ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

11-94-148

На правах рукописи

УДК 519.688:512.62

ХУТОРНОЙ
Николай Владимирович

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ НА ЯЗЫКЕ REDUCE

Специальность: 05.13.16 — применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1994

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований

Научные руководители:

Доктор физико-математических наук — В.П.Гердт

Кандидат физико-математических наук — А.Ю.Жарков

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук, профессор — Е.А.Гребеников

Кандидат физико-математических наук — Е.В.Панкратьев

Ведущая организация:

Институт программных систем РАН, Переславль-Залесский

Защита диссертации состоится "17" июня 1994 г. в 10^{30} час. на заседании Специализированного совета Д 047.01.04 при Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Автореферат разослан "16" мая 1994 года

Ученый секретарь специализированного совета Ивч З.М.Иванченко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Компьютерная алгебра - новая, быстро развивающаяся область информатики, ориентированная на использования ЭВМ для автоматизации процесса выполнения аналитических (нечисленных) вычислений. Разработанные к настоящему времени и продолжающиеся интенсивно развиваться системы аналитических вычислений (САВ), такие, например, как REDUCE, Maple, Mathematica, находят широкое применение в самых различных областях науки и техники. Первые системы аналитических вычислений появились в середине 60-х годов. В основном они были ориентированы на расчеты в квантовой электродинамике, общей теории относительности и небесной механике. В настоящее время сфера применения САВ существенно расширилась. Современные САВ используются не только в вышеуказанных научных областях, но и во многих других, например, в физике плазмы, автоматическом доказательстве теорем, а также в технических областях, например, в робототехнике.

Одним из интереснейших направлений в развитии САВ является разработка алгоритмов для исследования систем полиномиальных уравнений. Многие задачи математики и теоретической физики приводят к системам полиномиальных уравнений. Так, в частности, исследование интегрируемости нелинейных дифференциальных уравнений связано с необходимостью анализа довольно сложных систем нелинейных алгебраических уравнений. Поэтому разработка методов исследования таких систем и их реализация на языках символьного программирования является актуальной задачей.

Наиболее развитым и универсальным алгоритмическим методом анализа и решения систем нелинейных алгебраических уравнений является техника, основанная на построении базиса Гребнера для полиномиального идеала, генерируемого исходным набором полиномов данной системы. Соответствующие алгоритмы и пакеты встроены во все современные программные системы компьютерной алгебры. К сожалению, однако, для построения базиса Гребнера часто требуются непомерно большие вычислительные ресурсы, обусловленные экспоненциальной сложностью алгоритма Бухбергера по числу полиномиальных переменных. В случае конечного числа решений, т.е. нульмерного идеала, оценки сложности алгоритма дают $O(d^{n^2})$ по степени полиномов d и числу переменных n соответственно для лексикографического упорядочения и полиномиальное поведение по d^n для упорядочения по полной степени. Для полиномиальных идеалов с положительной размерностью, т.е. для систем с бесконечным числом решений, как теоретический анализ алгоритмов так и практическое построение базисов Гребнера и основанный на нем поиск решений, связаны с гораздо большими трудностями. В этом случае существующие оценки сложности алгоритма Бухбергера дают субэкспоненциальное поведение вида $O(d^{n*2^n})$. Поэтому многие имеющиеся пакеты и программы настроены именно на нульмерные идеалы, что сильно затрудняет их использование для работы с полиномиальными идеалами ненулевой размерности.

Описываемый в настоящей работе пакет ASYS (Algebraic SYStems) разрабатывался специально для анализа и решения систем с бесконечным числом корней. В отличие от других аналогичных пакетов, основанных на технике базисов Гребнера, данный пакет позволяет эффективно находить всевозможные наборы независимых переменных, которые могут рассматриваться в качестве свободных параметров а также резко упрощать вычисления в случае, когда исходная система обладает нетривиальными свойствами однородности. Для нульмерных полиномиальных идеалов предложена эффективная реализация метода преобразования базисов Гребнера от одного упорядочения к другому. Вычислительная сложность алгоритма преобразования базисов d^n. Реализация этого алгоритма позволяет для нульмерных идеалов осуществить эффективную процедуру построения лексикографического базиса Гребнера, имеющую вычислительная сложность d^n: сначала строится базис Гребнера в упорядочении по полной степени, а затем осуществляется пересчет этого базиса в лексикографическое упорядочение. Работа пакета ASYS проиллюстрирована в сравнении с другими пакетами на хорошо известных тестовых примерах. Приведены результаты решения полиномиальных систем возникающих при анализе интегрируемости нелинейных дифференциальных уравнений, проверке изоморфизма алгебр Ли и в ряде других случаев.

Целью диссертационной работы является алгоритмизация и реализация на языках аналитических вычислений новых методов исследования и упрощения систем полиномиальных уравнений, в первую очередь таких, которые обладают бесконечным числом решений.

Научная новизна. В диссертации впервые алгоритмизован новый, развивающий известную технику базисов Гребнера, подход к упрощению и решению систем нелинейных алгебраических уравнений с бесконечным числом (целым многообразием) решений, которые получаются, в частности, при анализе интегрируемости нелинейных дифференциальных уравнений, проверке изоморфизма алгебр Ли и в ряде других случаев. Данный подход позволяет свести исходную систему полиномиальных уравнений к эквивалентному набору подсистем с конечным числом корней и коэффициентами, в общем случае, зависящими от некоторого определенного набора произвольных параметров. В случае однородных полиномиальных систем, а именно такие системы возникают в качестве условий интегрируемости, впервые алгоритмизована специальная схема редукции, позволяющая значительно повысить эффективность техники базисов Гребнера.

С помощью разработанных алгоритмов и программ впервые решен ряд полиномиальных систем, возникающих при исследовании интегрируемости нелинейных эволюционных уравнений и проверке изоморфизма конечномерных алгебр Ли.

Практическая ценность. Разработанные и реализованные в рамках пакета ASYS алгоритмы позволяют решать широкий класс задач, связанных с анализом и нахождением решений систем нелинейных алгебраических уравнений.

ний. На подавляющем большинстве общепринятых тестовых примеров выявлена более высокая эффективность пакета ASYS в сравнении с пакетами, встроенными в системы компьютерной алгебры REDUCE, MAPLE и Mathematica. В рамках научного сотрудничества пакет ASYS передан Лейпцигскому университету, Германия, а также университету г. Льеж, Бельгия.

Для защиты выдвигаются следующие основные результаты, полученные в диссертации:

1. Алгоритмизованы новые методы анализа систем нелинейных алгебраических уравнений с бесконечным числом решений, основанные на технике базисов Гребнера и позволяющие редуцировать исходную алгебраическую систему к эквивалентному набору подсистем с конечным числом решений и с коэффициентами, рационально зависящими от определенных наборов произвольных параметров.

2. В случае полиномиальных систем, обладающих нетривиальными свойствами однородности, алгоритмизована специальная редукционная техника, позволяющая эффективно исключить некоторые переменные из процесса вычислений.

3. В общем случае систем с бесконечным числом решений реализованы алгоритмы вычисления всех максимальных наборов независимых переменных и редукций исходной системы по этим наборам к треугольным параметрическим подсистемам.

4. Для систем с конечным числом решений предложена эффективная алгоритмизация метода преобразования базисов Гребнера из одного упорядочения в другое.

5. Создан программный пакет ASYS, написанный на языке REDUCE, и предназначенный для исследования и решения систем нелинейных алгебраических уравнений произвольного вида, в том числе с параметрическими коэффициентами.

6. Найдена явная параметризация пространства решений полиномиальных уравнений, возникающих при анализе интегрируемости следующих многопараметрических семейств нелинейных эволюционных уравнений: скалярных уравнений 7-го порядка типа КдВ и 7-го порядка типа МКдВ, систем уравнений типа связанных уравнений КдВ и связанных нелинейных уравнений Шредингера.

7. Создана специальная версия пакета ASYS — ISOLIE/ASYS, обеспечивающая высокую эффективность при решении задач проверки изоморфизма конечномерных алгебр Ли. С ее помощью выполнена идентификация алгебры классических (точечных) симметрий уравнения Бюргерса.

Апробация диссертации. Результаты, вошедшие в диссертацию докладывались на Международном совещании по аналитическим вычислениям на ЭВМ (Дубна, 1990), Международном совещании по программированию и математическим методам решения физических задач (Дубна, 1993), Международных симпозиумах по символьным и алгебраическим вычислениям (Токио 1990, Бонн 1991), Международном совещании по компьютерной алгебре (Карлсруэ, 1994), Университете Масарика (г.Брно) и Лейпцигском университете, на научных семинарах в МГУ, Институте Прикладной Механики и Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 8 научных работах, которые приведены в списке литературы.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения; содержит 75 страниц наборного текста, включая 9 таблиц и библиографический список литературы из 83 названий.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе - Введении обосновывается актуальность и практическая важность проблематики диссертационной работы, кратко перечислены результаты по главам.

Во второй Главе приводятся алгоритмы для анализа систем нелинейных алгебраических уравнений.

В *разделе 2.1* описывается подход к решению систем полиномиальных уравнений методами компьютерной алгебры, основанный на построении базисов Гребнера.

В *разделе 2.2* дается описание алгоритмических процедур, основанных на методе редукции алгебраических систем с бесконечным числом решений, к эквивалентному набору подсистем более простого вида и с конечным числом решений, в том случае если исходные системы обладают нетривиальными свойствами однородности. При этом коэффициенты подсистем могут зависеть от конечного числа произвольных параметров.

В *разделе 2.3* дается описание алгоритмов для редукции алгебраических систем с бесконечным числом решений по максимальным наборам алгебраически независимых переменных. Результатом такой редукции является набор подсистем "треугольного" вида.

В *разделе 2.4* приводится описание алгоритма для преобразования базисов Гребнера нульмерных идеалов из одного упорядочения в другое. Это позволяет реализовать эффективную стратегию построения лексикографического базиса Гребнера для полиномиальных систем имеющих конечное число решений.

В третьей Главе рассматриваются вопросы реализации описанных во второй Главе алгоритмов в системе аналитических вычислений REDUCE.

В *разделе 3.1* приводится описание структур данных.

В *разделе 3.2* дается описание общей структуры пакета, управляющих ключей и основных модулей, составляющих пакет ASYS. Основные модули, составляющие пакет ASYS позволяют:

- Строить базисы Гребнера для различных упорядочений переменных.
- Преобразовать базис Гребнера из одного упорядочения в другое.
- Найти размерность пространства решений, т.е. размерность полиномиального идеала, генерируемого исходной системой.
- В случае конечного числа корней привести исходную систему к полностью эквивалентному ей "треугольному" виду, т.е. свести задачу к последовательному решению алгебраических уравнений одной переменной.
- В случае бесконечного количества решений найти всевозможные наборы алгебраически независимых, по отношению к данному идеалу, переменных, которые могут рассматриваться в качестве свободных параметров, задавая тем самым параметризацию пространства корней исходной системы.
- В случае, если полиномиальная система является однородной, найти набор однородных переменных, соответствующий данной системе.
- Редуцировать исходную систему, имеющую бесконечное число решений, к полностью эквивалентному ей конечному набору подсистем "треугольного" вида с помощью найденных максимальных наборов независимых переменных и/или однородных переменных.

В *разделе 3.3* приводятся результаты сравнения пакета ASYS с лучшими зарубежными пакетами на примере систем, возникающих при исследовании интегрируемости нелинейных эволюционных уравнений, а также и на примерах систем, имеющих конечное число решений и служащих общепринятыми тестами качества программных продуктов, реализующих метод базисов Гребнера.

В Таблицах 1-3 приводятся результаты сравнения пакета ASYS с другими пакетами в системе REDUCE: стандартным пакетом GROEBNER и пакетом CALI, включенным в библиотеку системы REDUCE 3.5.

Таблица 1

Лексикографическое упорядочение

	ASYS	GROEBNER	CALI
Пример 1	7.2"	2.6"	5.7"
Пример 2	0.19"	0.14"	0.1"
Пример 5	5.0"	24.0"	>14550"
Пример 8	0.35"	3.1"	1.0"
Пример 9	11.3"	1908.3"	>8615"
Пример 12	100.3"	16.5"	>7336"
Пример 13	1.5"	37.0"	1.0"
Пример 15	0.3"	0.2"	0.3"
Пример 16	10.8"	21.3"	2.9"
Пример 17	0.7"	1.5"	1.3"

Таблица 2

Упорядочение по полной степени, а затем обратное лексикографическое

	ASYS	GROEBNER	CALI
Пример 5	5.1"	2.6"	3.8"
Пример 6	141.7"	75.3"	157.7"
Пример 7	5.3"	9.4"	6.3"
Пример 8	0.3"	0.2"	0.3"
Пример 9	2.1"	1.5"	2.9"
Пример 10	57.3"	50.9"	27.6"
Пример 11	2.7"	2.7"	3,5"
Пример 14	3.0"	1.4"	2.7"
Пример 15	0.2"	0.2"	0.3"
Пример 16	0.3"	0.2"	0.2"

Таблица 3

Результаты сравнительного счета примеров, обладающих нетривиальными свойствами однородности

	ASYS2	GROEBNER	CALI
Example 1	6.9"	4.9"	3.2"
Example 3	0.2"	1.4"	0.54"
Example 4	36.7"	91.6"	170.3"
Example 18	20.3"	25.5"	25.7"

Для примеров, приведенных в Таблице 3, все пакеты использовались в качестве решателей, т.е. результатом работы в каждом случае являлся не базис Гребнера, а список "треугольных" подсистем переменных.

В Таблице 4 приводятся результаты сравнения пакета ASYS с аналогичными пакетами для построения базиса Грёбнера в системах MAPLE и Mathematica.

Таблица 4

Лексикографическое упорядочение

	ASYS	MAPLE	Mathematica
Пример 1	10.1"	32"	18.6"
Пример 2	0.5"	2"	0.7"
Пример 5	11.2"	>600"	недостаточно памяти
Пример 8	0.9"	9"	241.0"
Пример 9	39.3"	>600"	>600"
Пример 12	212.3"	64"	>900"
Пример 13	2.9"	>600"	2.7"
Пример 15	0.9"	6"	1.0"
Пример 16	17.1"	576"	>600"
Пример 17	4.7"	9"	245.1"

В Таблице 5 для примеров, приведенных выше, даны времена пересчета базисов Гребнера из одного упорядочения в другое с помощью пакета ASYS в сравнении со стандартным пакетом GROEBNER. Вычисления проводились на SPARC *IPX* с 32 Мбайт памяти.

Таблица 5

	ASYS	GROEBNER
Пример 5	10.6"	66.9"
Пример 6	4176"	26796"
Пример 7	4.0"	28.6"
Пример 10	1693"	11295"
Пример 12	8.9"	69.5"
Пример 14	7.7"	57.4"
Пример 19	58"	6112"

В Главе 4 приводятся примеры применения пакета ASYS.

В *разделе 4.1* рассмотрен ряд полиномиальных систем, возникающих при анализе интегрируемости нелинейных эволюционных уравнений. В каждом таком случае задача сводится к исследованию и решению систем нелинейных алгебраических уравнений на параметры семейства, эквивалентные условиям интегрируемости. Эта задача решается с помощью пакета ASYS. Найдены полные списки решений полиномиальных систем для задач классификации: 7-параметрического семейства уравнений седьмого порядка типа КдВ; 6-параметрического семейства уравнений седьмого порядка типа МКдВ; 8-параметрического семейства уравнений типа связанного нелинейного уравнения Шредингера. В каждом из этих случаев приведена явная параметризация пространства решений.

Уравнения типа КдВ седьмого порядка имеют следующий общий вид

$$u_t = u_7 + \lambda_1 u\, u_5 + \lambda_2 u_1 u_4 + \lambda_3 u_2 u_3 + \lambda_4 u^2 u_3 + \lambda_5 u\, u_1 u_2 + \lambda_6 u_1^3 + \lambda_7 u^3 u_1, \tag{1}$$

где $\lambda_i \in C$ - произвольные параметры, которые требуется определить, накладывая на 7-параметрическое семейство (1) условие интегрируемости. Анализ условий интегрируемости приводит к следующей системе нелинейных алгебраических уравнений на параметры λ_i:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(\lambda_4 - \lambda_5/2 + \lambda_6) = (2/7\lambda_1^2 - \lambda_4)(-10\lambda_1 + 5\lambda_2 - \lambda_3) = 0,\\
&(2/7\lambda_1^2 - \lambda_4)(3\lambda_4 - \lambda_5 + \lambda_6) = 0,\\
&a_1(-3\lambda_1 + 2\lambda_2) + 21a_2 = a_1(2\lambda_4 - 2\lambda_5) + a_2(-45\lambda_1 + 15\lambda_2 - 3\lambda_3) = 0,\\
&2a_1\lambda_7 + a_2(12\lambda_4 - 3\lambda_5 + 2\lambda_6) = b_1(2\lambda_2 - \lambda_1) + 7b_2 = b_1\lambda_3 + 7b_2 = 0,\\
&b_1(-2\lambda_4 - 2\lambda_5) + b_2(2\lambda_2 - 8\lambda_1) + 84b_3 = 0,\\
&b_1(8/3\lambda_5 + 6\lambda_6) + b_2(11\lambda_1 - 17/3\lambda_2 + 5/3\lambda_3) - 168b_3 = 0,\\
&15b_1\lambda_7 + b_2(5\lambda_4 - 2\lambda_5) + b_3(-120\lambda_1 + 30\lambda_2 - 6\lambda_3) = 0,\\
&-3b_1\lambda_7 + b_2(-\lambda_4/2 + \lambda_5/4 - \lambda_6/2) + b_3(24\lambda_1 - 6\lambda_2) = 0,\\
&3b_2\lambda_7 + b_3(40\lambda_4 - 8\lambda_5 + 4\lambda_6) = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$a_1 = -2\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_3 - \lambda_2^2 - 7\lambda_5 + 21\lambda_6,\ a_2 = 7\lambda_7 - 2\lambda_1\lambda_4 + 3/7\lambda_1^3,$$
$$b_1 = \lambda_1(5\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3),\ b_2 = \lambda_1(2\lambda_6 - 4\lambda_4),\ b_3 = \lambda_1\lambda_7/2.$$

Здесь мы дадим полный список ее решений, полученных с помощью пакета ASYS:

Таблица 6

Параметризация пространства решений системы уравнений (2)

Параметры	Решение
	$\lambda_2 = 7/2\lambda_1, \lambda_3 = 6\lambda_1, \lambda_4 = 2/7\lambda_1^2, \lambda_5 = 9/7\lambda_1^2, \lambda_6 = 5/14\lambda_1^2, \lambda_7 = 4/147\lambda_1^3$
λ_1	$\lambda_2 = 3\lambda_1, \lambda_3 = 5\lambda_1, \lambda_4 = 5/14\lambda_1^2, \lambda_5 = 10/7\lambda_1^2, \lambda_6 = 5/14\lambda_1^2, \lambda_7 = 5/98\lambda_1^3$
	$\lambda_2 = 2\lambda_1, \lambda_3 = 3\lambda_1, \lambda_4 = 2/7\lambda_1^2, \lambda_5 = 6/7\lambda_1^2, \lambda_6 = 1/7\lambda_1^2, \lambda_7 = 4/147\lambda_1^3$
λ_2	$\lambda_1 = 0, \lambda_3 = 5\lambda_2, \lambda_4 = \lambda_5 = -2/63\lambda_2^2, \lambda_6 = 4/63\lambda_2^2, \lambda_7 = -10/1323\lambda_2^3$
λ_4	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_5 = \lambda_4, \lambda_6 = -2\lambda_4, \lambda_7 = 0$
λ_2, λ_4	$\lambda_1 = 0, \lambda_3 = 5\lambda_2, \lambda_5 = 1/14\lambda_2^2 + 9/2\lambda_4, \lambda_6 = 1/14\lambda_2^2 + 3/2\lambda_4, \lambda_7 = 0$
λ_3, λ_6	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = r_1, \lambda_4 = 0, \lambda_5 = -2/161r_1\lambda_3 + 40/23\lambda_6, \lambda_7 = 10/25921r_1\lambda_3^2 - 74/483r_1\lambda_6 - 16/3703\lambda_3\lambda_6$, где $r_1 = (5\lambda_3 \pm \sqrt{25\lambda_3^2 - 5152\lambda_6})/46$
	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_7 = 0$
$\lambda_2, \lambda_3, \lambda_5$	$\lambda_1 = 0, \lambda_4 = 0, \lambda_6 = 1/21\lambda_2^2 + 1/3\lambda_5, \lambda_7 = 0$

В *разделе 4.2* рассмотрены задачи проверки изоморфизма конечномерных алгебр Ли и дано описание пакета ISOLIE/ASYS - специальной версии пакета ASYS, обеспечивающей высокую эффективность при решении данного класса задач. Рассмотрена задача идентификации алгебры классических симметрий уравнения Бюргерса

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0. \tag{3}$$

генерируемая следующим набором инфинитезимальных генераторов вида

$$\begin{aligned}
v_1 &= \partial_t,\\
v_2 &= \partial_x,\\
v_3 &= t\partial_x + \partial_u,\\
v_4 &= t^2\partial_t + xt\partial_x + (x - ut)\partial_u,\\
v_5 &= 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u,
\end{aligned}$$

с таблицей коммутаторов

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	0	v_2	v_5	$2v_1$
v_2		0	0	v_3	v_2
v_3			0	0	$-v_3$
v_4				0	$-2v_4$

Мы идентифицируем эту Ли алгебру с одной из табличных, именно, $A_{5,40}$.

Ненулевые коммутаторы этой алгебры:

$[e_1, e_2] = -2e_1,\ [e_1, e_3] = -e_2,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_2, e_3] = 2e_3,$
$[e_2, e_4] = e_4,\ [e_2, e_5] = -e_5,\ [e_3, e_5] = e_4.$

Система полиномиальных уравнений содержит 51 уравнение от 26 неизвестных. В результате применения пакета ISOLIE/ASYS, на печать выводится следующая подсистема

```
Variables = (D A14 A15 A44 A45 A25 A11 A13 A52)
Parameters = (A34 A43)
Zeros = (A55 A53 A22 A32 A54 A33 A51 A42 A35 A23 A31 A12 A24 A41 A21)
{D*A43 - A34**2,
A14,
A15,
A44,
A45,
A25*A43 + A34,
A11*A43 + 1,
A13,
A52 - 1}
```

Первая строка содержит список переменных. Следующие две строки содержат списки ненулевых и нулевых однородных переменных соответственно.

Из структуры этой подсистемы немедленно следует, что существует вещественный изоморфизм с матрицей преобразования, определяемой двумя ненулевыми параметрами $A34$ и $A43$

$$A = \begin{pmatrix} -1/A43 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -A34/A43 \\ 0 & 0 & 0 & A34 & 0 \\ 0 & 0 & A43 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В *разделе 4.3* в качестве одного из примеров приводится решение системы уравнений, возникающей при исследовании бифуркаций предельных циклов в динамической системе с кубичной нелинейностью. Этот пример возник при исследовании бифуркаций следующей динамической системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 \end{cases}$$

Система полиномиальных уравнений, возникающая при исследовании этой проблемы, содержит 5 уравнений 10 степени от 6 неизвестных. Объем этой системы 14 Кбайт. Кроме того, эта система имеет бесконечное число решений, следовательно, для того чтобы найти их явный вид, необходимо еще сначала найти соответствующую параметризацию. При этом, как и ранее, используется техника базисов Гребнера, встроенная в пакет ASYS. Полный список решений приведен в Таблице 7. Каждое из решений параметризовано одним из максимальных независимых наборов переменных.

Таблица 7

Параметры	Решения
a_1, a_3, a_4, a_6	$a_2 = a_5 = 0.$
a_2, a_4, a_6	$a_1 = a_3 = a_5 = 0.$
a_1, a_2, a_3	$a_4 = a_3(a_1 + a_3),\ a_5 = -a_2(a_1 + a_3),\ a_6 = -a_3^2(a_1 + a_3)/(a_1 + 2a_3).$

В главе 5 - Заключении перечислены основные результаты, полученные в диссертации.

Результаты, вошедшие в диссертацию, опубликованы в работах:

1. V.P.Gerdt, N.V.Khutornoy and A.Yu.Zharkov *Lie-Bäcklund Symmetries of Coupled Nonlinear Schrödinger Equations*, Proceedings of "ISSAC'91", International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ACM Press, Addison-Wesley Publishing Company, 1991, 313-314.

2. V.P.Gerdt, N.V.Khutornoy and A.Yu.Zharkov *Solving Algebraic Systems Which Arise as Necessary Integrability Conditions for Polynomial-Nonlinear Evolution Equations*, In: "Computer Algebra in Physical Research", D.V.Shirkov, V.A.Rostovtsev and V.P.Gerdt (Eds.), World Scientific Publ.Co., Singapore, 1991, 321-328.

3. V.P.Gerdt, N.V.Khutornoy and A.Yu.Zharkov *Gröbner Basis Technique, Homogeneity and Solving Polynomial Equations*, Proceedings of the 1992 International Workshop on Mathematics Machanization (Beijing, China, July 16-18, 1992), Wu Wen-Tsün and Cheng Min-De (Eds.), International Academic Publishers, Beijing, China, 1992, 38-51.

4. В.П.Гердт, А.Ю.Жарков, Н.В.Хуторной *ASYS: Пакет для исследования систем нелинейных алгебраических уравнений*, Программирование, 1993, 2, 69-76.

5. V.P.Gerdt, N.V.Khutornoy and W.Lassner *Computer Detecting of Lie Algebra Isomorphisms*, Universität Leipzig, Maturwissenschaftlich - Theoretisces Zentrum, Preprint Nr.17/1993.

6. V.P.Gerdt, N.V.Khutornoy and A.Yu.Zharkov *ASYS2: A New Version of Computer Algebra Package ASYS for Analysis and Simplification of Polynomial Systems*, Proceedings of the Rhein Workshop on Computer Algebra, (Karlsruhe, March 22-24, 1994), J.Calmet (ed.), Karlsruhe, Germany, 1994, 162-178.

7. V.P.Gerdt, N.V.Khutornoy and A.Yu.Zharkov *Implementation of zero-dimensional Gröbner bases transformation from one order to another*, JINR E5-94-49, Dubna, 1994.

8. Е.А.Федорова, Н.В.Хуторной *Сравнение пакета ASYS со стандартными пакетами для построения базисов Гребнера в системах компьютерной алгебры MAPLE и Mathematica*, JINR P11-94-50, Dubna, 1994.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 апреля 1994 года.