СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

11 - 9922

И.В.Амирханов, В.К.Василев, Е.П.Жидков

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСНОЙ ОБЛАСТИ

1976

11 - 9922

И.В.Амирханов, В.К.Василев, Е.П.Жидков

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСНОЙ ОБЛАСТИ

Амирханов И.В., Василев В.К., Жидков Е.П. 11 - 9922

Исследование решений нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами вблизи резонансной области.

Исследуется решение нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами вблизи резонанса $\nu_x = 2/3$. Методом усреднения найдены укороченные уравнения, проведено исследование этих уравнений.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

На диаграмме устойчивости любого конкретного циклического ускорителя трудно выбрать рабочую точку вдали от резонансов: всегда найдется несколько резонансных линий, проходящих вблизи этой точки. Известно, что резонансные явления составляют одну из важнейших причин потерь частиц в пучке.

В связи с этим становится актуальной задача исследования влияния различных нелинейных резонансов на движение частиц в циклических ускорителях.

В математическом отношении эта задача сводится к исследованию системы нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами /I/. Даже в линейном приближении получается уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами (типа уравнения Хилла), и нахождение области устойчивых решений представляется трудоемкой задачей.

Так как частицы в циклических ускорителях обычно проходят огромный путь, совершая большое число оборотов (до нескольких миллионов), то решение исходных уравнений известными численными методами малоэффективно (из-за накопления численных ошибок). Можно воспользоваться методом усреднений /2/ и получить укороченные уравнения, которые либо просто интегрируются, либо позволяют исследовать движение на фазовой плоскости.

В работах /6-9/ было проведено исследование системы нелинейных уравнений вблизи резонанса третьего порядка (т.е, расстройка Δ мала) $2\nu_z - \nu_x = 1$ и $\nu_x = \frac{2}{3}$ при $n_o = const$ (n_o – см. ниже). В данной работе ,в отличие от /6-9/, резонанс $\nu_x = \frac{2}{3}$ исследуется при более общем допущении, а именно $n_o(\theta)$ – периодическая функция θ . Анализ проводится как вблизи резонанса, так и при подходах к резонансной области из нерезонансной зоны (т.е. для произвольных значений расстройки Δ).

I. При анализе резонанса $\nu_x = \frac{2}{3}$ движение частиц рассматриваем в медианной плоскости ($z = 0$). Тогда уравнение бетатронных колебаний можно записать в виде /8-9/

$$x'' + (1 - n_o(\theta))x = \varepsilon \left[V_1(\theta)x^2 + \frac{1}{2}(x')^2 \right], \qquad (\mathrm{I})$$

где

$$V_1(\theta) = (-1 - \frac{2}{3} n_o - \frac{1}{2} n_o^2 + \frac{1}{2} R_o n_1), \qquad (2)$$

R_o – радиус идеальной орбиты, $\varepsilon = \frac{1}{R_o}$ – малый параметр, штрих означает дифференцирование по θ ; n_o и n_1 – связаны с показателем магнитного поля $n(\theta, x)$ соотношением

$$n(\theta, x) = n_o(\theta) + n_1(\theta)x + \frac{1}{2} n_2(\theta)x^2 + \ldots \qquad (3)$$

В общем случае $n_i(\theta)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ – периодические функции и уравнение (I) является нелинейным дифференциальным уравнением с периодическими коэффициентами.

Однородное уравнение, которое получается из (I) при $\varepsilon = 0$, а именно

$$x'' + (1 - n_o(\theta))x = 0, \qquad (4)$$

есть уравнение Хилла. Общее решение (4) можно представить в виде /I/

$$x = a_x \cdot f_x(\theta) \cdot e^{i\nu_x\theta} + a_x^* \cdot f_x^*(\theta) e^{-i\nu_x\theta}, \qquad (5)$$

где $f_x(\theta)$ – периодическая комплексная функция от θ (функция Флоке), a_x, a_x^* – произвольные комплексные постоянные, ν_x – частота бетатронных колебаний.

А.М.Ляпунов /3/ установил, что любая система линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами одного периода может быть приведена с помощью линейной подстановки к системе уравнений с постоянными коэффициентами. Системы уравнений, обладающие подобным свойством, он назвал приводимыми. Теория приводимых уравнений получила дальнейшее развитие в трудах Н.П.Еругина /4/.

В соответствии с этим для уравнения (4) осуществляем следующее преобразование:

$$\begin{aligned} x &= f_{1x}(\theta) y + \frac{1}{\nu_x} f_{2x}(\theta) y', \\ x' &= F_{1x}(\theta) y + \frac{1}{\nu_x} F_{2x}(\theta) y', \end{aligned} \qquad (6)$$

где

$$\begin{aligned} f_{1x}(\theta) &= Re\, f_x(\theta), \\ f_{2x}(\theta) &= Im\, f_x(\theta), \\ F_{1x}(\theta) &= f_{1x}'(\theta) - \nu_x f_{2x}(\theta), \\ F_{2x}(\theta) &= f_{2x}'(\theta) + \nu_x f_{1x}(\theta). \end{aligned} \qquad (7)$$

После подстановки (6) в (I) имеем

$$y'' + \nu_x^2 y = \varepsilon E_y, \qquad (8)$$

где

$$E_y = W_1(\theta) y^2 + W_2(\theta) y y' + W_3(\theta) y' y',$$

$$W_1 = \omega [V_1 f_{1x}^2 + \tfrac{1}{2} F_{1x}^2], \qquad (9)$$

$$W_2 = \frac{\omega}{\nu_x} [2 V_1 f_{1x} f_{2x} + F_{1x} F_{2x}],$$

$$W_3 = \frac{\omega}{2\nu_x} [2 V_1 f_{2x}^2 + F_{2x}^2],$$

$$\omega(\theta) = 1 / (f_{1x} + \frac{1}{\nu_x} f'_{2x}).$$

Причем, $W_i(\theta)$ (i = 1,2,3) – периодические функции от θ, их явный вид зависит не только от функций $n_0(\theta)$ и $n_1(\theta)$, которые связаны с магнитной системой ускорителя, но и от ν_x и $f_x(\theta)$. Для нахождения ν_x и $f_x(\theta)$ разработаны различные приближенные методы /1,5/. Мы предполагаем, что функция Флоке $f_x(\theta)$ и частота ν_x известны, и переходим к исследованию уравнения (8).

Однородное уравнение, которое получается из (8) при $\varepsilon = 0$, есть уравнение с постоянным коэффициентом. Поэтому нелинейное уравнение (8) удобно исследовать методом усреднения /2/ вблизи резонансной частоты ν_x, а также и при подходах к резонансной области из нерезонансной зоны.

2. Исследуем решение уравнения (8) в окрестности резонанса $\nu_x = \frac{2}{3} + \delta$ при $\delta \ll 1$, или

$$\nu_x^2 = \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \varepsilon \cdot \Delta, \qquad (10)$$

где Δ – представляет собой расстройку.

Учитывая (10), уравнение (8) перепишем в виде

$$y'' + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 y = \varepsilon F, \qquad (11)$$

где

$$F = \varepsilon E_y - \Delta \cdot y. \qquad (12)$$

Сделаем в (11) замену переменных /2/, а именно

$$y = a_x \sin\left(\tfrac{2}{3}\theta + \psi_x\right),$$

$$y' = \tfrac{2}{3} a_x \cos\left(\tfrac{2}{3}\theta + \psi_x\right) \qquad (13)$$

Тогда уравнение (11) примет вид

$$a'_x = \tfrac{3}{2} \varepsilon F \cos\left(\tfrac{2}{3}\theta + \psi_x\right),$$

$$\psi'_x = -\tfrac{3}{2} \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{a_x} F \cdot \sin\left(\tfrac{2}{3}\theta + \psi_x\right). \qquad (14)$$

Дифференциальные уравнения, приведенные к виду (14), называют уравнениями в стандартной форме. Усредним систему (14) по методу Крылова-Боголюбова /2/. Усреднение ведется по θ.

После усреднения в первом приближении получим

$$a'_x = \alpha a_x^2 [A \sin(3\psi_x) + B \cos(3\psi_x)] = A_{10},$$

$$\psi'_x = \delta + \alpha a_x [A \cos(3\psi_x) - B \sin(3\psi_x)] = \delta + B_{10}, \qquad (15)$$

где

$$\delta = \varepsilon \cdot \frac{3 \cdot \Delta}{4}, \quad \alpha = \varepsilon \cdot \frac{3}{16},$$

$$A = W_{12}^{(1)} + \tfrac{2}{3} W_{22}^{(2)} - \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 W_{32}^{(1)},$$

$$B = -W_{12}^{(2)} + \tfrac{2}{3} W_{22}^{(1)} + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 W_{32}^{(2)}, \qquad (16)$$

$$W_i(\theta) = W_{i0} + \sum_{n=1}^{\infty} [W_{in}^{(1)} \sin(Nn\theta) + W_{in}^{(2)} \cos(N \cdot n \cdot \theta)],$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Для уравнения (I5) можно найти следующий интеграл движения:

$$A\cos(3\psi_x) - B\sin(3\psi_x) = -\frac{3}{2}\frac{\delta}{\alpha}\frac{1}{a_x} + C\frac{1}{a_x^3}\ , \qquad (I7)$$

где C, постоянная интегрирования, определяется из начальных условий.

Пользуясь интегралом движения (I7) точно так же, как в предыдущих работах /9/, можно провести исследование системы укороченных уравнений.

3. Перейдем к исследованию уравнения (8) в случае $\nu_x = \frac{2}{3} + \delta$, когда δ – произвольная постоянная. После усреднения в первом приближении получим

$$a_x' = A_1(a_x, \psi_x), \qquad (I8)$$
$$\psi_x' = (\nu_x - \tfrac{2}{3}) + B_1(a_x, \psi_x),$$

где A_1 и B_1 находим из системы уравнений

$$(\nu_x - \tfrac{2}{3})\frac{\partial A_1}{\partial \psi_x} - 2a_x\nu_x B_1 = -2\cdot\tfrac{2}{3}\cdot a_x\cdot B_{10}(a_x, \psi_x), \qquad (I9)$$
$$(\nu_x - \tfrac{2}{3})\frac{\partial B_1}{\partial \psi_x} + 2\nu_x A_1 = +2\cdot\tfrac{2}{3}\cdot A_{10}(a_x, \psi_x)\ .$$

Подставив решение уравнения (I9) в (I8), окончательно получим

$$a_x' = \beta a_x^2[A\sin(3\psi_x) + B\cos(3\psi_x)], \qquad (20)$$
$$\psi_x' = (\nu_x - \tfrac{2}{3}) + \beta a_x[A\cos(3\psi_x) - B\sin(3\psi_x)],$$

где

$$\beta = -\alpha\cdot\frac{\frac{4}{3}}{[3(\nu_x - \frac{2}{3}) - 2\nu_x]}\ .$$

Вблизи резонанса, когда выполняется условие (I0), $\beta = \alpha$ с точностью „ε" и уравнение (20) переходит в уравнение (I5). Поэтому уравнение (20) дает возможность изучать поведение системы как вблизи резонанса, так и при подходах к резонансной области из нерезонансной зоны.

Интеграл движения для уравнения (20) имеет вид (I7) с той лишь разницей, что вместо α надо подставить β.

Заключение

Исследование исходного нелинейного уравнения с периодическими коэффициентами условно можно разбить на несколько этапов:

I. Решение линейного уравнения (4) с периодическими коэффициентами (типа уравнения Хилла) и нахождение ν_x и $f_x(\theta)$.

2. Переход от исходных уравнений (I) к другим, более простым (8) с использованием линейного преобразования типа преобразования Ляпунова (6).

3. Применение метода усреднения к уравнениям (8), полученным после преобразования.

4. Исследование укороченного уравнения (I5) или (20) в фазовой плоскости.

Если периодическую функцию $n_1(\theta)$ разложить в ряд Фурье

$$n_1(\theta) = n_{10} + \sum_{\ell=1}^{\infty}[n_{1\ell}^{(1)}\sin(N\ell\theta) + n_{1\ell}^{(2)}\cos(N\cdot\ell\cdot\theta)], \qquad (2I)$$

то при $n_0 = const$ в укороченные уравнения в первом приближении входят только коэффициенты $n_{12}^{(1)}$ и $n_{12}^{(2)}$.

Характерной же особенностью укороченных уравнений (I5) и (20) при $n_0 \neq const$ является зависимость параметров A и B от всех коэффициентов разложения (2I). Подбирая специальным образом эти коэффициенты, можно более точно учесть влияние резонанса $\nu_x = \frac{2}{3}$ при выводе частиц из ускорителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. Теория циклических ускорителей. Физматгиз, М., 1962.
2. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Наука, М., 1974.
3. А.М.Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, 1935.
4. Н.П.Еругин. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Изд-во АН БССР, Минск, 1963.
5. Н. Мак-Лахлан. Теория и приложение функции Матье, И.Л.,1953.
6. Б.В.Василишин, И.Б. Иссинский, Е.М.Кулакова,ОИЯИ, Р9-6972, Дубна, 1973.
7. Б.В.Василишин, И.Б.Иссинский, В.А.Михайлов. ОИЯИ, 9-7498, Дубна, 1973.
8. И.В.Амирханов, В.К.Василев, Е.П.Жидков, И.Б.Иссинский, Е.М.Кулакова. ОИЯИ, 9-8663, Дубна, 1975.
9. И.В.Амирханов, В.К.Василев, Е.П.Жидков. ОИЯИ, Р11-8780, Р11-9107, Р11-9109, Дубна, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 июля 1976 года.