



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

11-98-355

УДК 535.3 + 681.7 + 778.4

Г-932

ГУБИН
Валерий Борисович

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ
ФОРМЫ ОПТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ
ПО ИНТЕРФЕРОГРАММАМ**

**Специальность: 05.13.16 — применение вычислительной
техники, математического моделирования и математических
методов в научных исследованиях**

**Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук**

Дубна 1998

Работа выполнена в Российском университете дружбы народов, г. Москва.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Гребенников Евгений Александрович,

доктор технических наук
Духопел Иван Иванович,

доктор физико-математических наук
Колмановский Владимир Борисович.

Ведущая организация: Всероссийский научно-исследовательский институт метрологической службы
Госстандарта России.

Защита диссертации состоится "___" _____ 1999 г. в ___ час. ___ мин. на заседании Диссертационного совета Д 047.01.04 при Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований по адресу: 141980, г. Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Автореферат разослан "___" _____ 1999 г.

Ученый секретарь

Диссертационного совета

кандидат физико-математических наук

Иванченко

Зинаида Мироновна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

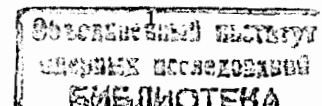
Регулярные математические обработки на ЭВМ интерферограмм от оптических поверхностей с применением полиномиальных аппроксимаций интерферограмм начали систематически проводиться с семидесятых годов [1]. Однако возможности новых математических и вычислительных средств не были вполне оценены, поняты и использованы, и влияние старых привычных приемов [2], ограничивавшее сферу применения и точность новых методик аттестации, не было критически преодолено.

а) При получении полиномиальных аппроксимаций существовал неоправданный разброс в выборе базисных полиномов, что мешало увидеть общее в частных случаях, а также не позволяло строить универсальные комплексы обработки интерферограмм по модульному принципу.

б) Недостаточно точные приближения для описания эффектов смещения неплоских поверхностей, плохо согласованные с точностью самой математической модели интерферограммы (не хуже $\sim 0,001$ мкм), очевидным образом ограничивали точность и область применимости стандартных алгоритмов математической обработки таких поверхностей для угловых апертур, больших $\sim 40-50^\circ$ [3-6].

в) Наряду с плохими приближениями для эффектов смещения несообразности такого же порядка вносило при больших угловых апертурах неадекватное задание взвешивание при разделении вкладов в интерферограмму, вызванное тем, что в явном виде минимизация функционалов для разделения вкладов практически не применялась. Помимо снижения точности аттестации при неадекватном взвешивании отсутствие традиции работать с функционалами не позволяло обоснованно указать случаи, когда вклады могут быть разделены математически (и, соответственно, нет необходимости в особо точной настройке измерительной схемы) [7]. С другой стороны, не было замечено, судя по литературе, что в ряде традиционно полагавшихся разрешимыми случаях вклады разделяются далеко не всегда. А в этих случаях точность порядка точности самой модели интерферограммы не может быть достижима только "математически".

г) Помимо указанных выше вычислительных дефектов в методах аттестации одновременно по нескольким интерферограммам решение часто находилось без полного использования всей информации, например, в методе абсолютной



калибровки трех зеркал по четырем интерферограммам [8], а при аттестации поверхности по нескольким интерферограммам данные на редких сетках терялись, что для сложных поверхностей, начиная со сферических, было обусловлено отсутствием для них базисов с разделенными функциями базисных элементов.

д) В 80-е годы известный метод аттестации больших зеркал "переналожением" небольшого эталона группа авторов [9-14] ошибочным образом модифицировала, сняв необходимое требование перекрытия кусочно-тестируемых областей - явно на том не высказываемом основании, что полиномиальную аппроксимацию частей поверхности всегда можно продолжить, но упустив, что она не тождественна самой аппроксимируемой поверхности, имеет совершенно другую аналитическую природу, чем реальная оптическая поверхность.

е) Отсутствовали (помимо небольшой работы [15]) основательные и широкие исследования точности восстановления в зависимости от шума, от сеток и от числа полиномов аппроксимации. Этот пробел необходимо было восполнить. Одновременно требовалось сравнить точности различных методов аттестации.

ж) Не были достаточно верно оценены ошибки аттестации крутых сферических зеркал методом Гартмана, вызванные неопределенностями в настройке измерительной схемы.

Таким образом, имевшийся аппарат в существенных моментах был не полон, не всегда достаточно точен, а иногда и принципиально ошибочен. Основной задачей работ, на которых основана диссертация, и являлось создание методики и аппарата аттестации основных видов поверхностей в главных способах интерферометрического контроля, сравнимой по точности с точностью самой модели интерферограммы, и снабжение ее справочным материалом о влиянии шума в данных.

Цель работы.

Создание математического аппарата восстановления деформаций широкого круга оптических поверхностей для всех основных способов интерферометрического контроля, аппарата, сопоставимого по точности с точностью самой математической модели интерферограммы. Обеспечение этого аппарата сведениями о влиянии шума в данных на точность восстановления. Критический анализ обоснованности и точности различных методов интерферометрического контроля.

Основные задачи исследований.

1. Первой задачей диссертации было расширение области применимости математического аппарата обработки интерферограмм на поверхности с большой угловой апертурой при сохранении точности восстановления, характерной для случая плоских поверхностей, и при единстве методики, использующей полиномиальные аппроксимации интерферограмм. Составной частью этой задачи являлась разработка методики разделения вкладов в интерферограмму от деформаций поверхностей и от настройки измерительной схемы.

2. Второй задачей была разработка алгоритмов, наиболее полно и адекватно использующих данные от наборов интерферограмм от одной или нескольких поверхностей.

3. Третья задача - изучение влияния шума в данных на точность аттестации поверхностей в различных способах интерферометрического контроля.

Научная новизна.

Впервые созданы математические алгоритмы восстановления деформаций основных видов неплоских оптических поверхностей с большой угловой апертурой по интерферограммам и наборам интерферограмм, работающие с точностью, порядка точности самой модели интерферограммы (обычно не хуже 0.001 мкм).

Научная и практическая значимость.

В результате работ, излагаемых в диссертации, создана комплексная математическая база высокоточного интерферометрического контроля сложных оптических поверхностей в основных методах контроля. Показано, что в части случаев вклады в интерферограмму от деформаций поверхностей и от настройки разделяются математически, что снимает необходимость точной настройки или точной информации о ней для получения высокоточной аттестации. Для ряда методов и ситуаций показано, что такая аттестация невозможна. Показано также, что предложенный ранее и интенсивно разрабатывавшийся за рубежом метод восстановления поверхности по набору интерферограмм от не перекрывающихся частей поверхности принципиально ошибочен. Проведенный широкий анализ влияния шума в данных на точность аттестации позволяет численно оценивать качество результатов и обоснованно планировать проведение интерферометрических измерений. На основе разработанных математических алгоритмов создан

комплекс программ по обработке интерферограмм, применявшийся для аттестации эталонных зеркал и методических расчетов.

Результаты исследований, излагаемых в диссертации, использовались при чтении курса лекций по математическим методам восстановления формы оптических поверхностей по интерферограммам в МГТУ им. Н.Э.Баумана в 1993 г.

Апробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались на Всесоюзном семинаре "Методы контроля формы оптических поверхностей" (Москва, 1989), на Всесоюзных конференциях "Вычислительная физика и математическое моделирование" (Волгоград, 1988 и 1989 гг.) и на международных конференциях "Математические методы решения физических задач" (Дубна, 1993), "Математическое моделирование и вычисления в физике" (Дубна, 1996) и "Актуальные проблемы вычислительной физики" (Дубна, 1998). Разработанные алгоритмы, реализованные в виде комплекса программ, использовались для методических исследований и для конкретной обработки данных контроля оптических поверхностей в ГОИ им С.И.Вавилова и во ВНИИ метрологической службы.

Публикации.

По теме диссертации опубликованы 34 работы, в том числе монография.

Личное участие автора.

Все приведенные в диссертации результаты получены самим автором или при его непосредственном участии.

Объем работы.

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и приложения. Она содержит 281 страницу и включает 19 таблиц, 33 рисунка и список литературы из 116 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во Введении дается оценка состояния математических разработок по аттестации оптических поверхностей по интерферограммам. Формулируются проблемы, рассматриваемые в диссертации, и обосновывается их актуальность. Описана структура диссертации и кратко изложено ее содержание.

В первой, вводной главе излагаются общие принципы интерферометрического контроля оптических поверхностей как в их измерительной части, так и в

Основные задачи исследований.

1. Первой задачей диссертации было расширение области применимости математического аппарата обработки интерферограмм на поверхности с большой угловой апертурой при сохранении точности восстановления, характерной для случая плоских поверхностей, и при единстве методики, использующей полиномиальные аппроксимации интерферограмм. Составной частью этой задачи являлась разработка методики разделения вкладов в интерферограмму от деформаций поверхностей и от настройки измерительной схемы.

2. Второй задачей была разработка алгоритмов, наиболее полно и адекватно использующих данные от наборов интерферограмм от одной или нескольких поверхностей.

3. Третья задача - изучение влияния шума в данных на точность аттестации поверхностей в различных способах интерферометрического контроля.

Научная новизна.

Впервые созданы математические алгоритмы восстановления деформаций основных видов неплоских оптических поверхностей с большой угловой апертурой по интерферограммам и наборам интерферограмм, работающие с точностью, порядка точности самой модели интерферограммы (обычно не хуже 0.001 мкм).

Научная и практическая значимость.

В результате работ, излагаемых в диссертации, создана комплексная математическая база высокоточного интерферометрического контроля сложных оптических поверхностей в основных методах контроля. Показано, что в части случаев вклады в интерферограмму от деформаций поверхностей и от настройки разделяются математически, что снимает необходимость точной настройки или точной информации о ней для получения высокоточной аттестации. Для ряда методов и ситуаций показано, что такая аттестация невозможна. Показано также, что предложенный ранее и интенсивно разрабатывавшийся за рубежом метод восстановления поверхности по набору интерферограмм от не перекрывающихся частей поверхности принципиально ошибочен. Проведенный широкий анализ влияния шума в данных на точность аттестации позволяет численно оценивать качество результатов и обоснованно планировать проведение интерферометрических измерений. На основе разработанных математических алгоритмов создан

комплекс программ по обработке интерферограмм, применявшийся для аттестации эталонных зеркал и методических расчетов.

Результаты исследований, излагаемых в диссертации, использовались при чтении курса лекций по математическим методам восстановления формы оптических поверхностей по интерферограммам в МГТУ им. Н.Э.Баумана в 1993 г.

Апробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались на Всесоюзном семинаре "Методы контроля формы оптических поверхностей" (Москва, 1989), на Всесоюзных конференциях "Вычислительная физика и математическое моделирование" (Волгоград, 1988 и 1989 гг.) и на международных конференциях "Математические методы решения физических задач" (Дубна, 1993), "Математическое моделирование и вычисления в физике" (Дубна, 1996) и "Актуальные проблемы вычислительной физики" (Дубна, 1998). Разработанные алгоритмы, реализованные в виде комплекса программ, использовались для методических исследований и для конкретной обработки данных контроля оптических поверхностей в ГОИ им С.И.Вавилова и во ВНИИ метрологической службы.

Публикации.

По теме диссертации опубликованы 34 работы, в том числе монография.

Личное участие автора.

Все приведенные в диссертации результаты получены самим автором или при его непосредственном участии.

Объем работы.

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и приложения. Она содержит 281 страницу и включает 19 таблиц, 33 рисунка и список литературы из 116 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во Введении дается оценка состояния математических разработок по аттестации оптических поверхностей по интерферограммам. Формулируются проблемы, рассматриваемые в диссертации, и обосновывается их актуальность. Описана структура диссертации и кратко изложено ее содержание.

В первой, вводной главе излагаются общие принципы интерферометрического контроля оптических поверхностей как в их измерительной части, так и в

части математической обработки результатов измерений. Глава заканчивается описанием организованного по модульному принципу алгоритма восстановления волнового фронта по интерферограмме радиального сдвига.

Для аппроксимации интерферограмм и вычисляемых деформаций в качестве базовой взята подходящая для абберрационного (модального) анализа и в широком круге условий задачи обеспечивающая хорошую устойчивость алгоритма аппроксимации данных система ортогональных на единичном круге полиномов Цернике $Z_i(r, \varphi)$ [16]:

$$Z_i(r, \varphi) = \begin{cases} \sqrt{\pi_i + 1} R_{\pi_i}^{m_i}(r) \sqrt{2} \cos m_i \varphi, & m_i > 0, i - \text{четн.} \\ \sqrt{\pi_i + 1} R_{\pi_i}^{m_i}(r) \sqrt{2} \sin m_i \varphi, & m_i > 0, i - \text{нечетн.} \\ \sqrt{\pi_i + 1} R_{\pi_i}^{m_i}(r), & m_i = 0. \end{cases}$$

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} (-1)^s \frac{(n-s)!}{s! \left(\frac{n-m-s}{2}\right)! \left(\frac{n+m-s}{2}\right)!} r^{n-2s}$$

$$\pi_i = \min \left\{ k \geq 0: \frac{(k+1)(k+2)}{2} \geq i \right\},$$

$$m_i = \min \left\{ k \geq 0: (-1)^k = (-1)^i, k \geq i - 1 - \frac{\pi_i(\pi_i + 1)}{2} \right\}.$$

$0 \leq m \leq \pi$, $(\pi - m)$ - четное.

В простейшем варианте контроля плоского зеркала в интерферометре Физо с плоским же эталоном (рис.1) в первом приближении по отношению

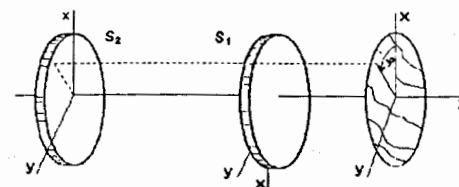


Рис.1.

деформаций и смещений зеркал к их размерам (обычно эта величина $< 10^{-4}$) расстояние $H(r, \varphi)$ между обращенными друг к другу поверхностями зеркал с точностью до общего для всех (r, φ) целого числа полуволн записывается в виде суммы:

$$H(r, \varphi) = L(r, \varphi) - S_1(r, \varphi) - S_2(r, \varphi),$$

где $L(r, \varphi)$ - функция настройки: расстояние между ближайшими (средне-квадратично проведенными по поверхностям) плоскостями; $S_{1,2}(r, \varphi)$ - деформа-

ция; или "ошибка" (отклонение от ближайшей плоскости) поверхности эталона (S_1) и аттестуемой поверхности (S_2). Деформации эталона известны, тогда

$$L(r, \varphi) - S(r, \varphi) = H(r, \varphi).$$

Определение ближайшей плоскости приводит ко второму уравнению:

$$\int [H(r, \varphi) - L(r, \varphi)]^2 r dr d\varphi \rightarrow \min. \quad (1)$$

Пусть h_i - коэффициенты разложения $H(r, \varphi) = \sum h_i Z_i(r, \varphi)$. В плоском случае $L(r, \varphi)$ есть плоскость $p_1 + p_2 Z_2(r, \varphi) + p_3 Z_3(r, \varphi)$, где p_1 - константа, а p_2 и p_3 - величины двух наклонов. Минимизация (1) дает $p_1 = h_1, p_2 = h_2, p_3 = h_3$, тогда

$$S(r, \varphi) = - \sum_{i=4}^P h_i Z_i(r, \varphi).$$

В первой же главе как пример, имеющий как общеметодическое, так и самостоятельное значение, рассмотрена интерферограмма радиального сдвига. Для нее уравнение с искомым волновым фронтом $W(r, \varphi)$ и настройкой $L(r, \varphi)$ есть:

$$L(r, \varphi) + W(r, \varphi) - W(\rho r, \varphi) = H(r, \varphi),$$

где $\rho \neq 1$. Здесь при $0 \leq r \leq 1$ $\rho < 1$ (так же обозначают и обратную величину).

Прежде использовали "круговые" полиномы вида $r^n \cos m\varphi, r^n \sin m\varphi$ [6]:

$$\sum_{n=0}^K r^n \sum_{m=0}^n (1 - \rho^n) (c_{nm} \cos m\varphi + s_{nm} \sin m\varphi) = H(r, \varphi).$$

Этот базис далек от ортогонального и не подходит для модульной организации комплексов программ обработки интерферограмм. Используем разложение фронта по полиномам Цернике:

$$\sum_{i=1}^3 c_i Z_i(r, \varphi) + \sum_{i=4}^P c_i [Z_i(r, \varphi) - Z_i(\rho r, \varphi)] = H(r, \varphi),$$

где c_1, c_2, c_3 - коэффициенты настройки, P - число полиномов аппроксимации. Число обусловленности при счете с 60-70 полиномами на обычной сетке из 300-400 точек составляет сотни или тысячи (с "круговыми" полиномами 10^8 достигается при 45 полиномах).

Однако: 1) и при этом модульный принцип обработки интерферограмм, когда первым этапом обработки является аппроксимация данных стандартными полиномами, не соблюдается; 2) двойной счет значений полиномов Цернике на сетке нежелателен; 3) для редких сеток желателен еще более устойчивый алгоритм. Поэтому разработан алгоритм, в котором данные интерферограммы ап-

проксимируются полиномами Цернике, а не их разностями (число обусловленности уменьшается на два порядка):

$$\sum_{i=1}^P h_i Z_i(r, \varphi) = H(r, \varphi).$$

Затем по коэффициентам h_i находят коэффициенты c_i фронта с помощью матричных преобразований одних коэффициентов в другие, полученных вычислением скалярных произведений $Z_i(r, \varphi)$ и $Z_j(\rho r, \varphi)$.

Во второй главе, во-первых, строится высокоточный алгоритм аттестации сферической поверхности без ограничений на величину угловой апертуры. Для этого потребовалось уточнить вид функции настройки и использовать запись функционала разделения вкладов, дающую взвешивание, равномерное по площади контролируемой поверхности.

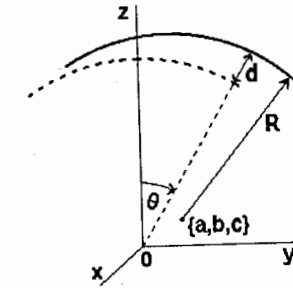


Рис. 2.

В первом приближении по отношению $\max\{a, b, c\}$ к R , где a, b, c - смещения центра сферы из фокуса пучка вдоль x, y и z (рис.2), функция настройки имеет вид

$$d(\theta, \varphi) \approx a \sin\theta \cos\varphi + b \sin\theta \sin\varphi + c \cos\theta.$$

Расстояние $H(r, \varphi)$ между поверхностями на луче (θ, φ) есть (см. рис. 3)

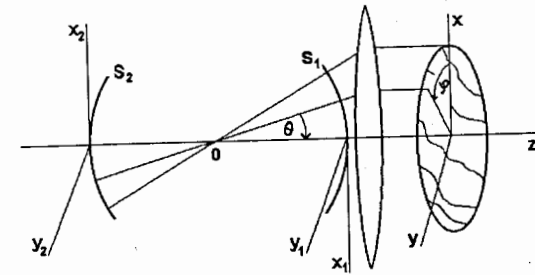


Рис. 3.

$$H(\theta, \varphi) = d(\theta, \varphi) + E - S(\theta, \varphi),$$

где E - константа. Требуется минимизировать функционал на части сферы:

$$\Phi(E, a, b, c) = \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} [H(\theta, \varphi) - E - d(a, b, c; \theta, \varphi)]^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Базис на этой области строится по типу полиномов Цернике заменой

$$Z_i^{\theta_0}(\theta, \varphi) \equiv Z_i\left(\frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}, \varphi\right),$$

$$\int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} Z_i^{\theta_0}(\theta, \varphi) Z_j^{\theta_0}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi \sin^2(\theta_0/2) \delta_{ij}.$$

Тогда при разложениях

$$H(\theta, \varphi) = \sum_i h_i Z_i^{\theta_0}(\theta, \varphi),$$

$$\sin \theta \cos \varphi = \sum_{i_c} c_{i_c} Z_{i_c}^{\theta_0}(\theta, \varphi), \quad \sin \theta \sin \varphi = \sum_{i_s} s_{i_s} Z_{i_s}^{\theta_0}(\theta, \varphi),$$

условие равенства нулю производных от $\Phi(E, a, b, c)$ по E, a, b, c дает:

$$E = h_1 - h_4 \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2(\theta_0/2), \quad c = -h_4 \sqrt{3} / \sin^2(\theta_0/2),$$

$$a = (\sum_{i_c} h_{i_c} c_{i_c}) / (\sum_{i_c} c_{i_c}^2), \quad b = (\sum_{i_s} h_{i_s} s_{i_s}) / (\sum_{i_s} s_{i_s}^2). \quad (2)$$

$$(\sum_{i_c} c_{i_c}^2) = (\sum_{i_s} s_{i_s}^2) = (2 - 3 \cos \theta_0 + \cos^3 \theta_0) / (12 \sin^2(\theta_0/2)) \equiv 1/g.$$

Деформации сферы не содержат вклада настройки и константы, поэтому коэффициенты e_i ее аппроксимации полиномами $Z_i^{\theta_0}(\theta, \varphi)$ равны:

$$e_1 = 0,$$

$$e_4 = 0,$$

$$e_{i_c} = a c_{i_c} - h_{i_c} = g c_{i_c} \sum_{j_c} h_{j_c} c_{j_c} - h_{i_c},$$

$$e_{i_s} = b s_{i_s} - h_{i_s} = g s_{i_s} \sum_{j_s} h_{j_s} s_{j_s} - h_{i_s},$$

$$e_i = -h_i \quad \text{для других индексов.}$$

Для получения реальной точности, не худшей 0.001λ при $\theta_0 \leq 45^\circ$, достаточно учесть разложение настройки до седьмой степени включительно ($t_0 = \sin(\theta_0/2)$):

$$c_2 = s_3 = t_0 - \frac{t_0^3}{3} - \frac{t_0^5}{16} - \frac{t_0^7}{40}, \quad c_8 = s_7 = -\left(\frac{t_0^3}{3} + \frac{t_0^5}{10} + \frac{t_0^7}{20}\right) / (2\sqrt{2}),$$

$$c_{16} = s_{17} = -\left(\frac{t_0^5}{2} + \frac{3t_0^7}{7}\right) / (40\sqrt{3}), \quad c_{30} = s_{29} = -t_0^7 / 1120.$$

Этот алгоритм разделения вкладов снимает необходимость точной (точнее нескольких λ) юстировки при получении интерферограммы, отличает эффект бокового сдвига от вклада комы и в принципе позволяет аттестовать сферические поверхности с большой угловой апертурой так же точно, как и плоские.

Во втором параграфе та же задача разделения вкладов при контроле сферической поверхности со сферическим эталоном решается с использованием обычных полиномов Цернике и при интегрировании в функционале разделения по плоской апертуре, но с учетом специальной весовой функции, обеспечивающей оценку качества сферической поверхности равномерно по ее площади, а не равномерно по ее проекции на плоскость, перпендикулярную оси пучка.

Связь координат двух систем:

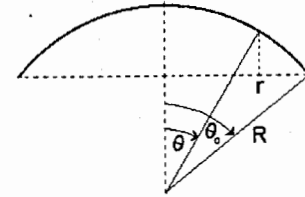


Рис. 4.

$r = R \sin \theta_0$. На краю апертуры r нормируется на единицу. Соответственно $R = 1/\sin \theta_0$ и $r = \sin \theta / \sin \theta_0$.

Функция настройки $d(\theta, \varphi)$ переписывается в переменных (r, φ) как

$$d(r, \varphi) = a \sin \theta_0 r \cos \varphi + b \sin \theta_0 r \sin \varphi + c \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta_0} =$$

$$= a (r/R) \cos \varphi + b (r/R) \sin \varphi + c \sqrt{1 - (r/R)^2}.$$

1) Обычное удаление вклада сдвига по z только занулением 1-го и 4-го коэффициентов аппроксимации интерферограммы полиномами $Z_i(r, \varphi)$ соответствует приближению корня двумя членами:

$$\sqrt{1 - r^2/R^2} \approx 1 - r^2/(2R^2).$$

При $\theta_0 = \pi/2$ обнуление 1-го и 4-го коэф-тов оставляет от корня среднеквадратично: на плоскости апертуры - 0,05, на сфере - 0,09.

2) Вклады сдвигов по x и y , пропорциональные $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, удаляются полностью занулением 2-го и 3-го коэффициентов - но при условии, что среднеквадратичные значения вычисляются с весом, постоянным на плоской апертуре.

Для сфер более адекватен вес $W_{\theta_0}(r) = 1/\cos\theta = 1/\sqrt{1-r^2/R^2}$. Тогда положение ближайшей сферы определится минимизацией функционала

$$\Phi(E, a \sin \theta_0, b \sin \theta_0, c) = \int \left[\sum_i h_i Z_i - E - a \sin \theta_0 r \cos \varphi - b \sin \theta_0 r \sin \varphi - c \sqrt{1-r^2 \sin^2 \theta_0} \right]^2 W_{\theta_0}(r) r dr d\varphi.$$

Отсюда следует, что обнуление второго коэффициента не убирает сдвига по x :

$$a \sin \theta_0 = 2h_2 + 2 \sum_{i_c \neq 2} h_{i_c} \int Z_{i_c} Z_2 \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{R^2 - r^2}} / \int Z_2^2 \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{R^2 - r^2}} \equiv \frac{2}{H_2} \sum_{i_c} h_{i_c} H_{i_c},$$

так как для этого и другие коэффициенты h_{i_c} также должны быть равны нулю.

Сдвиг убирается заменой $h_2' = h_2 - (a/2) \sin \theta_0 = (-h_8 H_8 - h_{16} H_{16} - \dots) / H_2$. Аналогично для сдвигов по y .

Для сдвига по z аксиально-симметричные коэффициенты поверхности есть

$$e_{i_0} = -h_{i_0} + E \delta_{1,i_0} + c c_{i_0},$$

где c_{i_0} - коэффициенты аппроксимации корня полиномами $Z_i(r, \varphi)$.

Изложенная методика ценна своей универсальностью. Она применима в тех случаях, когда при сложной поверхности введение базиса на ней затруднительно. Она работает и тогда, когда поверхность очень сложна, и непросто вывести формулы настройки и веса, и даже тогда, когда поверхность задается численно на некоторой сетке. В этих случаях вся работа может проходить с аппроксимирующими рядами численно на ЭВМ без использования аналитических процедур. Такая методика позволяет аттестовать по интерферограмме практически любую реальную поверхность.

В третьем параграфе второй главы построен базис $Z_i^{\theta_0}(\theta, \varphi)$ на части сферы с выделенными функциями настройки, необходимый для одновременной обработки нескольких интерферограмм от одной поверхности с целью наилучшего подавления шума в данных или восстановления деформации по неполным по отдельности сеткам.

Очевидно, в деформации сферической поверхности должен отсутствовать вклад функций смещений и константы, т.е. в описании деформации все 4 параметра настройки (E, a, b, c) должны быть равны нулю. Тогда (см. форм. (2)), в первых, $Z_1^{\theta_0}(\theta, \varphi)$ и $Z_4^{\theta_0}(\theta, \varphi)$ для описания деформаций не требуются, они имеют

отношение исключительно к описанию настройки $d(\theta, \varphi)$. Во-вторых, коэффициенты e_i аппроксимации деформации должны удовлетворять условиям:

$$\sum e_i c_i = 0, \quad \sum e_i s_i = 0,$$

т.е. для описания деформации можно использовать модифицированные полиномы единичной азимутальной частоты в меньшем на 2 количестве. Тогда базис на части сферы с выделенными функциями настройки можно выбрать таким:

$$Z_2^{\theta_0} = \sqrt{6} / \sqrt{2 - \cos \theta_0 - \cos^2 \theta_0} \sin \theta \cos \varphi,$$

$$Z_3^{\theta_0} = \sqrt{6} / \sqrt{2 - \cos \theta_0 - \cos^2 \theta_0} \sin \theta \sin \varphi,$$

$$Z_{i_c}^{\theta_0} = Z_{i_c}^{\theta_0} - \frac{c_{i_c}}{c_2} Z_2^{\theta_0}, \quad i_c \neq 2,$$

$$Z_{i_s}^{\theta_0} = Z_{i_s}^{\theta_0} - \frac{s_{i_s}}{s_3} Z_3^{\theta_0}, \quad i_s \neq 3,$$

$$Z_i^{\theta_0} = Z_i^{\theta_0}, \quad \text{для других индексов.}$$

В этом случае первыми четырьмя полиномами аппроксимируется настройка, а ошибки сферы будут описываться рядом, начинающимся с пятого номера.

В четвертом параграфе построен базис на сферическом кольце для случая зеркал с круглым центральным отверстием (или затенением) и приведены формулы для удаления настройки для растворов апертур практически до π . Одновременно получен новый алгоритм ускоренного вычисления полиномов Цернике.

В пятом параграфе решена задача восстановления деформаций квадратной в плане части цилиндрической поверхности.

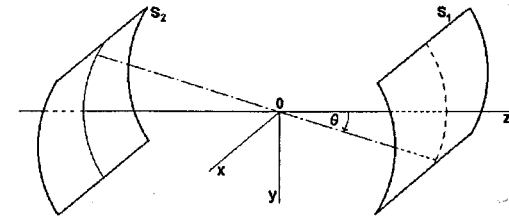


Рис. 5.

Система координат - $\{(x, \theta): -x_0 \leq x \leq x_0, -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0\}$. В первом приближении

$$d(x, \theta) = (\beta x + b) \sin \theta + (\gamma x + c) \cos \theta.$$

β и γ есть тангенсы углов (а практически углы) между проекциями осей цилиндров на плоскости xu и xz соответственно, b и c - расстояния между осями в плоскости $x=0$ вдоль Oy и Oz соответственно.

Вводится двумерный ортогональный, нормированный на $4x_0\theta_0$ базис с помощью полиномов Лежандра:

$$P_{m,n}^{x_0,\theta_0}(x,\theta) = \sqrt{2m+1}\sqrt{2n+1} P_m(x/x_0) P_n(\theta/\theta_0).$$

Минимизация функционала с весом, постоянным на поверхности цилиндра, дает значения параметров настройки через коэффициенты аппроксимации:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{4\sqrt{3}\theta_0}{x_0(2\theta_0 - \sin 2\theta_0)} \sum_{k=0}^{\infty} h_{1,2k+1} s_{2k+1}, \\ \gamma &= \frac{4\sqrt{3}\theta_0}{x_0(2\theta_0 + \sin 2\theta_0)} \sum_{k=0}^{\infty} h_{1,2k} c_{2k}, \\ b &= \frac{4\theta_0}{2\theta_0 - \sin 2\theta_0} \sum_{k=0}^{\infty} h_{0,2k+1} s_{2k+1}, \\ c &= \frac{4\theta_0^2}{2\theta_0^2 + \theta_0 \sin 2\theta_0 - 4 \sin^2 \theta_0} \sum_{k=0}^{\infty} h_{0,2k+2} c_{2k+2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь s_{2k+1} и c_{2k} ($k=0,1,2,\dots$) - коэффициенты разложения по функциям $\sqrt{2j+1}P_j(\theta/\theta_0)$ функций $\sin\theta$ и $\cos\theta$ соответственно. Для $\theta_0 \leq 45^\circ$ и смещений до 10λ точность удаления настройки лучше $10^{-3}\lambda$ дает учет четырех первых пар этих коэффициентов. Переход от коэффициентов h_{mn} аппроксимации интерферограммы к коэффициентам e_{mn} разложения деформации следующий:

$$e_{mn} = \begin{cases} 0, & m=0, \quad n=0 \\ b s_n - h_{0n}, & m=0, \quad n - \text{нечетн.} \\ c c_n - h_{0n}, & m=0, \quad n - \text{четн., } n > 0 \\ x_0 \beta s_n / \sqrt{3} - h_{1n}, & m=1, \quad n - \text{нечетн.} \\ x_0 \gamma c_n / \sqrt{3} - h_{1n}, & m=1, \quad n - \text{четн.} \\ -h_{mn}, & m > 1 \end{cases}$$

Для одновременной обработки нескольких интерферограмм вводится базис $P_{mn}^{x_0,\theta_0}$ с выделенными функциями настройки. Их пять:

$$P_{00}^{x_0,\theta_0} = 1, \quad P_{01}^{x_0,\theta_0} = \sin\theta, \quad P_{10}^{x_0,\theta_0} = x \cos\theta, \quad P_{11}^{x_0,\theta_0} = x \sin\theta, \quad P_{02}^{x_0,\theta_0} = \cos\theta.$$

Другие функции $P_{mn}^{x_0,\theta_0}$ с $m=0$ и $m=1$ определяются, обеспечивая обнулением сумм в (3) отсутствие в деформации вкладов сдвигов и наклонов:

$$\left. \begin{aligned} P_{0,2k+1}^{x_0,\theta_0} &\equiv P_{0,2k+1}^{x_0,\theta_0} - \frac{s_{2k+1}}{s_1} P_{0,1}^{x_0,\theta_0} \\ P_{0,2k+2}^{x_0,\theta_0} &\equiv P_{0,2k+2}^{x_0,\theta_0} - \frac{c_{2k+2}}{c_2} P_{0,2}^{x_0,\theta_0} \\ P_{1,2k+1}^{x_0,\theta_0} &\equiv P_{1,2k+1}^{x_0,\theta_0} - \frac{s_{2k+1}}{s_1} P_{1,1}^{x_0,\theta_0} \\ P_{1,2k}^{x_0,\theta_0} &\equiv P_{1,2k}^{x_0,\theta_0} - \frac{c_{2k}}{c_0} P_{1,0}^{x_0,\theta_0} \end{aligned} \right\}, \quad k > 0.$$

При $m > 1$ $P_{m,n}^{x_0,\theta_0} \equiv P_{m,n}^{x_0,\theta_0}$. В аппроксимации интерферограммы $H(x,\theta)$ рядом по этим функциям

$$H(x,\theta) = E \cdot P_{0,0} + b \cdot P_{0,1} + \gamma \cdot P_{1,0} + \beta \cdot P_{1,1} + c \cdot P_{0,2} + \sum_{m,n} \tilde{h}_{m,n} P_{m,n},$$

пары индексов (m,n) не повторяют пяти выделенных пар.

Для перехода к коэффициентам аппроксимации деформации полиномами $P_{m,n}^{x_0,\theta_0}$ надо только найти $e_{0,1}, e_{1,0}, e_{1,1}, e_{0,2}$ подстановкой коэффициентов

$$e_{m,n} = -\tilde{h}_{m,n}, \quad (m > 1)$$

в приравняемые нулю суммы в равенствах (*).

Таким образом, во второй главе помимо конкретных результатов для аттестации сферических и цилиндрических поверхностей с большой угловой апертурой разработан общий алгоритм разделения вкладов в интерферограмму от настройки и от собственно деформации практически любой реалистической оптической поверхности, позволяющий повысить точность аттестации сложных поверхностей вплоть до точности самой стандартной модели интерферограммы. Кроме того, образованы базисы, обеспечивающие возможность одновременной совместной обработки нескольких интерферограмм от одной и той же поверхности.

В третьей главе по методике второго параграфа второй главы построены математические алгоритмы аттестации асферических поверхностей - эллипсоида, параболоида и гиперboloида вращения - работающие с высокой точностью и при больших угловых апертурах. Для этих поверхностей функции настройки зависят от пяти параметров и константы. В первом приближении порядок смещений безразличен, эфффекты суммируются.

$$1. \text{ Эллипсоид вращения } x^2 + y^2 + E z^2 - R^2 / E = 0.$$

Функция настройки (с точностью до константы и знаков вкладов):

$$d(r, \varphi) = \left[\left(a + \alpha \frac{E-1}{E} \sqrt{R^2 - Er^2} \right) r \cos \varphi + \left(b + \beta \frac{E-1}{E} \sqrt{R^2 - Er^2} \right) r \sin \varphi + c \sqrt{R^2 - Er^2} \right] / \sqrt{R^2 - (E-1)r^2},$$

где a, b, c - сдвиги по x, y, z ; α и β - наклоны вокруг осей y и x . В случае сферы $E=1$, повороты α и β не действуют, остаются три сдвига.

2. Для параболоида вращения $z = -er^2$

$$d(r, \varphi) = \left[a 2er \cos(\varphi - \varphi_1) + \alpha r \sin(\varphi - \varphi_2) (1 + 2e^2 r^2) + c \right] / \sqrt{1 + 4e^2 r^2},$$

где φ_1 - направление сдвига зеркала, φ_2 - направление оси вращения (наклона).

3. Для гиперboloида $(x^2 + y^2) / u^2 - z^2 / v^2 = -1$ функция настройки:

$$d(r, \varphi) = \left[avr \cos(\varphi - \varphi_1) + \alpha \sqrt{r^2 + u^2} (u^2 + v^2) r \sin(\varphi - \varphi_2) / u + cu \sqrt{r^2 + u^2} \right] / \sqrt{r^2 (u^2 + v^2) + u^4}.$$

При малой асферичности возможна минимизация функционала с весом, постоянным на сфере, которая легко проводится с базисом на части сферы. Тогда функции настройки следует переписать в переменных θ и φ .

Итак, имеем интерферограмму $H(r, \varphi) = \sum_{i=1}^P h_i Z_i(r, \varphi)$. Вклады в нее от разных элементов настройки есть $\gamma_n G_n(r, \varphi)$. Аппроксимируем G_n :

$$G_n = \sum_j g_j^n Z_j(r, \varphi).$$

Минимизируем функционал с весом $W(r)$ (поверхности вращения):

$$\Phi(\{\gamma_n\}) = \int_0^{12\pi} \int_0^1 \left[\sum_i h_i Z_i(r, \varphi) - \sum_n \gamma_n \sum_j g_j^n Z_j(r, \varphi) \right]^2 W(r) r dr d\varphi.$$

Получается система N уравнений относительно N параметров настройки

$$\int_0^{12\pi} \int_0^1 \left[\sum_i h_i Z_i(r, \varphi) - \sum_n \gamma_n \sum_j g_j^n Z_j(r, \varphi) \right] \left(\sum_k g_k^m Z_k \right) W(r) r dr d\varphi = 0.$$

Можно разложить вес $W(r)$ по аксиально-симметричным полиномам Z_i :

$$W(r) = \sum w_i Z_i(r, \varphi).$$

Тогда возникает система уравнений:

$$\sum_i h_i \sum_k g_k^m \sum_l w_l \int Z_i Z_k Z_l r dr d\varphi = \sum_n \gamma_n \sum_i g_i^n \sum_k g_k^m \sum_l w_l \int Z_i Z_k Z_l r dr d\varphi.$$

Матрица интегралов компактно табулируется. Решение этой системы дает значения параметров настройки и тем самым деформацию поверхности.

В этой главе указан важный источник возможных ошибок аттестации. Если в интерферометре эталоном служит такая поверхность, что вклад от ее смещений в настройку имеет ту же форму, что и от контролируемой, давая совместно вклад той же формы, то в функционале требуется определить параметры только одной функции, и задача разделения вкладов разрешима однозначно. Так будет при совпадении (с точностью до константы) ближайших поверхностей двух зеркал. Если же, как это может быть при использовании корректоров пучка, эталон и контролируемая поверхность имеют разные формы, и общий вклад от настроек двух зеркал нельзя имитировать вкладом настройки одного зеркала, то задача выделения деформаций контролируемой поверхности из интерферометрических данных не разрешима однозначным образом. В этом случае для повышения точности аттестаций необходимо как можно точнее знать положение одного из зеркал.

В четвертой главе изложены исследования по восстановлению поверхностей по комбинациям интерферограмм.

В первом параграфе известный метод аттестации сферического зеркала по трем интерферограммам без использования информации об эталоне [17,6,18] расписан с помощью полиномов на части сферы с выделенными функциями настройки.

1-я интерферограмма - зеркало S_2 со сферическим эталоном S_1 ;

2-я интерферограмма - со сферическим эталоном S_1 , повернутым по φ на π ;

3-я интерферограмма - зеркало S_3 , поставленное вблизи фокуса O пучка, с эталоном S_1 (рис. 6):

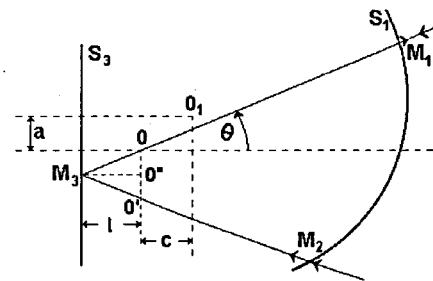


Рис. 6.

Удаление настройки из аппроксимации интерферограмм полиномами $Z_i^{(0)}(\theta, \varphi)$ производится обнулением первых четырех коэффициентов. Тогда в первых двух расположениях разности хода лучей за вычетом настройки представляются рядами:

$$F^{(1)}(\theta, \varphi) = -2[S_1(\theta, \pi - \varphi) + S_2(\theta, \pi + \varphi)] = \sum_{i=5}^{\infty} \tilde{f}_i^{(1)} \tilde{Z}_i^{(0)}(\theta, \varphi), \quad (4)$$

$$F^{(2)}(\theta, \varphi) = -2[S_1(\theta, \pi - \varphi) + S_2(\theta, \varphi)] = \sum_{i=5}^{\infty} \tilde{f}_i^{(2)} \tilde{Z}_i^{(0)}(\theta, \varphi).$$

В третьем расположении разность хода лучей $M_2M_3M_1$ и отраженного в точке M_1 равна $2[R_1 + (c+1)\cos\theta]$. Тогда разность фаз в точке M_1 с точностью до константы равна (ниже $W(\theta, \varphi)$ - фронт сферического пучка):

$$D(\theta, \varphi) = W(\theta, \varphi) - W(\theta, \pi + \varphi) - 2S_1(\theta, \pi - \varphi) + 2(c+1)\cos\theta.$$

В части ряда, начинающейся с $i=5$, сохранится вся информация об S_1 :

$$F^{(3)}(\theta, \varphi) = \sum_{i=5}^{\infty} \tilde{f}_i^{(3)} \tilde{Z}_i^{(0)}(\theta, \varphi) = \sum_{i=5}^{\infty} \omega_i [Z_i^{(0)}(\theta, \varphi) - Z_i^{(0)}(\theta, \pi + \varphi)] - 2S_1(\theta, \pi - \varphi) \quad (5)$$

Обозначая $\Phi^{(i)}(\theta, \varphi) \equiv F^{(i)}(\theta, \pi + \varphi)$, получим из трех уравнений (4) и (5):

$$S_2(\theta, \pi + \varphi) = (F^{(3)} + \Phi^{(3)} - F^{(1)} - \Phi^{(2)}) / 4.$$

Формально точность этого метода калибровки высока. Но в третью интерферограмму дает вклад неоднородный фронт, для аппроксимации которого может потребоваться нереалистически длинный ряд. Поэтому ожидавшаяся высокая точность метода фактически не гарантируется.

Второй параграф в основном для методических целей посвящен интерферограммам бокового и поворотного сдвига и возможностям аттестации по ним.

В третьем параграфе предложена модификация известного [8] алгоритма обработки данных метода абсолютной калибровки (без эталона) трех плоских зеркал по четырем интерферограммам. В этом способе измеряются расстояния между четырьмя парам из трех зеркал, по крайней мере одна из пар - с поворотом (рис. 7). В простейшем варианте (и за вычетом настройки) уравнения имеют вид:

$$S^1(x, y) + S^2(-x, y) = F^1(x, y), \quad S^3(x, y) + S^2(-x, y) = F^2(x, y),$$

$$S^3(x, y) + S^1(-x, y) = F^3(x, y), \quad S^3_{rot}(x, y) + S^2(-x, y) = F^4(x, y).$$

Эта информация позволяет аттестовать без эталонов все три зеркала.

Первоначально расчеты проводились по отдельным разрезам по точкам.

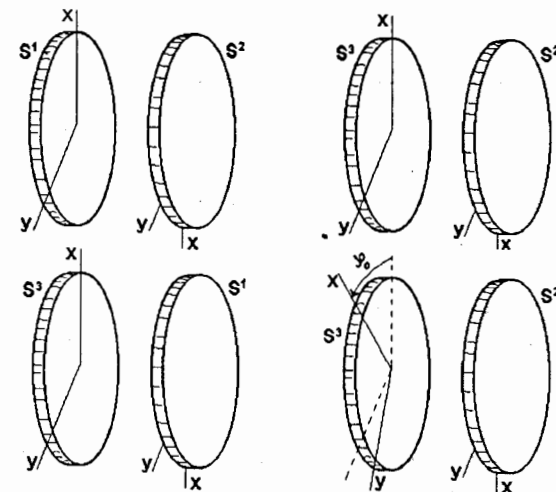


Рис. 7.

В статье [8] использовалась полиномиальная аппроксимация. Коэффициенты аппроксимации поверхностей получались из коэффициентов аппроксимации интерферограмм прямым алгебраическим пересчетом по одному из возможных путей получения решения без учета других имеющихся связей. Из-за этого не лучшим образом подавлялся шум и выбирались условия измерения.

Здесь искалось решение в смысле наименьших квадратов, использующее все данные. В подходе статьи [8] оптимальное значение угла поворота $\varphi_0 \approx 3\pi/4M$, где M - максимальное из используемых азимутальное число. Новое оптимальное $\varphi_0 \approx 3\pi/2M$, что повышает разрешение. В результате лучшая точность метода оказывается практически равной точности аттестации с идеальным эталоном.

Аналогичный алгоритм разработан и программно реализован для сферических зеркал, как вогнутых, так и выпуклых без ограничений на угловую апертуру.

В четвертом параграфе рассматриваются возможности и способы восстановления поверхности по нескольким интерферограммам для 1) подавления шума в данных и для 2) восстановления поверхности по набору интерферограмм с недостаточно представительными по отдельности данными.

При наличии данных на хороших сетках первая задача может решаться путем восстановления формы поверхности по отдельным интерферограммам с последующим усреднением результатов. Но самым общим, полностью и пропор-

ционально использующим все данные является метод "обобщенной интерферограммы". При повторных съемках вклад в интерферограмму дают одна и та же поверхность и разные настройки. Тогда при описании сразу всех данных с помощью полиномиальной аппроксимации параметры настройки должны варьироваться для разных измерений независимо, параметры же (коэффициенты) поверхности остаются одними и теми же для всех измерений. Такая аппроксимация может быть получена при наличии базисов с выделенными функциями настройки:

$$\sum_{i=1}^K \left[\sum_{j=1}^P h_j^i Z_i(u_{n_j}, v_{n_j}) \right] \delta_{ij} + \sum_{i=p+1}^P h_i Z_i(u_{n_i}, v_{n_i}) = H(u_{n_i}, v_{n_i}). \quad (6)$$

Здесь $Z_i(u,v)$ - значение i -го полинома в точке (u,v) ; h_i - коэффициенты аппроксимации; K - число интерферограмм; n_j - номер точки в j -й интерферограмме; P - число полиномов аппроксимации; p - число полиномов, описывающих настройку: p равно 3 для плоскости, 4 для сферы, 5 для цилиндра, 6 для асферических поверхностей вращения.

а) Метод применим для восстановления сложных деформаций даже в случае относительно редких сеток, не допускающих подробного восстановления по отдельным интерферограммам.

б) Аналогичный прием применим для восстановления деформаций поверхностей по методу Гартмана, пространственное разрешение которого ограничено.

в) В этом методе, очевидно, необходимым условием восстановления реальной поверхности является существенное перекрытие областей, снимаемых в разных интерферограммах, что требуется для определения взаимных наклонов разных частей поверхности. Однако J.Thunel, O.Kwon, W.Chow, G.Lawrence, S.Jensen, T.Stuhlinger, J.Negro, R.Day, Th.Beery [9-14] это условие отбросили из-за неосознаваемого приписывания самой оптической поверхности аналитических свойств ее полиномиальной аппроксимации, что принципиально неверно.

В этом параграфе решается также задача восстановления поверхности шара по интерферограммам от перекрывающихся ее областей. В статье [14] Day R. и Beery Th. также предложили решение аналогичной задачи. Однако:

1) их алгоритм использует базисы, не вполне адекватные задаче, из-за чего возникают проблемы с точностью аппроксимации;

2) процедура без серьезных оснований разделена на два этапа: аппроксимацию кусочных интерферограмм и последующее нахождение коэффициентов разложения на всей сфере;

3) коэффициенты аппроксимации деформации полиномами на всей сфере получаются из коэффициентов аппроксимации полиномами на частях сферы пересчетом из одного базиса в другой - как будто речь идет всего лишь о масштабных преобразованиях базисных функций. Число полиномов аппроксимации полной поверхности полагалось (как и другими авторами, указанными в этом разделе) равным числу полиномов аппроксимации ее частей, что неправильно.

Соответственно последнему пункту авторы и рассматривают перекрытия интерферограмм как трудности, усложняющие процедуру нахождения коэффициентов. То есть фактически считалось, что деформация одной части сферы что-то говорит о деформации в других частях сферы (по законам продолжения аналитических функций), что в данном случае неверно: реальная контролируемая поверхность не является аналитической, а аппроксимация большей области требует при той же точности больше полиномов, чем аппроксимация части области.

В диссертации предложен следующий алгоритм восстановления. В качестве базиса естественно взять перенормированные на 4π сферические функции:

$$\Phi_i(\theta, \varphi) = \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \theta) \begin{cases} \sqrt{2} \cos m\varphi, & i \text{ чётн}, m \neq 0 \\ \sqrt{2} \sin m\varphi, & i \text{ нечётн}, m \neq 0 \\ 1, & m = 0 \end{cases}$$

Связь индексов - как у полиномов Цернике. 2-я, 3-я и 4-я функции имеют форму эффектов децентровок в первом приближении.

Решается в смысле наименьших квадратов система для всего комплекса данных K интерферограмм при P искомым коэффициентах аппроксимации:

$$\sum_{i=1}^K \left[\sum_{j=1}^4 h_j^i \Phi_i(\theta_{n_j}, \varphi_{n_j}) \right] \delta_{ij} + \sum_{i=5}^P h_i \Phi_i(\theta_{n_i}, \varphi_{n_i}) = H(\theta_{n_i}, \varphi_{n_i}).$$

Существенные перекрытия снимаемых областей обязательны.

Пятая глава посвящена вопросам точности восстановления поверхностей.

В первом параграфе для сферической поверхности проанализирована точность стандартно применяемой модели интерферограммы в виде простой суммы вкладов деформации и настройки. Она получается в первом приближении по от-

ношению этих величин к размерам зеркал и в типичных обстоятельствах обеспечивает точность не хуже $10^{-3}\lambda$ (или мкм). Изучение влияния второго порядка показывает, что при обычных условиях измерений он не дает существенных поправок кроме случая аттестации сегментированного зеркала.

Во втором параграфе пятой главы рассчитываются вызванные шумом в данных ошибки восстановления поверхностей и вкладов аберраций по интерферограммам с эталоном и радиального сдвига. Приведены таблицы результатов для квадратных сеток с числами узлов $N \approx 100, 200, 300$ и 400 и числами полиномов аппроксимации P от 15 до 91 (от 4-й степени до 12-й), полученные в расчетах с модельным шумом - по 40000 модельных зашумленных интерферограмм в каждом случае. Получены средние по ним (см. образец таблицы)

- среднеквадратичное (на сетке) уклонение σ_1 аппроксимации от данных;
- среднеквадратичная (по поверхности) ошибка σ_s восстановления поверхности (строка α);
- оценка ошибки восстановления поверхности по информации об уклонении аппроксимации от данных (строка β);
- корень из дисперсии среднеквадратичной ошибки восстановления поверхности (строка γ);
- ошибки восстановления коэффициентов (вкладов аберраций) различных радиальных степеней n ($n = 0 \div n_{\max}$),

а также некоторые вспомогательные величины, характеризующие устойчивость и точность восстановления.

Хорошая обусловленность систем возникает при $N/P \geq 4$. При этом для оценок применимы простые формулы, связывающие разные этапы измерения и обработки данных. В этой области для шума с единичной дисперсией уклонение аппроксимации от данных $\sigma_1 \approx 0.85 \div 0.90$. Это соотношение позволяет определять примерно с пятипроцентной точностью шум оцифровки по невязке. Оно позволяет также по известному шуму σ в оцифровке находить в конечном счете точность аттестации поверхности σ_s . При хороших сетках $\sigma_1 = \sqrt{(N-P)/N} \sigma$, где σ - величина шума. Тогда же ошибка аттестации поверхности $\sigma_s = \sqrt{(P-3)/(N-P)} \sigma_1$, то есть $\sigma_s = \sqrt{(P-3)/N} \sigma$. Ошибки аттестации по другим методам контроля могут быть

оценены по ошибкам аттестации с эталоном. Без такой информации аппарат аттестации поверхностей по интерферограммам является неполным.

Таблица ошибок аттестации

Точек сетки $N=197$; степень полинома $n_{\max} = 8$; число полиномов $P=45$. Число обусловленности = 4.5; $N/P = 4.38$; $(N-P)/P = 3.38$; $\text{SQRT}(1/2N) = .0504$; $\text{SQRT}((N-P)/N) = .878$; $\text{SQRT}((P-3)/N) = .462$. Уклонение аппроксимации = 0.88.

$\rho =$	1.05	1.1	1.2	1.4	1.7	2.0	10.0	ЭТАЛОН									
α	О	Ш	И	Б	К	И	П	О	В	Е	Р	Х	Н	О	С	Т	И
β	6.77	3.51	1.88	1.09	.78	.67	.50	.50	.50	.50	.50	.50	.50	.50	.50	.50	.50
γ	7.15	3.69	1.97	1.12	.77	.64	.44	.46	.46	.46	.46	.46	.46	.46	.46	.46	.46
γ	1.82	.93	.48	.26	.16	.12	.06	.06	.06	.06	.06	.06	.06	.06	.06	.06	.06
n	О	Ш	И	Б	К	И	К	О	Э	Ф	Ф	И	Ц	-	Т	О	В
0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	.072
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	.072
2	2.994	1.535	.804	.441	.290	.229	.076	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075
3	1.542	.798	.427	.241	.159	.123	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075
4	1.168	.608	.330	.191	.129	.103	.078	.078	.078	.078	.078	.078	.078	.078	.078	.078	.078
5	.661	.342	.183	.106	.083	.078	.076	.076	.076	.076	.076	.076	.076	.076	.076	.076	.076
6	.559	.289	.155	.096	.082	.080	.080	.080	.080	.080	.080	.080	.080	.080	.080	.080	.080
7	.266	.158	.107	.085	.079	.077	.077	.077	.077	.077	.077	.077	.077	.077	.077	.077	.077
8	.249	.151	.105	.086	.082	.081	.080	.080	.080	.080	.080	.080	.080	.080	.080	.080	.080

В третьем параграфе сравниваются разные способы обработки нескольких интерферограмм от одной поверхности в отношении чувствительности к шуму в данных. Оптимален метод "обобщенной интерферограммы" (форм. (6)).

В четвертом параграфе пятой главы разобраны ошибки аттестации сферических поверхностей методом Гартмана в сферическом пучке (рис. 8).

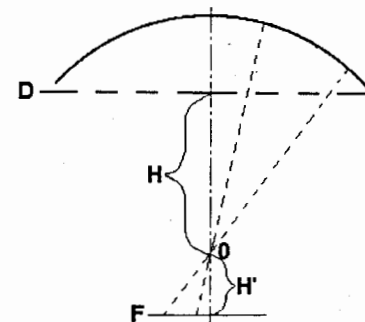


Рис. 8.

Метод Гартмана аттестации фронтов и зеркал состоит в пропускании света через диафрагму D с отверстиями и в анализе смещений пятен на экране F отно-

сительно положений, которые они занимали бы при идеальных поверхностях. Смещения пятен дают информацию о локальных наклонах (производных) фронта.

Однако смещения пятен, вызванные смещениями диафрагмы и экрана (фотопластины), могут быть частично или полностью неотличимы от смещений, вызванных дефектами фронта. Эффекты рассмотрены в первом приближении.

- 1) Сдвиг диафрагмы к зеркалу на h меняет угол θ пятна на

$$\Delta\theta = - (h / 2H)\sin 2\theta,$$

что может быть понято как влияние зональной ошибки зеркала.

- 2) Наклон диафрагмы на угол α вокруг оси φ_0 меняет угол θ пятна на

$$\Delta\theta = - \alpha \sin^2\theta \sin(\varphi - \varphi_0).$$

- 3) При боковом сдвиге диафрагмы на s в направлении φ_0

$$\Delta\theta = (s / H) \cos^2\theta \cos(\varphi - \varphi_0),$$

а для $H\theta \gg s$ полярный угол изменится на

$$\Delta\varphi = (s / H \operatorname{tg}\theta) \sin(\varphi - \varphi_0).$$

Сдвиги фотопластины еще важнее. Все эти эффекты не могут быть изображены комбинацией производных от функции настройки $d(\theta, \varphi)$ по меридиональному и широтному направлениям, поэтому они не вполне отличимы от вкладов действительных дефектов зеркал и в соответствующей степени неустранимы. Попытки (типа [19]) их удалить, комбинируя координаты пятен, необоснованны.

Реальную неопределенность контроля методом Гартмана можно найти, подставив параметры схемы контроля и неточности юстировки в формулы дополнительных смещений пятен, восстановив по ним, как по данным, кажущуюся поверхность и стандартно удалив настройку. Остаток укажет неустранимую ошибку.

В шестой главе описываются основные характеристики программных реализаций алгоритмов обработки интерферограмм, созданных на основе разработанного математического аппарата. Единая методика рассмотрения различных методов интерферометрического контроля позволяет строить комплексы программ аттестации поверхностей по интерферограммам по модульному принципу. Программы применялись в ГОИ им. С.И.Вавилова и во ВНИИМС, а также для упомянутых выше модельных расчетов точности восстановления поверхностей при наличии случайного шума в данных.

В заключении перечислены основные результаты и выводы, полученные в диссертации.

1. Для сферических, цилиндрических, параболических, гиперболических и эллиптических зеркал с большой угловой апертурой разработан в аналитическом виде аппарат восстановления деформаций, работающий с точностью самой стандартной модели интерферограммы. Разработана методика обработки с подобной точностью интерферограмм от других оптических поверхностей, заданных в численном виде на сетке. Указаны случаи, когда задача разделения вкладов в интерферограмму от деформаций и от настройки не разрешима однозначно. В остальных случаях развитый аппарат снимает необходимость в особо точной настройке измерительной схемы, поскольку математические процедуры в сочетании с высокой точностью определить и необходимым образом учесть действительную настройку.

2. Для обработки наборов интерферограмм, в том числе от поверхностей с большой угловой апертурой:

а) разработан близкий по точности к аттестации с идеальным эталоном математический алгоритм для метода абсолютной калибровки трех плоских или сферических зеркал по четырем интерферограммам, полностью использующий все данные, и указаны оптимальные параметры измерений;

б) разработан математический алгоритм для калибровки сферического зеркала по трем интерферограммам и показано, что предполагавшаяся ранее высокая точность этого метода практически недостижима;

в) сопоставлены различные способы обработки набора интерферограмм от одной поверхности. Для работоспособности наиболее адекватного задаче метода "обобщенной интерферограммы" построены базисы с выделенными функциями настройки для цилиндрических и сферических зеркал (в том числе и для зеркал с центральным отверстием);

г) показана ошибочность предложенного ранее метода восстановления поверхности по интерферограммам от не перекрывающихся ее частей;

3. На основании расчетов с модельным шумом в интерферометрических данных для различных сеток и степеней полиномов аппроксимации получены надежные оценки вызванных шумом ошибок восстановления поверхностей и вкла-

дов аберраций, необходимые для реальных оценок точности аттестации и для планирования измерений.

4. Для восстановления деформаций сферических поверхностей по методу Гартмана показано, что обычные неточности юстировки приводят к неустранимым существенным ошибкам в аттестации. Указан алгоритм получения оценок таких ошибок в конкретных случаях.

Таким образом, создана математическая база для математического обеспечения в широких условиях высокоточной аттестации основных типов оптических поверхностей в главных видах интерферометрического контроля.

Основные защищаемые положения.

Создание математической базы для математического обеспечения в широких условиях высокоточной аттестации основных типов оптических поверхностей в главных видах интерферометрического контроля, а именно:

1. Метод математического разделения вкладов в интерферограмму от деформаций оптической поверхности и от настройки измерительной схемы, использующий базисы на контролируемой поверхности или необходимую весовую функцию в функционале разделения вкладов.

2. Математические алгоритмы высокоточной ($\sim 0,001$ мкм) аттестации по интерферограммам неплоских поверхностей с большой угловой апертурой.

3. Доказательство невозможности однозначного выделения вклада настройки в интерферограмму при использовании эталонов неподходящей формы.

4. Математические алгоритмы абсолютной калибровки плоских и сферических поверхностей по наборам интерферограмм.

5. Метод "обобщенной интерферограммы" аттестации неплоских поверхностей с использованием разработанных базисов с выделенными функциями настройки.

6. Доказательство необоснованности методов аттестации поверхности по наборам интерферограмм от не перекрывающихся ее частей.

7. Оценки точности аттестации поверхностей и вкладов аберраций в зависимости от шума в данных при различных сетках и степенях аппроксимирующих полиномов.

Основные результаты, представленные в диссертации, опубликованы в следующих работах:

1. Витриченко Э.А., Войцехович В.В., Губин В.Б., Ламанов А.В., Микулич А.В., Севастьянов Л.А. Программно-математический комплекс для обработки киногоартмограмм // Препринт Института космических исследований АН СССР. - 1987 г. № 1209. 23 с.

2. Войцехович В.В., Губин В.Б., Ламанов А.В., Микулич А.В. Предварительные результаты исследований динамики атмосферы // Препринт Института космических исследований АН СССР. - 1987 г. № 1217. 16 с.

3. Войцехович В.В., Губин В.Б., Микулич А.В. Оценка параметров адаптивных астрономических систем на основе экспериментальных данных // Оптика атмосферы, 1988. Т. 1. № 5. С. 66-70.

4. Губин В.Б., Шаронов В.Н. О точности восстановления оптических поверхностей по интерферометрическим данным // Тезисы докл. XXV научной конференции факультета физико-математических и естественных наук. 15-20 мая 1989 г. - М.: изд. Ун-та дружбы народов им. Патриса Лумумбы. 1989. С. 29.

5. Губин В.Б., Шаронов В.Н. О методах абсолютной калибровки оптических поверхностей // Всесоюзная конференция "Вычислительная физика и математическое моделирование". Волгоград, 12-18 сентября 1988 г. Тезисы докладов. - М.: изд. Ун-та дружбы народов им. Патриса Лумумбы. 1989. С. 25-26.

6. Губин В.Б., Микулич А.В., Шаронов В.Н. Об алгоритме восстановления оптических поверхностей и определения вкладов аберраций // Сб. тезисов докладов всесоюзного семинара "Методы контроля формы оптических поверхностей". - Л.: изд. ГОИ. 1989. С. 31-33.

7. Губин В.Б., Шаронов В.Н. Алгоритм обработки интерферограмм радиального сдвига // ОМП¹⁾, 1989. № 6. С. 4-6.

8. Губин В.Б., Шаронов В.Н. Комплекс программ для обработки интерферограмм // Сб. тезисов докладов всесоюзного семинара "Методы контроля формы оптических поверхностей". - Л.: изд. ГОИ. 1989. С. 29-30.

9. Губин В.Б., Шаронов В.Н. Полиномы Цернике на части сферы, отсекаемой плоскостью // Всесоюзная конференция "Вычислительная физика и матема-

¹⁾ "Оптико-механическая промышленность".

тическое моделирование". Волгоград, 11-14 сентября 1989 г. Тезисы докладов. - М.: изд. Ун-та дружбы народов им. Патриса Лумумбы. 1990. С. 29.

10. Губин В.Б., Шаронов В.Н. Определение ошибок сферических поверхностей при интерферометрии со сферическим пучком // ОМП, 1990. № 8. С. 32-35.
11. Губин В.Б. Базис на части сферы с выделенными константой и сдвигами // Деп. ВИНТИ. № 2241-В90. 7 с.
12. Губин В.Б., Шаронов В.Н. О выделении параметров ближайшей поверхности в аппроксимациях интерферограмм от цилиндрических зеркал // Деп. ВИНТИ, № 2465-В90. 12 с.
13. Губин В.Б. О вычитании эффектов положения номинальной поверхности из аппроксимации интерферограммы от асферического зеркала // Деп. ВИНТИ, № 3598-В90. 21 с.
14. Губин В.Б., Шаронов В.Н. Алгоритм восстановления деформаций поверхности шара по интерферограммам ее частей // Деп. ВИНТИ, № 3596-В90. 8 с.
15. Губин В.Б. Об алгоритме калибровки сферического зеркала по трем интерферограммам // Деп. ВИНТИ, № 3597-В90. 10 с.
16. Губин В.Б., Шаронов В.Н. Алгоритм восстановления формы оптических поверхностей по результатам экспериментальных данных // ОМП, 1990. № 3. С. 19-21.
17. Губин В.Б., Шаронов В.Н. Абсолютная калибровка сферических поверхностей // ОМП, 1990. № 9. С. 41-42.
18. Губин В.Б. Об условиях восстановления поверхности по интерферограммам ее частей // Деп. ВИНТИ, № 2467-В90. 11 с.
19. Губин В.Б. О выделении эффектов положения номинальной поверхности из аппроксимации интерферограммы от сферического зеркала // Деп. ВИНТИ, № 2609-В91. 21 с.
20. Губин В.Б., Шаронов В.Н. Алгоритм обработки интерферограмм цилиндрических зеркал // ОМП, 1991. № 3. С. 11-12.
21. Губин В.Б. Об алгоритмах усреднения интерферометрических данных // ОМП, 1991. № 9. С. 22-24.

Основные результаты, представленные в диссертации, опубликованы в следующих работах:

1. Витриченко Э.А., Войцехович В.В., Губин В.Б., Ламанов А.В., Микулич А.В., Севастьянов Л.А. Программно-математический комплекс для обработки киногартманограмм // Препринт Института космических исследований АН СССР. - 1987 г. № 1209. 23 с.
2. Войцехович В.В., Губин В.Б., Ламанов А.В., Микулич А.В. Предварительные результаты исследований динамики атмосферы // Препринт Института космических исследований АН СССР. - 1987 г. № 1217. 16 с.
3. Войцехович В.В., Губин В.Б., Микулич А.В. Оценка параметров адаптивных астрономических систем на основе экспериментальных данных // Оптика атмосферы, 1988. Т. 1. № 5. С. 66-70.
4. Губин В.Б., Шаронов В.Н. О точности восстановления оптических поверхностей по интерферометрическим данным // Тезисы докл. XXV научной конференции факультета физико-математических и естественных наук. 15-20 мая 1989 г. - М.: изд. Ун-та дружбы народов им. Патриса Лумумбы. 1989. С. 29.
5. Губин В.Б., Шаронов В.Н. О методах абсолютной калибровки оптических поверхностей // Всесоюзная конференция "Вычислительная физика и математическое моделирование". Волгоград, 12-18 сентября 1988 г. Тезисы докладов. - М.: изд. Ун-та дружбы народов им. Патриса Лумумбы. 1989. С. 25-26.
6. Губин В.Б., Микулич А.В., Шаронов В.Н. Об алгоритме восстановления оптических поверхностей и определения вкладов аберраций // Сб. тезисов докладов всесоюзного семинара "Методы контроля формы оптических поверхностей". - Л.: изд. ГОИ. 1989. С. 31-33.
7. Губин В.Б., Шаронов В.Н. Алгоритм обработки интерферограмм радиального сдвига // ОМП¹⁾, 1989. № 6. С. 4-6.
8. Губин В.Б., Шаронов В.Н. Комплекс программ для обработки интерферограмм // Сб. тезисов докладов всесоюзного семинара "Методы контроля формы оптических поверхностей". - Л.: изд. ГОИ. 1989. С. 29-30.
9. Губин В.Б., Шаронов В.Н. Полиномы Цернике на части сферы, отсекаемой плоскостью // Всесоюзная конференция "Вычислительная физика и матема-

¹⁾ "Оптико-механическая промышленность".

тическое моделирование". Волгоград, 11-14 сентября 1989 г. Тезисы докладов. - М.: изд. Ун-та дружбы народов им. Патриса Лумумбы. 1990. С. 29.

10. Губин В.Б., Шаронов В.Н. Определение ошибок сферических поверхностей при интерферометрии со сферическим пучком // ОМП, 1990. № 8. С. 32-35.

11. Губин В.Б. Базис на части сферы с выделенными константой и сдвигами // Деп. ВИНТИ. № 2241-В90. 7 с.

12. Губин В.Б., Шаронов В.Н. О выделении параметров ближайшей поверхности в аппроксимациях интерферограмм от цилиндрических зеркал // Деп. ВИНТИ, № 2465-В90. 12 с.

13. Губин В.Б. О вычитании эффектов положения номинальной поверхности из аппроксимации интерферограммы от асферического зеркала // Деп. ВИНТИ, № 3598-В90. 21 с.

14. Губин В.Б., Шаронов В.Н. Алгоритм восстановления деформаций поверхности шара по интерферограммам ее частей // Деп. ВИНТИ, № 3596-В90. 8 с.

15. Губин В.Б. Об алгоритме калибровки сферического зеркала по трем интерферограммам // Деп. ВИНТИ, № 3597-В90. 10 с.

16. Губин В.Б., Шаронов В.Н. Алгоритм восстановления формы оптических поверхностей по результатам экспериментальных данных // ОМП, 1990. № 3. С. 19-21.

17. Губин В.Б., Шаронов В.Н. Абсолютная калибровка сферических поверхностей // ОМП, 1990. № 9. С. 41-42.

18. Губин В.Б. Об условиях восстановления поверхности по интерферограммам ее частей // Деп. ВИНТИ, № 2467-В90. 11 с.

19. Губин В.Б. О выделении эффектов положения номинальной поверхности из аппроксимации интерферограммы от сферического зеркала // Деп. ВИНТИ, № 2609-В91. 21 с.

20. Губин В.Б., Шаронов В.Н. Алгоритм обработки интерферограмм цилиндрических зеркал // ОМП, 1991. № 3. С. 11-12.

21. Губин В.Б. Об алгоритмах усреднения интерферометрических данных // ОМП, 1991. № 9. С. 22-24.

22. Губин В.Б. Базис для обработки интерферограмм от сферических зеркал // ОЖ¹⁾, 1992. № 7. С. 47-50.

23. Губин В.Б. Алгоритм аттестации сферического зеркала по трем интерферограммам // ОЖ, 1992. № 4. С. 16-18.

24. Губин В.Б., Шаронов В.Н. Восстановление деформаций поверхности шара по интерферограммам ее частей // ОЖ, 1992. № 9. С. 71-72.

25. Губин В.Б. Влияние децентровок сферических зеркал на точность стандартной модели интерферограммы // ОЖ, 1992. № 10. С. 32-35.

26. Губин В.Б. О точности метода Гартмана при контроле сферического зеркала // ОЖ, 1992. № 7. С. 73-74.

27. Губин В.Б. Учет факторов настройки при обработке интерферограмм от сферических зеркал с центральным отверстием // ОЖ, 1993. № 6. С. 46-47.

28. Губин В.Б. Вклад в интерферограмму от смещений гиперboloида вращения // Тезисы докладов ХХІХ научной конференции факультета физико-математических и естественных наук. 17-31 мая 1993 г. Часть 2. Математические секции. - М.: изд. Российского ун-та дружбы народов. 1993. С. 4.

29. Губин В.Б. Вклад в интерферограмму от смещений гиперboloида вращения // Тезисы докладов ХХІХ научной конференции факультета физико-математических и естественных наук. 17-31 мая 1993 г. Часть 2. Математические секции. - М.: изд. Российского ун-та дружбы народов. 1993. С. 5.

30. Gubin V.B. An algorithm of development of interferograms from aspheric mirrors // Programming and mathematical techniques in physics / International conference on programming and mathematical methods for solving physical problems. Dubna, Russia, June 14-19, 1993. - Editors Yu.Yu.Lobanov and E.P.Zhidkov. Singapore-New Jersey-London-Hong Kong: World Scientific. P.180-182.

31. Губин В.Б. Об одном источнике ошибок аттестации оптических поверхностей по интерферограммам // Тезисы докладов ХХІХ научной конференции факультета физико-математических и естественных наук. 17-31 мая 1993 г. Часть 2. Математические секции. - М.: изд. Российского ун-та дружбы народов. 1993. С. 6.

¹⁾ "Оптический журнал".

32. Губин В.Б. Лекции по математическим методам восстановления формы оптических поверхностей по интерферограммам. - М.: изд. Российского ун-та дружбы народов. 1995. 247 с.

33. Gubin V.B. About the method for a subaperture testing interferogram reduction // International conference "Computational modelling and computing in physics", Dubna, september 16-21, 1996. Book of abstracts. JINR, Dubna, 1996. P. 73.

34. Gubin V.B. Mathematical methods for the high precision control of optical surfaces // First International conference "Modern trends in computational physics". June 15-20, 1998. Dubna, Russia. Book of abstracts. JINR, Dubna, 1998. P. 78.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Rimmer M.P., King C.M., Fox D.G. Computer program for the analysis of interferometric test data // Appl. Opt., 1972. V. 11. No 12. P. 2790-2796.

[2] Борн М., Вольф Э. Основы оптики. - М.: Наука, 1970.

[3] Ган М.А., Устинов С.И., Котов В.В., Сергеев П.А., Цвигевич И.Н. Обработка интерферограмм на ЭВМ и определение функции рассеяния точки и оптической передаточной функции при контроле и доводке оптических систем // ОМП, 1978. № 9. С. 25-28.

[4] Зверев В.А., Агурок И.П., Родионов С.А., Сокольский М.Н. Автоматизация обработки интерферограмм при контроле оптических систем // ОМП, 1988. № 9. С. 7-10.

[5] Родионов С.А., Агурок И.П. Влияние погрешности оптической системы интерферометра на точность измерения формы поверхности // ОМП, 1988. № 8. С. 3-5.

[6] Оптический производственный контроль // Под ред. Д.Малакары. - М.: Машиностроение. 1985.

[7] Ган М.А., Котов В.В., Устинов С.И. Анализ деформаций волновых фронтов реальных оптических систем // ОМП, 1984. № 5. С. 17-20.

[8] Fritz B.S. Absolute calibration of an optical flat // Opt. Eng., 1984. V. 23. No 4. P. 379-383.

[9] Thunen J.G., Kwon O.Y. Full aperture testing with subaperture test optics // SPIE¹⁾, 1982. V. 351. No 1. P. 19-27.

¹⁾ Proc. Soc. Photo-Optical Instrum. Eng.

[10] Chow W., Lawrence G. Method for subaperture testing interferogram reduction // Optics Letters, 1983. V. 8. No 9. P. 468-470.

[11] Jensen S.C., Chow W.W., Lawrence G.N. Subaperture testing approaches: a comparison // Appl. Opt., 1984. V. 23. No 5. P. 740-745.

[12] Stuhlinger T.W. The testing of large telescope systems using multiple subapertures // SPIE, 1986. V. 440. P. 91-98.

[13] Negro J.E. Subaperture optical system testing // Appl. Opt., 1984. V. 23. No 12. P. 1921-1930.

[14] Day R.D., Beery Th.A. Sphericity measurements of full spheres using subaperture optical testing techniques // SPIE, 1986. V. 661. P. 334-341.

[15] Ган М.А., Устинов С.И., Котов В.В., Иванова А.В. Исследование точности восстановления волнового фронта при обработке интерферограмм // ОМП, 1990. № 8. С. 17-20.

[16] Noll R. Zernike polynomials and atmospheric turbulence // J. Opt. Soc. Am., 1976. V. 66. No 3. P. 207-211.

[17] Jensen A.E. // J. Opt. Soc. Am., 1973. V. 63. P. 1313.

[18] Truax B.E. Absolute interferometric testing of spherical surfaces // SPIE, 1988. V. 966. P. 130-137.

[19] Снежко Л.И. О точности метода Гартмана при исследовании волновых фронтов // ОМП, 1980. № 9. С. 1-3.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 декабря 1998 года.