = \frac{x_0^2 + y_0^2 - R^2}{2y_0}.$$

Итерационный процесс строим далее по схеме

$$y = a_i x^2 + \beta_i x + \gamma_i + a_{i-1} y^2. \quad (6)$$

В качестве a_0 берем нуль, т.е. сначала по методу наименьших квадратов проводим параболу, а затем последовательно вносим поправки по формуле (6), каждый раз решая только линейную задачу по нахождению a , β , γ по методу наименьших квадратов. В конце итерационного процесса (делается 4 итерации) мы имеем a , β , γ и их корреляционную матрицу.

Находим далее

$$y_0 = \frac{1}{2a}, \quad (7)$$

$$x_0 = -\beta \frac{1}{2a},$$

$$R = \sqrt{\frac{\gamma}{a} + \frac{1}{4a^2} + \frac{\beta^2}{4a^2}}.$$

Очевидно, сходимость будет особенно хорошей, когда $ay^2 \ll y$. Не доказывая сходимости, скажем, что она будет хорошей и для одной четверти окружности (проверено экспериментально).

x/ Предполагается пока только, что $y_i \neq 0$.

3/ Далее, исходя из формул для винтовой линии,

$$x'' = x_0 + R \cos \phi \quad (8)$$

$$y'' = y_0 + R \sin \phi$$

$$z'' = z_0 + \lambda \phi$$

В плоскости x, ϕ проводим по методу наименьших квадратов прямую $x'' = x_0 + \lambda \phi$, где угол ϕ для каждой точки находится по формуле

$$\phi_i = \text{Arc sin} \frac{y_i'' - y_0}{\sqrt{(y_i'' - y_0)^2 + (x_i'' - x_0)^2}} \quad (9)$$

Корреляционную матрицу для λ и x_0 находим, как обычно, через обратную матрицу алгебраической системы для нахождения λ и x_0 , а также через значение функционала в минимуме. При нахождении λ и x_0 мы считаем, что искомые величины не имеют корреляции с R .

Находим направляющие косинусы касательного вектора к винтовой линии в первой точке

$$\vec{r} = \{ \cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3 \}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + \lambda^2}} \cos \phi_1, \\ \cos \alpha_2 &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + \lambda^2}} \sin \phi_1, \\ \cos \alpha_3 &= \frac{\lambda}{\sqrt{R^2 + \lambda^2}}, \end{aligned} \quad (11)$$

а ϕ_1 дается формулой (9). Вектор \vec{r} , определяемый формулами (10) и (11), получается в системе координат (x, y, z) . Для перехода к оптической системе координат делаются преобразования, обратные к (4), а затем к (2).

В целях упрощения программы все преобразования систем координат сделаны при помощи СП умножения матрицы на вектор и СП оборачивания матриц.

Счет корреляционной матрицы для $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3, R$ также производится при помощи СП, описанной в следующем параграфе. При этом формулы, выражающие выдаваемые величины через исходные случайные величины $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$, явно не выписывались, а была задана последовательность их вычисления: счет по формулам (7), (9), (11), а затем преобразования, обратные к (4) и (2).

§ 6. Счет матрицы ошибок для системы "m" функций, зависящих от "n" случайных величин

В целях упрощения формул и программы для счета ошибок и корреляций между функциями была сделана специальная стандартная программа. Эта программа по исходной матрице ошибок $\| \sigma_{jk} \|$ для входящих случайных величин и по формулам для "m" функций, зависящих от этих случайных величин, а также по значениям приращений для счета числен-

ным способом производных от функций, выдает корреляционную матрицу и отдельно значения функций и их дисперсий в указанных местах. Счет ведется по формуле (см., например /2/)

$$\overline{\Delta f_i \Delta f_k} = \sum_{j,l}^n \frac{\partial f_i}{\partial a_j} \frac{\partial f_k}{\partial a_l} \sigma_{j,l} \quad , \quad 1 \leq i, k \leq m \quad .$$

Частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial a_j}$ считаются численно, // $\sigma_{j,l}$ // - исходная корреляционная матрица для случайных величин a_1, a_2, \dots, a_n . $\overline{\Delta f_i \Delta f_k}$ - элемент корреляционной матрицы для функций $f_i(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

§ 7. Нахождение функционала для расстояния между двумя системами точек

Пусть даны две системы точек M_i и \tilde{M}_n , $1 \leq i \leq I$, $1 \leq n \leq N$. Определим функционал для расстояния между этими системами точек следующим образом

$$\Phi = \sum_{i=1}^I R_i^2 \quad ,$$

где R_i - расстояние от точки M_i первой системы до точек второй системы.



Р и с. 2.

Расстояние R_i находится следующим образом. Сначала среди второй системы точек находится точка \tilde{M}_n , ближайшая к точке M_i . Затем берутся точки $\tilde{M}_{n-1}, \tilde{M}_{n+1}$, или, если точка \tilde{M}_n лежит на конце кривой, берутся соответственно точки \tilde{M}_2, \tilde{M}_3 , либо $\tilde{M}_{N-1}, \tilde{M}_{N-2}$. Через точки $\tilde{M}_{n-1}, \tilde{M}_n, \tilde{M}_{n+1}$ x/ проводится плоскость:

$$(\bar{n} \bar{r}) = 0 \quad , \quad (12)$$

где $\bar{r} = \{x - x_{n-1}, y - y_{n-1}, z - z_{n-1}\}$ - текущий вектор, \bar{n} - единичный вектор, нормальный к плоскости (12) и равный

$$\bar{n} = \frac{[\bar{r}_1, \bar{r}_2]}{r_1 r_2 \sin \alpha} \quad , \quad (13)$$

где

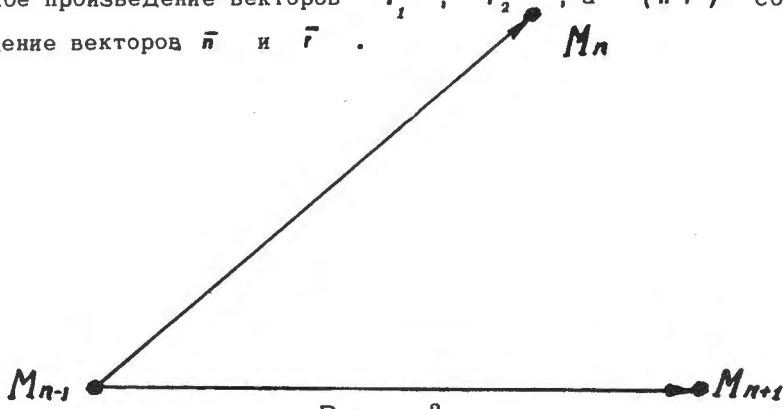
$$\bar{r}_1 = \{x_n - x_{n-1}, y_n - y_{n-1}, z_n - z_{n-1}\} \quad ,$$

$$\bar{r}_2 = \{x_{n+1} - x_{n-1}, y_{n+1} - y_{n-1}, z_{n+1} - z_{n-1}\} \quad .$$

α - угол между \bar{r}_1 и \bar{r}_2 .

x/ В дальнейшем знак "тильда" над буквой M_n будем опускать, так как при рассмотрении будет ясно, о какой системе точек идет речь.

$[\vec{r}_1, \vec{r}_2]$ - векторное произведение векторов \vec{r}_1, \vec{r}_2 , а (\vec{n}, \vec{r}) - соответственно скалярное произведение векторов \vec{n} и \vec{r} .



Р и с. 3.

Расстояние R_i определяем далее как расстояние от точки M_i до параболы, проведенной в плоскости (12) через точки M_{n-1}, M_n, M_{n+1} .

$$R_i = \sqrt{h^2 + s^2}, \quad (14)$$

где h - расстояние от точки M_i до плоскости (12)

$$h = (\vec{n}, \vec{r}_i), \quad (15)$$

$$\vec{r}_i = \{x_i - x_{n-1}, y_i - y_{n-1}, z_i - z_{n-1}\}$$

s - расстояние от проекции точки M_i на плоскость (12) до параболы, проходящей через точки M_{n-1}, M_n, M_{n+1} .

Для того, чтобы упростить формулу, выражающую s , предварительно был сделан переход к системе координат с началом в точке

$$M(x_0, y_0, z_0) = M\left(\frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}, \frac{y_{n-1} + y_{n+1}}{2}, \frac{z_{n-1} + z_{n+1}}{2}\right),$$

с осью z , параллельной вектору \vec{n} , и осью x , идущей вдоль \vec{r}_2 .

Формулы преобразования

$$\begin{aligned} z' &= (\vec{n}, \vec{\rho}), \\ x' &= \frac{(\vec{r}_2, \vec{\rho})}{r_2}, \\ y' &= \frac{([\vec{n}, \vec{r}_2], \vec{\rho})}{r_2}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\vec{\rho} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$.

В этой системе координат расстояние s определим как расстояние между проекцией точки M_i и параболой, проходящей через точки M_{n-1}, M_n, M_{n+1} , по прямой, параллельной оси y' , т.е.

$$s = y'_n \frac{(x'_i - x'_{n-1})(x'_i - x'_{n+1})}{(x'_n - x'_{n-1})(x'_n - x'_{n+1})} - y'_i. \quad (17)$$

Формулы (14), (15), (17) для расстояния между точкой M_i и параболой в плоскости хорошо работают только тогда, когда системы точек лежат близко друг к другу. В начальный же период процесса, когда системы точек могут быть расположены далеко друг от друга, определение расстояния s по (17) может оказаться завышенным. Для исправления этого недостатка для формулы (14) берется не s , а меньшее из s и $r_{i,n}$, где $r_{i,n}$ - расстояние между точками M_i и M_n .

В соответствии с вышенаписанным сделана стандартная программа в системе ИС-2, которая по информации о месте нахождения систем точек и числа точек в них выдает как значение функционала

$$\Phi = \sum R_i^2,$$

так и расстояния R_i от каждой M_i первой системы точек до точек второй системы.

§ 8. Магнитное поле

Магнитное поле камеры, в которой производились снимки треков, было осесимметричным относительно оси z ,

$$\vec{H} = \{ H_z(z, \rho); H_\rho(z, \rho); 0 \}.$$

Поэтому для его описания было достаточно дать значение поля в плоскости $y=0$. Была измерена только H_z - компонента магнитного поля с точностью до ± 15 эрстед. Вторая ненулевая компонента магнитного поля находилась из уравнения $\text{div } \vec{H} = 0$ и значения поля H_z в плоскости $y=0$.

$$\text{div } \vec{H} = \frac{\partial H_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\rho)}{\partial \rho} = 0. \quad (18)$$

Интегрируя (18) по ρ , получаем для значения радиальной компоненты поля

$$H_\rho(z, \rho) = \frac{1}{\rho} \int_0^z \frac{\partial H_z(z', \rho')}{\partial z'} \rho' d\rho'.$$

Из уравнения (18) и ограниченности $\frac{\partial H_z}{\partial z}$ следует, что постоянная интегрирования уравнения (18) равна нулю.

Действительно, предположим, что $H_\rho(z, 0) \neq 0$. Тогда разложение $H_\rho(z, \rho)$ будет иметь вид

$$H_\rho = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(z) \rho^i, \quad (19)$$

где $a_0 \neq 0$. Подставляя (19) в (18), будем иметь

$$\sum_{i=0}^{\infty} a'_i(z) \rho^i + 1/\rho \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) a_i(z) \rho^i = 0.$$

Устремляя ρ к нулю, получим $1/\rho a_0(z) = 0$, что противоречит предположению о неравенстве $H_\rho(z, 0)$ нулю.

Первоначально обработка велась при помощи программ интерполяции по H_z и H_ρ , задаваемых в виде двумерной таблицы, а затем для ускорения счета магнитное поле было представлено в виде двойных рядов по полиномам Лежандра:

$$H_z(z, \rho) = \sum_{l,k} \alpha_{lk} P_l \left(\frac{2z - z_k - z_n}{z_k - z_n} \right) P_k \left(\frac{2\rho - \rho_k}{\rho_k} \right),$$

$$H_\rho(z, \rho) = \sum_{l,k} \beta_{lk} P_l \left(\frac{2z - z_k - z_n}{z_k - z_n} \right) P_k \left(\frac{2\rho - \rho_k}{\rho_k} \right),$$

где

$$a_{lk} = 1/N \int_{z_n}^{z_k} \int_0^{\rho_k} H_z(z', \rho') P_l \left(\frac{2z' - z_k - z_n}{z_k - z_n} \right) P_k \left(\frac{2\rho' - \rho_k}{\rho_k} \right) d\rho' dz'$$

и, соответственно,

$$\beta_{lk} = 1/N \int_{z_n}^{z_k} \int_0^{\rho_k} H_\rho(z', \rho') P_l \left(\frac{2z' - z_k - z_n}{z_k - z_n} \right) P_k \left(\frac{2\rho' - \rho_k}{\rho_k} \right) d\rho' dz' ,$$

$$N = \int_{z_n}^{z_k} \int_0^{\rho_k} P_l^2 \left(\frac{2z' - z_k - z_n}{z_k - z_n} \right) P_k^2 \left(\frac{2\rho' - \rho_k}{\rho_k} \right) d\rho' dz' = \frac{(z_k - z_n) \rho_k}{(2l+1)(2k+1)} .$$

Необходимо отметить, что программа обработки данных работает независимо от вида задания поля, так как она написана в расчете на произвольное магнитное поле со всеми компонентами:

$$\vec{H} = \{ H_z(z, \rho, \phi); H_\rho(z, \rho, \phi); H_\phi(z, \rho, \phi) \} .$$

§ 9. Уравнения движения частицы в магнитном поле

Движение частицы в магнитном поле описывается уравнением Ньютона

$$(\pi \dot{\vec{r}})' = \frac{e}{c} [\dot{\vec{r}} \vec{H}] + \vec{F}_{\text{тр}} , \quad (20)$$

где $\frac{e}{c} [\dot{\vec{r}} \vec{H}]$ - сила Лоренца, $\vec{F}_{\text{тр}}$ - сила торможения, описываемая формулой^{/3/}

$$\vec{F}_{\text{тр}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = B z^2 \left(\ln \frac{\beta^2}{1-\beta^2} - \beta^2 + g \right) \frac{\vec{\beta}}{\beta^3} , \quad (21)$$

где для камеры Вильсона, содержащей только один элемент,

$$B = 4N \left(\frac{Z}{A} \right) \pi r_0^2 m_0 c^2 \rho ,$$

$$g = \ln \frac{2 m_0 c^2}{I(z)} .$$

Здесь

$N = 6,02472 \cdot 10^{23} (\text{г.моль})^{-1}$ - число Авогадро,

$m_0 c^2 = 0,51098 \text{ Мэв}$ - энергия покоя электрона,

$r_0 = 2,8178 \cdot 10^{-13}$ - классический радиус электрона,

$I(z)$ - потенциал ионизации для газа, наполняющего камеру,

ρ - плотность этого газа,

$\left(\frac{Z}{A} \right)$ - отношение заряда ядра для газа, наполняющего камеру, к его атомному весу,

$\beta = \frac{v}{c}$ - относительная скорость,

z - заряд движущейся частицы.

Для исследуемого случая, когда в камере содержалась смесь трех газов: водорода, кислорода и углерода

$$B = 4N \pi r_e^2 m_e c^2 \left(\frac{Z_H}{A_H} \rho_H + \frac{Z_O}{A_O} \rho_O + \frac{Z_C}{A_C} \rho_C \right)$$

$$g = \frac{\frac{Z_H}{A_H} \rho_H \ln \frac{2m_e c^2}{I_H} + \frac{Z_O}{A_O} \rho_O \ln \frac{2m_e c^2}{I_O} + \frac{Z_C}{A_C} \rho_C \ln \frac{2m_e c^2}{I_C}}{\frac{Z_H}{A_H} \rho_H + \frac{Z_O}{A_O} \rho_O + \frac{Z_C}{A_C} \rho_C}$$

Формула (21) перестает правильно описывать силу торможения при малых β ($\beta = \tilde{\beta} = 0,01$), когда скорость налетающей частицы делается соизмеримой со скоростью K -электронов^{3/}.

Для $\beta = \sqrt{\frac{e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}} \approx 0,0067$ при $g = 10$ сила торможения по формуле (21) обращается в нуль, а для еще меньших β она становится положительной.

Однако поскольку пробег частицы для $\beta = \tilde{\beta}$ очень мал (меньше 1 мм), при достижении скорости $\beta = \tilde{\beta}$ считалось, что частица уже остановилась. Предполагалось, что потенциал ионизации не зависит от скорости налетающей частицы и для них брались следующие значения

$$I_H = 12,5, \quad I_O = 12,5 \cdot 8, \quad I_C = 12,5 \cdot 6.$$

Учитывалось изменение с течением времени процентного состава газа в камере.

Для интегрирования уравнения движения (20) использовалась стандартная программа нахождения траектории частицы в электромагнитном поле. Эта программа интегрирует в цилиндрической системе координат уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{v}_r &= A_0 \sqrt{1-\beta^2} [A_r - v_r A] + \alpha \frac{\alpha}{r}, \\ \dot{\alpha} &= A_0 \sqrt{1-\beta^2} [A_\phi - \alpha A] - v_r \frac{\alpha}{r}, \\ \dot{v}_z &= A_0 \sqrt{1-\beta^2} [A_z - v_z A], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A &= v_r A_r + \alpha A_\phi + v_z A_z, \\ A_r &= \alpha E_r + (\alpha H_z - v_z H_\phi), \\ A_\phi &= \alpha E_\phi + (v_z H_r - v_r H_z), \\ A_z &= \alpha E_z + (v_r H_\phi - \alpha H_r), \\ \dot{r} &= v_r, \quad \dot{\alpha} = r \dot{\phi}, \quad \dot{z} = v_z; \\ A_0 &= \frac{A_{00}}{M} \end{aligned}$$

$$A_{00} = 0,3 \cdot 10^{-6}, \quad \alpha = 10/3 - \text{константы программы.}$$

$M = \frac{m e g}{e m_p}$, где m - масса частицы, e - ее заряд, m_p - масса протона, e_p - заряд протона. Магнитное поле $\vec{H} = \{H_z, H_\rho, 0\}$ получалось в соответствии с § 8, а в качестве электрического поля бралось

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{\text{ТФ}}}{e}.$$

Для программы необходимо также задавать начальные значения

$$M(x_1, y_1, z_1) \text{ и } \vec{\beta}_0 = \{ \dot{z}, \dot{\rho}, \rho \dot{\phi} \}.$$

В конце интегрирования стандартная программа выдает пространственные координаты траектории. Поскольку момент окончания интегрирования по времени заранее не известен, то предусматривалось окончание интегрирования по ряду признаков:

1. Когда частица выходит из камеры, интегрирование прекращается.
2. Проверка на монотонность изменения β , β может только убывать, если же происходит увеличение β , интегрирование прекращается.
3. Проверка на малость β . Когда β делается меньше $\beta \approx 0,01$, интегрирование прекращается.
4. Интегрирование прекращается также, когда длина пробега частицы при интегрировании делается больше, чем длина пробега, посчитанная по измеренным точкам в виде суммы ломаных.

В конце работы программы интегрирования уравнений, если выход из программы происходит по условиям 2, 3, выдается и длина пробега частицы до остановки; при выходе же из программы по условиям 1, 4 выдается пробег частицы только в камере.

§ 10. Поле направлений

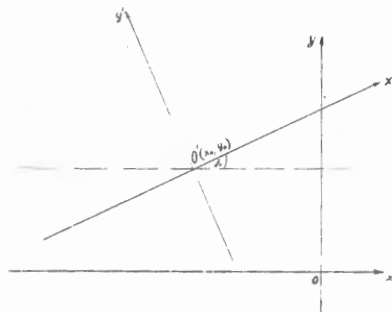
Так как на снимках при рабочем режиме камеры видны только траектории протонов, а пучок мезонов не виден, необходимо было исследовать его заранее и затем при обчете треков использовать готовые данные о пучке.

Для составления модели поля было измерено при специальном режиме камеры около 30 треков мезонов. Через эти треки по методу наименьших квадратов были проведены винтовые линии и получены все их характеристики. Оказалось, что исходный пучок может быть хорошо смоделирован.

1. Сначала, исходя из модели, дадим формулы для нахождения поля направлений в каждой точке пучка, а затем поясним эту модель. Прежде всего было установлено, что трек не строго горизонтален, а имеет наклон такой, что $\sin \alpha_3 = -0,0057$, где $\cos \alpha_3$ — проекция на ось z касательного к пучку единичного вектора.

В проекции (x, y) направление находилось следующим образом. Координаты точки взаимодействия $M(x_1, y_1, z_1)$ из оптической системы преобразуем в систему координат с началом в середине пучка (x_0, y_0) и с осью x' , направленной вдоль пучка

$$\begin{aligned} x' &= (x_1 - x_0) \cos \xi_0 + (y_1 - y_0) \sin \xi_0 \\ y' &= -(x_1 - x_0) \sin \xi_0 + (y_1 - y_0) \cos \xi_0 \end{aligned}$$



Р и с. 4.

Находим

$$\Delta(\operatorname{tg} a) = \gamma \frac{\gamma'}{1 + x' \gamma'} \quad (23)$$

$$\operatorname{tg} \tilde{a} = \operatorname{tg} \xi_0 - \Delta(\operatorname{tg} a)$$

и

$$\tilde{a} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} [\operatorname{tg} \xi_0 - \Delta(\operatorname{tg} a)] \quad (24)$$

Учитывая поправку на окружность, получаем для угла:

$$a = \operatorname{arc} \operatorname{tg} [\operatorname{tg} \xi_0 - \Delta(\operatorname{tg} a)] + \frac{x'}{R} \quad (25)$$

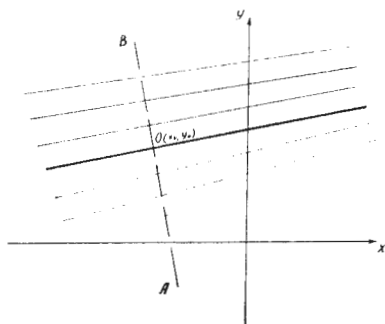
и вектор касательной к траектории мезона в точке взаимодействия будет:

$$\vec{n} = \{ \sin a_3, \cos a_3; \sin a_3, \sin a_3; \cos a_3 \} .$$

Величины $\cos a_3$, ξ_0 , γ , R получены при обработке траекторий пучка по методу наименьших квадратов. Наименее точно определяется величина ξ_0 .

2. Пояснения к модели.

Если через траектории мезонов провести по методу наименьших квадратов прямые линии, то в проекции на плоскость $z = 0$ получается семейство расходящихся прямых.



Р и с. 5.

Далее примерно через середину пучка проводилась прямая АВ, перпендикулярная к одной из прямых (с углом наклона ξ_0) в середине пучка. Обозначим через h расстояние по АВ от данной прямой с углом наклона ξ_0 до других прямых.

Была исследована зависимость углов наклона прямых (вернее, тангенсов углов) от расстояния h . Оказалось, что она хорошо описывается линейной функцией

$$\operatorname{tg} \xi = h \gamma + \operatorname{tg} \xi_0 .$$

При помощи метода наименьших квадратов было получено $\gamma = 0,0020$

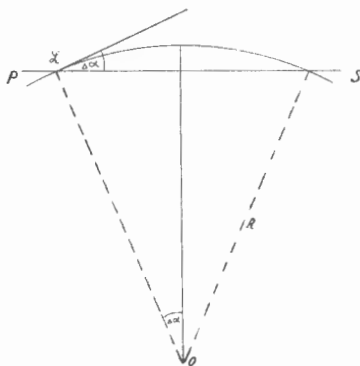
и

$$\operatorname{tg} \xi_0 = 0,532$$

$$\sigma_{\operatorname{tg} \xi_0} = 0,0046 . \quad (27)$$

Таким образом, поле направлений в предположении, что оно моделируется системой прямых, проведенных по методу наименьших квадратов через траектории мезонов, теперь можно описать формулами (22), (23), (24), т.е. за ось x' выбирается прямая, проходящая через точку $O(x_0, y_0)$ и имеющая угол наклона с осью x , равный ξ_0 .

Для учета кривизны траектории мезона рассматриваем траекторию мезона (окружность с центром O').



Р и с. 6.

Пусть z будет точка, в которой нужно найти угол наклона. Если пользоваться моделью прямых, это будет угол наклона прямой PS (формула(24)). Для учета же кривизны трека мы должны добавить к углу наклона еще $\Delta \alpha$, равное с необходимой точностью $\frac{x'}{R}$, т.е. получается формула (25).

Конечно, формулы (22)-(25) дают картину математически неадекватную семейству расходящихся окружностей (а такое представление наиболее естественно из физики явления). Однако с той точностью, с которой нам известно вообще поле направлений, они достаточно точно описывают его.

Надо отметить, что были сделаны попытки обнаружить закономерность в радиусе кривизны и направлении траекторий мезонов в зависимости от координаты z , однако, ее не оказалось.

§ 11. Заключительный этап обработки

В этом параграфе приводятся формулы, по которым ведется счет на заключительном этапе обработки трека после подбора оптимальных значений β , θ , ϕ - относительной скорости частицы и ее сферических азимутального и меридионального углов, а также считаются и выдаются на печать:

1. Импульс частицы

$$P = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} 938,23 \left[\frac{M_{\text{мез}}}{c} \right] = \Delta_1 \quad (28)$$

2. Направляющие косинусы для импульса

$$\vec{r} = \frac{\vec{P}}{|\vec{P}|} = \{ \cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3 \}, \quad (29)$$

где

$$\cos \alpha_1 = \sin \theta \cos \phi = \Delta_2 ,$$

$$\cos \alpha_2 = \sin \theta \sin \phi = \Delta_3 ,$$

$$\cos \alpha_3 = \cos \theta = \Delta_4 ;$$

3. Угол между касательной \vec{r}_p к траектории частицы и касательной \vec{r}_μ к траектории мезона в точке взаимодействия в лабораторной системе отсчета:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\cos \theta_1) = \Delta_5 \quad (30)$$

$$(\vec{r}_p \cdot \vec{r}_\mu) = (\cos \alpha \cdot \cos \alpha_1 + \sin \alpha \cos \alpha_2) \cdot \cos \xi + \cos \alpha_3 \sin \xi ,$$

$$\alpha = \bar{\alpha} + \frac{x'}{R} , \quad x' = (x - x_0) \cos \xi_0 + (y - y_0) \sin \xi_0 ,$$

$$\bar{\alpha} = \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} \xi_0 - \gamma \frac{y'}{1 + x'y} \right] ,$$

$$y' = -(x - x_0) \sin \xi_0 + (y - y_0) \cos \xi_0 .$$

Поскольку основная ошибка в α происходит от ошибки в ξ_0 (максимально возможная поправка за счет γ и $\frac{x'}{R}$ лишь вдвое-втрое превышают ошибку из-за ξ_0) считалось, что $\sigma_\alpha = \sigma_{\xi_0}$.

Из результатов обработки пучка мезонов (поле направлений) известно

$$\sin \xi_0 = -0,0057 \quad (\S 10)$$

$$\sigma_{\sin \xi_0} = 0,0045 .$$

4. Угол между траекториями частицы и мезона, а также импульс частицы в системе центра масс

$$\theta_{ц} = \operatorname{Arc} \sin \frac{P'_\perp}{\sqrt{P'^2_\perp + P'^2_\parallel}} = \Delta_6 , \quad (31)$$

$$P_{ц} = \sqrt{P'^2_\perp + P'^2_\parallel} = \Delta_7 ,$$

где

$$P'_\perp = P \cdot \sin \theta_1 , \quad (32)$$

$$P'_{\parallel} = \left(P \cos \theta_1 - \frac{m}{m_0} \frac{938,2}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{P_{о\mu}}{\frac{m}{m_0} \sqrt{1-\beta^2} + \sqrt{(139,4)^2 + P_\mu^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{P_{о\mu}}{\frac{m}{m_0} \sqrt{1-\beta^2} + \sqrt{(139,4)^2 + P_\mu^2}}}}$$

$$P_\mu^2 = P^2 + P_{о\mu}^2 - 2P_{о\mu} \cdot P \cdot \cos \theta_1 ,$$

$$P_{о\mu} = 3600 , \quad \sigma_{P_{о\mu}} = 70 ,$$

m - масса частицы, m_0 - масса протона.

5. Азимутальный угол

$$\theta_{\text{азим.}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\cos \alpha_1}{\sin \theta_1} = \Delta_8 . \quad (33)$$

Азимутальный угол - это угол между осью x и проекцией трека на плоскость, перпендикулярную к траектории мезона.

Считаются также ошибки в величинах Δ_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) по формуле (по стандартной программе, описанной в § 6)

$$\sigma_{ei} = \sum_{j,k} \frac{\partial \Delta_e}{\partial x_j} \frac{\partial \Delta_i}{\partial x_k} \sigma_{jk} \quad e, i = 1, \dots, 8, \quad (34)$$

где

$$\| \sigma_{jk} \| = \begin{array}{cccccc} x_1 = \beta & & & & x_4 = P_{o\mu} & \\ x_2 = \theta & & & & x_5 = a & \\ x_3 = \phi & & & & x_6 = \sin \xi & \\ \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{P_{o\mu}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\sin \xi}^2 \end{array} \quad (35)$$

где $\| \sigma_{jk} \|$, $j, k = 1, 2, 3$ матрица ошибок считается и выдается стандартной программой минимизации функционала в процессе подбора оптимальных значений β , θ , ϕ . В матрице ошибок (35) отсутствуют, как мы уже отмечали, члены, учитывающие ошибку за счет γ , R в формулах (31) вследствие малости вклада от них в ошибку.

§ 12. Организация обчета данных

Кратко об обработке информации сказано во введении. Здесь мы еще раз остановимся на последовательности обработки с указанием формул, по которым на каждом этапе ведется счет, или со ссылками на соответствующий параграф, где описан алгоритм счета.

Работа программы начинается с обновления барабана всей программы и ввода группы материала с несколькими событиями с общим числом ячеек не больше чем 450. Событие от события отделяется в случае микроскопного варианта программы двумя, а в случае автоматного — тремя пустыми ячейками. В конце материала помещается признак конца информации (код 777, 7777, 7777, 7777). Обрабатывается сначала первое событие. Первая часть обработки события заканчивается восстановлением пространственных координат траектории частицы. В эту часть входит для случая автоматной программы запись числа в нормальной форме и восстановление плоской картины (§ 1), выброс "плохих" точек (§ 4), нахождение соответственных точек на правом и левом кадрах и восстановление пространственных точек (§2). Для случая обработки данных, поступающих с микроскопа, сначала имеет место переход к оптической системе координат в соответствии с реперными точками и восстановление пространственных координат (§ 3), а затем выброс "плохих" точек (§ 4) в пространстве по гладкости проекции трека на плоскость $x = 0$.

Получение нулевого приближения происходит при помощи программы проведения спирали (§ 5). Программа выдает радиус кривизны R и направляющие косинусы $\cos \alpha_1$, $\cos \alpha_2$.

$\cos \alpha_3$ касательного вектора $\vec{r} = \{ \cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3 \}$ к траектории частицы.

Далее по формулам:

$$\beta = \frac{P}{\sqrt{P^2 + \left(\frac{m}{m_0}\right)^2}}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\cos \alpha_3),$$

$$\phi = \text{Arc sin} \frac{\cos \alpha_2}{\sqrt{\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_1}},$$

$$\cos \phi = \frac{\cos \alpha_1}{\sqrt{\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_1}},$$

$$\rho = H(z_1, \rho_1, \phi_1) \cdot R \cdot 0,29979 \cdot 10^{-3}$$

H - в эрстедах, R - в см, m - масса частицы, m_0 - масса протона,
 $M(z_1, \rho_1, \phi_1)$ - точка взаимодействия.

Находим вектор $\vec{\beta}$ в сферической системе координат (β, θ, ϕ) . Далее программой минимизации нелинейного функционала^{/4/}, используя в качестве нулевого приближения β, θ, ϕ , находим их оптимальное значение. При своей работе эта программа для нахождения расстояния между системами двух точек использует программу, описанную в § 7, а также программу интегрирования уравнений движения (§ 9). В качестве начальных значений берется первая точка $M(z_1, \rho_1, \phi_1)$ и скорость частицы в цилиндрической системе координат $\vec{\beta} = \{ \dot{z}, \dot{\rho}, \rho \dot{\phi} \}$, где

$$\dot{z} = \beta \cos \theta. \tag{36}$$

$$\dot{\rho} = \beta (\cos \phi_1 \cdot \cos \phi + \sin \phi_1 \cdot \sin \phi) \sin \theta$$

$$\rho \dot{\phi} = \beta (\cos \phi_1 \cdot \sin \phi - \sin \phi_1 \cdot \cos \phi) \sin \theta.$$

Поскольку программа для минимизации функционала для улучшения процесса сходимости за счет уменьшения корреляции между искомыми величинами подбирает оптимальные значения $\vec{\beta}$ в сферической системе координат, а программа интегрирования уравнений движения работает в цилиндрической системе, в процессе последовательных приближений происходит пересчет от β, θ, ϕ к $\dot{z}, \dot{\rho}, \rho \dot{\phi}$ по формулам (36). Необходимые для минимизации производные от R_i по β, θ, ϕ считаются численным способом. После нахождения оптимальных значений величин β, θ, ϕ и их корреляционной матрицы находятся направляющие косинусы для поля направлений (§ 10), далее по формулам параграфа 11 готовятся данные для выдачи и происходит выдача материала. По окончании выдачи происходит проверка на конец информации и, если еще не все события посчитаны, то производится счет следующего события. В случае, когда все посчитано, производится переход к счету контрольного варианта и, если он считается правильно (сумма полученного результата совпадает с таковой, имеющейся в памяти), то происходит ввод следующей группы материала.

Программа сделана так, что процессом счета можно управлять с пульта. На пульте набирается дисперсия, по которой производится выброс, точность, по достижении которой прекращается дальнейшее уточнение параметров β , θ , ϕ , число итераций, при котором происходит выход из программы независимо от достигнутой точности.

Для случая частиц, останавливающихся в камере, сделан вариант программы, который учитывает и пробег частицы в камере. При этом минимизируется функционал

$$\Phi = \sum R_i^2 + (\ell_{\text{изм.}} - \ell)^2, \quad (37)$$

где $\ell_{\text{изм.}}$ - длина пробега, посчитанного по измеренным точкам, а ℓ - пробег, полученный при интегрировании уравнений движения.

В этом варианте программы нулевое приближение для импульса находится из таблицы $p(\ell)$ (ℓ - пробег частицы). Таблицы $\ell(p)$ считаются предварительно по формуле

$$\ell(p) = \int_0^p \frac{dp}{dp/d\ell},$$

где

$$\frac{dp}{d\ell} = A \left(\frac{p^2 + m^2}{p^2} \right)^{3/2} \left[\ell_n \frac{p^2}{m^2} - \frac{p^2}{p^2 + m^2} + g \right].$$

Использование в качестве функционала формулы (37) значительно ускоряет сходимость итерационного процесса и существенно уменьшает корреляцию между β и углами θ и ϕ .

Необходимо отметить, что программа обработки сделана в расчете на то, что величины B и g в члене, учитывающем торможение (21), также могут находиться из траекторных измерений. Однако при одновременном подборе пяти величин β , θ , ϕ , B , g ошибки получаются большими из-за большой корреляции, особенно между B и β .

В заключение считаем своим приятным долгом выразить благодарность сотрудникам Лаборатории высоких энергий Л. Струнову, В. Свиридову, А. Номофилову, Л. Слепец и В. Никитину за обсуждение работы в процессе ее выполнения, а также сотруднику Математического института Чехословацкой Академии Наук П. Либлу за участие в обсуждении математической постановки задачи.

Цитированная литература

1. Н.Н. Говорун, Е.П. Жидков, Л.И. Лепилова, Г.И. Макаренко, Г.Н. Тентюкова. "Обработка экспериментальных данных, поступающих с просмотровых автоматов". Препринт ОИЯИ 1102 Дубна 1962 год.
2. И.В. Дунин-Барковский, Н.В. Смирнов, Теория вероятностей и математическая статистика в технике, ГИТТЛ, 1955.
3. Основные формулы физики. Под редакцией Мензела. Изд. иностр. лит. Москва 1957 г., стр. 460.
4. С.Н. Соколов, И.Н. Силин. "Нахождение минимумов функционалов методом линеаризаций". Препринт ОИЯИ Д-810 Дубна 1961 год.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 октября 1962 г.