ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

11-98-368

На правах рукописи
УДК 519.6

БОГОЛЮБСКАЯ
Алла Анатольевна

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ЭФФЕКТИВНЫХ ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Специальность: 05.13.16 — применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов для научных исследований

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1998

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединённого института ядерных исследований.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук С.И.Сердюкова

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор А.В.Крянев

доктор физико-математических наук, профессор С.А.Абрамов

Ведущая организация: Российский университет дружбы народов, г.Москва.

Автореферат разослан "_____" ________________ 1998г.

Защита состоится "_____" ________________ 1999г. в "_____" часов на заседании Диссертационного совета Д047.01.04 при Лаборатории вычислительной техники и автоматизации по адресу: г.Дубна Московской области, ЛВТА ОИЯИ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Учёный секретарь Диссертационного совета
кандидат физико-математических наук З.М.Иванченко

I. Общая характеристика работы

Актуальность темы. Использование мощного аппарата систем компьютерной алгебры (СКА) является эффективным средством решения ключевых проблем численного анализа - разработки оптимальных численных алгоритмов и теоретического обоснования их корректности. Численные методы остаются важнейшим, а иногда и единственным средством исследования сложных нелинейных задач современной математической физики, например, сигма-моделей и, в частности, двумерных моделей магнетиков Гейзенберга.

Цель работы. Построение эффективных численных алгоритмов с использованием систем компьютерной алгебры. Разработка методики исследования разностных краевых задач с использованием СКА. Математическое моделирование двумерных солитонов в моделях магнетиков Гейзенберга.

Методика исследования. Построение эффективных численных алгоритмов основывается на методе Фурье, спектральной теории Годунова-Рябенького и GKS-теории, предложенной шведскими математиками Б.Густаффсоном, Х.-О.Крайсом и А.Сандстрёмом и развитой в работах С.И.Сердюковой. Используются системы компьютерной алгебры REDUCE и MAPLE. Для численного исследования локализованных решений применяется метод конечных разностей с использованием техники стрельбы, а также итерационный метод установления.

Научная новизна изложенных в работе результатов заключается в следующем. Во-первых, для случая двух пространственных переменных построены схемы максимального нечётного порядка точности – явные С-устойчивые схемы. Численными экспериментами показана ограниченность функции Грина в метрике L_1, а также пригодность схем для счёта разрывных решений. Во-вторых, разработана методика анализа устойчивости разностных краевых задач

(РКЗ) гиперболического типа, позволяющая средствами СКА провести полное исследование устойчивости, включая точки спектра на единичной окружности. В-третьих, аналитически показано, что в классической модели анизотропного магнетика Гейзенберга (при любом виде анизотропии) двумерные стационарные солитоны существовать не могут. Предложены и исследованы два различных обобщения этой модели, для которых существование двумерных стационарных солитонов оказывается возможным. В этих моделях для случая анизотропии „лёгкая ось" численно найдены двумерные стационарные солитоны и исследованы их свойства.

Достоверность содержащихся в диссертации результатов и выводов подтверждена численными экспериментами и сопоставлением с известными результатами других авторов. Численные исследования локализованных решений дополнены аналитическим исследованием условий их существования в двумерных моделях магнетиков Гейзенберга.

Научная и практическая ценность. Построенные явные схемы максимального нечётного $(3, 5, 7, 9)$ порядка точности обладают свойствами, близкими к оптимальным, и хорошо приспособлены для счёта разрывных решений, которые нередко возникают в практических расчётах. Рассмотренное в работе простейшее гиперболическое уравнение $u_t = u_x + u_y$ широко используется как модельное при исследовании явлений неустойчивости, например, в газовой динамике. Применение систем компьютерной алгебры для исследования устойчивости разностных краевых задач позволяет довести до реализации в вычислительной практике важные теоретические результаты (из GKS-теории). С помощью разработанной в диссертации методики проведено полное исследование устойчивости ряда практически важных модельных задач (в том числе явления неустойчивости, которое наблюдалось при численном моделировании движения флюксонов в

системе с микронеоднородностями, а также схемы Гари, применяемой в газодинамических расчётах). Предложенные в диссертации методики построения эффективных численных алгоритмов с применением СКА обеспечивают „автоматизацию" соответствующих исследований и могут быть использованы для решения других задач. Разработанные и реализованные в виде программ вычислительные методики поиска и изучения свойств локализованных решений в двумерных моделях магнетиков Гейзенберга также могут быть использованы, например, в задачах теории поля и физики конденсированного состояния.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на научных семинарах ЛВТА и ЛТФ ОИЯИ, Всесоюзной конференции „Системы для аналитических преобразований в механике" (Горький, 1984), Международной конференции „Численные методы и приложения" (София, 1988), Всесоюзном рабочем совещании „Теория солитонов и приложения" (Дубна, 1989), Международной конференции по численным методам (Мишкольц, 1990), Международной конференции „Математическое моделирование и прикладная математика" (Москва, 1990), Международном семинаре по нелинейным эволюционным уравнениям и динамическим системам, NEEDS-90 (Дубна, 1990), Международном семинаре „Нелинейная физика. Теория и эксперимент" (Галлиполи, 1995), Международной конференции „Математическое моделирование и вычисления в физике" (Дубна, 1996), Международной конференции „Методы симметрии в физике" (Дубна,1997), совместном (ВМК МГУ и ЛВТА ОИЯИ) семинаре по компьютерной алгебре (Дубна, 1998), I Международной конференции „Актуальные проблемы вычислительной физики" (Дубна, 1998).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[9].

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, содержащих 9 разделов, заключения и списка литературы; изложена на 98 страницах и включает 18 рисунков и 3 таблицы.

II. Содержание работы

Во **введении** приводятся необходимые теоретические сведения, излагается история исследования проблем, рассмотренных в диссертации, и даётся обзор литературы.

В **первой главе** строятся явные С-устойчивые схемы максимального нечётного, $(2k-1)$-го, $(k = 2, 3, 4, 5)$ порядка точности для гиперболического уравнения $u_t = u_x + u_y$, которое широко используется как модельное при исследовании явлений неустойчивости в газодинамических расчётах.

В **разделе 1.1** излагаются постановка задачи и алгоритм построения схем порядка $q = 2k-1$. Схемы максимального (при заданном наборе точек) нечётного порядка точности для уравнения $u_t = u_x$ были предложены Стрэнгом[1]. В работах Цинь Мэн-чжао[2] и С.И.Сердюковой[3] было доказано, что эти схемы при $q = O(\ln h^{-1})$ обладают свойствами, близкими к оптимальным в С, и хорошо приспособлены для счёта разрывных решений.

В двумерном случае для построения явной схемы порядка точности $q = 2k-1$ требуется как минимум $k(2k+1)$ точек на нижнем слое. После построения схем невысоких порядков вручную была высказана гипотеза, что для схем порядка $(2k-1)$ достаточно использовать следующие аппроксимации частных производных

$$\frac{\partial^{l+m} u}{\partial x^l \partial y^m} \to \frac{1}{h^{l+m}} F_l(p) F_m(r) u. \qquad (1)$$

Здесь $p, r-$ операторы сдвига: $p^l r^m u_{\nu,\mu} = u_{\nu+l,\mu+m}$, а F_l определяются

[1] Strang G. J.Math. and Phys., 41, 1962, pp. 147-154.

[2] Цинь Мэн-чжао. ЖВМ и МФ, 1,1961, стр. 1117-1121.

[3] Сердюкова С.И. Матем.заметки, 32, 1982, стр. 517-528; ЖВМ и МФ, 24, 1984, стр. 1016-1029.

по-разному для чётных и нечётных l:

$$F_l(p) = \begin{cases} p^{\xi}(1-p^{-1})^{2\xi} & \text{для } l = 2\xi; \\ p^{\xi+1}(1-p^{-1})^{2\xi+1} & \text{для } l = 2\xi+1. \end{cases} \qquad (2)$$

Тем самым, в частности, задаётся набор точек на нижнем слое. В исходное уравнение $u_t = u_x + u_y$ подставляются аппроксимации „вперёд“ первого порядка точности для производных u_x, u_y и u_t вида

$$u_x = \frac{1}{h}(u_{\nu+1,\mu} - u_{\nu,\mu}) - \sum_{l=2}^{q} \frac{h^{l-1}}{l!} \frac{\partial^l u}{\partial x^l} + O(h^q), \qquad (3)$$

(приводим выражение для u_x, производные u_y и u_t задаются аналогично). В выражении для вычисления значения функции $u_{\nu,\mu}$ на $(n+1)$-м слое через значения этой функции в точках на n-м слое

$$u^{n+1}_{\nu,\mu} = u^n_{\nu,\mu} + \frac{\tau}{h}(u^n_{\nu+1,\mu} - u^n_{\nu,\mu}) + \frac{\tau}{h}(u^n_{\nu,\mu+1} - u^n_{\nu,\mu}) -$$

$$-\tau \sum_{l=2}^{q} \frac{h^{l-1}}{l!}\left(\frac{\partial^l u}{\partial x^l} + \frac{\partial^l u}{\partial y^l}\right) + \sum_{l=2}^{q} \frac{\tau^l}{l!} \sum_{k=0}^{l} \frac{l!}{k!(l-k)!} \frac{\partial^l u}{\partial x^{l-k} \partial y^k} + O(h^{2k}) \qquad (4)$$

дифференциальные операторы в суммах по формулам (1), (2) заменяются разностными, в результате получаем требуемую разностную аппроксимацию. Предложенный в этом разделе алгоритм был реализован на языке REDUCE.

В **разделе 1.2** производится проверка точности и устойчивости построенных схем. Разложением в ряд Тейлора функции в точках, сдвинутых относительно фиксированной, показано, что построенные явные схемы с $k(2k+1)$ точек на нижнем слое действительно имеют порядок точности $q = (2k-1)$.

Вычисляются разложения характеристических функций $F(\varphi, \psi)$ в окрестности $\varphi = \psi = 0$. Из этих разложений следует, что при отношении шагов сетки $\alpha = \tau/h > \frac{1}{2}$ нарушается необходимое условие устойчивости в L_2 (условие Неймана): $|F(\varphi, \psi)| \le 1, \quad 0 \le \varphi,$

$\psi \leq 2\pi$. При вычислении разложений характеристических функций, как и при проверке точности, используется система REDUCE.

Известно, что для линейных задач устойчивость в C эквивалентна ограниченности разностной функции Грина в метрике L_1 - что и проверяется с помощью численного эксперимента. Численный эксперимент показывает, что нормы функции Грина в L_1 ограничены при $\alpha \leq \frac{1}{2}$ и экспоненциально растут с ростом n при $\alpha > \frac{1}{2}$. Приведённые рисунки наглядно демонстрируют поведение функции Грина внутри, на границе и вне области устойчивости.

Пригодность схем для счёта разрывных решений проверяется на известной модельной задаче со „столбиками". Численно решается задача Коши: найти периодическую по x, y (с периодом 1) функцию u, удовлетворяющую уравнению $u_t = u_x + u_y$. В качестве начальных данных заданы „столбики":

$$u(x,y,0) = \begin{cases} 1 & \text{в круге } (x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{8}, \\ 0 & \text{для остальных точек квадрата } 0 \leq x, y < 1. \end{cases}$$

Для таких начальных данных при целых t решение рассматриваемой задачи должно совпадать с начальными условиями, что и проверяется на численном эксперименте с использованием построенных аппроксимаций. Показано, что в случае двух пространственных переменных построенные явные схемы максимального нечётного порядка точности хорошо аппроксимируют разрывные решения. На примере схемы 4 порядка точности показано, что, как и в случае одной пространственной переменной, схемы максимального чётного порядка точности такими хорошими свойствами не обладают.

В конце раздела обсуждаются особенности использования системы REDUCE в рассматриваемой задаче.

В **разделе 1.3** приводятся результаты расчётов в формулах, рисунках и таблицах для различных k и $\alpha = (\tau/h)$, с комментариями.

Во **второй главе** диссертации обсуждается методика исследования устойчивости линейных РКЗ гиперболического типа с помощью СКА. В **разделе 2.1** приводятся необходимые сведения из GKS-теории[4], которая, наряду со спектральной теорией Годунова-Рябенького[5], является теоретической основой исследования устойчивости РКЗ в диссертации.

Для устойчивости полубесконечной разностной краевой задачи необходимо, чтобы была устойчива соответствующая задача Коши и чтобы спектр оператора перехода от слоя к слою лежал в единичном круге $|z| \leq 1$. Если есть точки спектра вне единичного круга, наблюдается сильная неустойчивость экспоненциального типа. В процессе исследования устойчивости строится аналитическая матрица B, зависящая от исходных граничных условий и резольвентного параметра z. Точка комплексной плоскости z_0 является точкой спектра, если и только если в этой точке данная матрица вырождена. В случае точек спектра на единичной окружности, рассмотренном в работах С.И.Сердюковой, требуется более тонкое аналитическое исследование – в этом случае исходная РКЗ может быть как устойчивой, так и неустойчивой.

В диссертации рассматриваются краевые задачи вида

$$\begin{cases} u_\nu^{n+1} = \sum_{l=-p}^{q} a_l u_{\nu+l}^n, & n \geq 0, \quad \nu \geq 0; \\ u_\nu^0 = f_\nu, & \sum_{\nu=0}^{\infty} |f_\nu^2| \leq \infty; \\ u_{-j}^n = \sum_{l=0}^{s} c_{jl} u_l^n, & j = 1, ..., p. \end{cases} \tag{5}$$

Исследуется практически важный класс схем: $3 \geq p \geq q \geq 1$. Предполагается, что коэффициенты $a_{-p} \neq 0$, $a_q \neq 0$ и что соответ-

[4]Kreiss H.-O. Math.Comput., 22, 1968, pp. 703-714;

Gustafsson B., Kreiss H.-O., Sandström A. Math.Comp., 26, 1972, pp. 649-686;

Сердюкова С.И. ДАН СССР, 319, 1991, стр. 1328-1332; в сб.: Вычислительные процессы и системы. М., Наука, 1991, вып.8., стр. 292-327.

[5]Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М., Наука, 1973.

ствующая задача Коши устойчива.

Задача определения точек спектра (общего положения) рассматриваемой РКЗ в области $|z| \geq 1$ в GKS-теории сводится к решению системы $(p+1)$-го уравнения с $(p+1)$-ой переменной:

$$\begin{cases} detB(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_p) & = 0, \\ Q(\kappa_1, z) & = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ Q(\kappa_p, z) & = 0, \end{cases} \tag{6}$$

где κ_l, $l = 1, ..., p$ – различные между собой, меньшие по модулю единицы решения резольвентного уравнения

$$Q(\kappa, z) = \sum_{l=0}^{p+q} a_{l-p}\kappa^l - z\kappa^p = 0, \qquad |z| \geq 1. \tag{7}$$

Приведённая система полиномиальных уравнений (6) описывает спектр рассматриваемой РКЗ и является основной системой GKS-теории; анализ устойчивости в этой теории сводится к выводу и решению этой системы. Предлагаемая во второй главе диссертации методика включает вывод этой системы и её решение с помощью специального алгоритма. Исследование устойчивости проводится на компьютере средствами СКА.

В **разделе 2.2** предложенная методика применяется для исследования явления неустойчивости, которое наблюдалось в окрестности границ при численном моделировании [6] движения флюксонов в системе с микронеоднородностями[7] по схеме Русанова. Эта физическая задача описывается уравнением

$$\phi_{tt} = \phi_{xx} - (1 - \mu\delta(x - x_0))\sin\phi - a\phi_t, \qquad 0 \leq x \leq \ell, \tag{8}$$

[6]Казача Г.С., Сердюкова С.И., Филиппов А.Т. Сообщение ОИЯИ, Р11-84-76, Дубна, 1984; Казача Г.С., Сердюкова С.И. ЖВМ и МФ, 3,1993, стр. 417-427.

[7]Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. Препринт ОИЯИ, Р17-83-632, Дубна, 1983; Бахвалов Н.С., Гальперн Ю.С., Казача Г.С., Сердюкова С.И., Филиппов А.Т. Препринт ОИЯИ, Р17-86-537, Дубна, 1986.

со следующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} &\phi(x,0) = f(x), \qquad \phi_t(x,0) = g(x), \\ &\phi_x(0,t) = \phi_x(\ell,t) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

В качестве модельного в диссертации выбирается волновое уравнение $\phi_{tt} = \phi_{xx}$, у которого, как показали расчёты, наблюдается то же явление неустойчивости, что и у исходной задачи.

Применяется схема Русанова 3 порядка точности, имеющая 5 точек в основании. Схема требует задания дополнительных граничных условий. В качестве дополнительных граничных условий было опробовано несколько аппроксимаций 2 порядка точности - при счёте постоянно наблюдались биения экспоненциального типа у границ. При использовании схемы-треноги (схемы Лакса-Вендроффа) сильные осцилляции в окрестности границ исчезают. В диссертации теоретически (с помощью системы REDUCE) исследованы оба типа граничных условий. В первом случае найдена единственная точка спектра вне единичного круга, приводящая к неустойчивости: $z^* = -1,063....$ Во втором случае доказано, что есть единственная точка $z^* = 0$. Соответствующая задача Коши устойчива в C. Следовательно, согласно теории Годунова-Рябенького, РКЗ в этом случае устойчива.

В **разделе 2.3** диссертации предлагается алгоритм полного (включая точки спектра на единичной окружности) исследования устойчивости линейных разностных гиперболических краевых задач. Исследуемая нелинейная система уравнений, описывающая спектр, алгебраическими методами сводится к двум полиномиальным уравнениям. После вычисления результанта получается одно полиномиальное уравнение, которое решается численно. В случае точек спектра на единичной окружности выясняется характер особенностей резольвенты, что и позволяет провести полное исследование устойчивости. Методика применима к схемам вплоть до 6 порядка точности. Исследована устойчивость ряда практически важных модельных задач. Приводятся примеры исследования точек спектра на единичной окружности. Все этапы исследования проводятся на компьютере с помощью систем REDUCE и MAPLE.

В **третьей главе** диссертации выполняется исследование частицеподобных решений в рамках трёхкомпонентных нелинейных сигма-моделей (классических моделей МГ), возникающих при использовании двух различных механизмов, обеспечивающих возможность существования неодномерных солитонов.

В **разделе 3.1** рассмотрен механизм, основанный на включении стабилизирующих членов (типа Скирма[8]) в лагранжиан моделей анизотропных магнетиков Гейзенберга. Исследуется случай анизотропии типа „лёгкая ось“ , при этом плотность гамильтониана модели имеет вид

$$\mathcal{H} = (\partial_i s^a)^2 + \sin^2\theta + p\,(\partial_i s^a \partial_i s^a)^2\,,$$

где $i = 1,2,\quad a = 1,2,3,\quad \theta$ – угол между положительным направлением „лёгкой“ оси и единичным вектором $\mathbf{s}(x_i)$, p - безразмерный параметр модели, $0 < p < \infty$. Эту модель можно назвать „легкоосной моделью Гейзенберга-Скирма.“ Локализованные решения в этой модели ищутся в диссертации с применением так называемой „ежовой“ подстановки[9]. Возникающее после применения этой подстановки двумерное нелинейное уравнение 2 порядка для функции θ с граничными условиями 1 рода решается с применением техники „стрельбы“ . Показано отсутствие нетопологических стационарных солитонов в этой модели. Численно найдены стационарные солитоны с топологическими зарядами $Q = 1$ и $Q = 2$. Проанализирована зависимость радиуса и энергии солитонов от параметра p. Обнаружено, что при всех p энергетически выгодно образование связанного состояния двух солитонов с единичным зарядом $Q = 1$. Обсуждается связь

[8] Skyrme T.H.R. Proc. R.Soc., A 260, 1961, p. 127.

[9] Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. „Наукова думка“ , Киев, 1983.

найденных солитонов с солитонами Белавина-Полякова[10] при малых p (малых радиусах солитонов).

В **разделе 3.2** изучена новая возможность существования солитонных решений, возникающая при включении „минимального“ калибровочно-инвариантного взаимодействия трёхкомпонентного поля единичного изовектора с полем Максвелла. Получены полевые уравнения 3-компонентной $U(1)$ калибровочно-инвариантной сигма-модели („АЗМ-модели”) со спонтанно-нарушенной $Z(2)$-симметрией в $(D+1)$-мерном пространстве-времени. С помощью уже упомянутой „ежовой“ подстановки система уравнений в частных производных сводится к системе двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2 порядка для неизвестных функций $\theta(r)$ и $\alpha(r)$:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr} - \sin\theta\cos\theta\left[\frac{m^2(\alpha-1)^2}{r^2} + p\right] = 0, \tag{10}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d\alpha}{dr} + 2(1-\alpha)\sin^2\theta = 0 \tag{11}$$

с граничными условиями

$$\theta(0) = \pi, \quad \theta(\infty) = 0, \tag{12}$$

$$\alpha(0) = 0, \quad \frac{d\alpha}{dr}(\infty) = 0. \tag{13}$$

Здесь m – целое число, определяющее топологический заряд солитона, p – безразмерный параметр.

Для численного решения этой системы были использованы как метод стрельбы, так и итерационный метод установления, использующий включение искусственной вязкости в нестационарный аналог исследуемой системы стационарных обыкновенных дифференциальных уравнений. Численно найдены локализованные решения 2-мерной АЗМ модели с единичным топологическим зарядом; эти топологические солитоны описывают (по крайней мере, для малых значений

[10] Белавин А.А., Поляков А.М. Письма в ЖЭТФ, 22, 1975, стр. 503.

безразмерного параметра модели p, $p < p_0$) устойчивые связанные состояния единичного трёхкомпонентного „легкоосного“ поля Гейзенберга и поля Максвелла. Найденные в рамках АЗМ модели двумерные локализованные решения описывают струны (вихри) конечного радиуса в реальном трёхмерном пространстве. Эти решения являются солитонными аналогами вихрей (струн) Абрикосова-Нильсена-Ольсена[11], используемых для описания космических струн и вихревых структур в сверхпроводниках.

III. Основные результаты работы

1. Для случая двух пространственных переменных построен аналог известных явных схем максимального нечётного (3,5,7,9) порядка точности. Используется система REDUCE. На численном эксперименте проверяется устойчивость в C построенных разностных аппроксимаций: установлена ограниченность функции Грина $G^n_{i,j}$ в метрике L_1 при естественном ограничении на отношение шагов сетки $(\tau/h) \le \frac{1}{2}$. Результаты численных экспериментов показывают также, что построенные схемы хорошо приспособлены для счёта разрывных решений. Как и в случае одной пространственной переменной, схемы максимального чётного порядка точности такими хорошими свойствами не обладают.

2. Разработана и реализована на языках REDUCE и MAPLE методика полного исследования устойчивости линейных разностных гиперболических краевых задач. Система полиномиальных уравнений, описывающая спектр, сводится к решению одного уравнения. Методика применима к схемам вплоть до 6 порядка точности. Исследована устойчивость ряда практически важных модельных задач.

3. Исследовано явление неустойчивости, которое наблюдалось в окрестности границ при численном моделировании движения флюксонов в протяжённой системе с микронеоднородностями. Движение флюксонов описывается уравнением синус-Гордон с сингулярностями. Теоретически исследованы два типа граничных условий: одно из дополнительных граничных условий, приводящих к сильным осцилляциям, и схема-тренога, обеспечивающая устойчивость.

[11] Абрикосов А.А., ЖЭТФ, 32, 1957, стр. 1442; Nielsen H.B. and Olesen P., Nucl. Phys., B61, 1973, p. 45.

4. Аналитически показано, что в классической модели анизотропного магнетика Гейзенберга (при любом виде анизотропии) двумерные стационарные солитоны существовать не могут. Предложены и исследованы два различных обобщения этой модели, для которых существование двумерных стационарных солитонов оказывается возможным.

5. Выполнено численное моделирование двумерных стационарных солитонов в модели легкоосного магнетика Гейзенберга со стабилизирующими членами типа Скирма. Методом конечных разностей (с использованием техники „стрельбы“) решена краевая задача для нелинейного уравнения Гейзенберга-Скирма 2 порядка. Численно найдены солитоны с топологическими зарядами $Q = 1, 2$ для различных значений характерного безразмерного параметра p. Показано отсутствие нетопологических ($Q = 0$) солитонов. Установлено, что солитоны с топологическим зарядом $Q = 1$ притягиваются друг к другу, и энергетически выгодным является образование их связанного солитонного состояния с топологическим зарядом $Q = 2$.

6. Численно исследована $U(1)$ калибровочно-инвариантная модель легкоосного антиферромагнетика Гейзенберга (АЗМ-модель). Найдена подстановка, сводящая задачу поиска стационарных двумерных солитонов в АЗМ-модели к решению системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с граничными условиями в нуле и на бесконечности. Для решения этой системы разработан специальный метод установления, позволяющий наблюдать „эволюционный“ процесс „формирования“ стационарных локализованных решений.

7. Численно найдены двумерные стационарные солитонные решения АЗМ-модели с топологическим зарядом $Q = 1$. Показано, что они существуют в области значений безразмерного параметра $0 < p < p_0 \approx 0.4$. Обнаружено, что энергия двумерных солитонов в АЗМ-модели меньше энергии двумерных солитонов Белавина-Полякова в изотропном МГ, т.е. солитоны АЗМ-модели при $0 < p < p_0 \approx 0.4$ представляют собой локализованное связанное состояние двух полей АЗМ-модели (АЗ-поля и поля Максвелла).

IV. Публикации по теме диссертации

1. Боголюбская А.А., Сердюкова С.И. Построение явных C-устойчивых схем максимального нечётного порядка точности. ЖВМ и МФ, **34**, 1994, стр. 943-954.

2. Боголюбская А.А., Сердюкова С.И. Возможность полного исследования устойчивости разностных краевых задач на PC с применением CAS REDUCE. Сообщение ОИЯИ, P11-93-446, Дубна, 1993.

3. Боголюбская А.А., Сердюкова С.И. К исследованию спектра одной разностной краевой задачи. Сообщение ОИЯИ, P11-84-77, Дубна, 1984.

4. Bogolubsky I.L. and Bogolubskaya A.A. 2D topological solitons in the gauged easy-axis Heisenberg antiferromagnet model. Phys. Lett., **B 395**, 1997, 269-274.

5. Bogolubsky I.L. and Bogolubskaya A.A., Soliton analogs of Abrikosov-Nielsen-Olesen vortices, in: Proc. of the 1st Workshop "Nonlinear Physics. Theory and Applications", Gallipoli (Lecce), 1995, Eds. E.Alfinito, M.Boiti, L.Martina and F.Pempinelli. World Scientific, Singapore, 1996.

6. Bogolubskaya A.A. and Bogolubsky I.L. Stationary Topological Solitons in the Two-dimensional Anisotropic Heisenberg Model with a Skyrme Term. Phys. Lett., **A136**, 1989, p. 485.

7. Bogolubskaya A.A. and Bogolubsky I.L. On Stationary Topological Solitons in a Two-dimensional Anisotropic Heisenberg Model. Lett. Math. Phys., **19**, 1990, p. 171.

8. Bogolubskaya A.A. and Bogolubsky I.L. Computer Investigation of Stationary Topological Solitons in Two- and Three-dimensional Heisenberg-type Models. In: Proceedings of the International Conference on Numerical methods and Applications, Sofia, 1988. Publishing House of the Bulgarian Academy of Science, Sofia, 1989.

9. Bogolubskaya A.A. and Bogolubsky I.L. Stationary Topological Solitons in Non-one-dimensional Sigma Models with Stabilizing Terms. In: Proceedings of the 4-th International Workshop "Solitons and Applications", Dubna, 1989. World Scientific, Singapore, 1990.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 декабря 1998 года.