ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

11 - 9313

А.А.Корнейчук

ОБ ОБРАЩЕНИИ И ДИАГОНАЛИЗАЦИИ МАТРИЦ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ МАЛОГО РАНГА

1975

11 - 9313

А.А.Корнейчук

ОБ ОБРАЩЕНИИ И ДИАГОНАЛИЗАЦИИ МАТРИЦ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ МАЛОГО РАНГА

Направлено в ЖВММФ

Корнейчук А.А.

11 - 9313

Об обращении и диагонализации матриц с возмущениями малого ранга

Предлагаются алгоритмы обращения и диагонализации матриц с возмущениями малого ранга, использующие решения соответствующей проблемы для невозмущенных матриц и позволяющие сократить объем вычислений и памяти при реализации на ЭВМ.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1975

1. Обращение матрицы с возмущением малого ранга

Дана неособенная матрица

$$A = B + C \tag{1.1}$$

порядка N, где B - неособенная матрица, обратная которой B^{-1} известна, C - матрица ранга $n \le N$, называемая возмущением. Надо найти обратную матрицу A^{-1}.

Имеем

$$A = B(I_N + B^{-1}C) = B(I_N + F), \tag{1.2}$$

$$A^{-1} = (I_N + F)^{-1}B^{-1}, \tag{1.3}$$

где I_N - единичная матрица порядка N, а

$$F = B^{-1}C. \tag{1.4}$$

Поскольку при умножении на неособенную матрицу ранг сохраняется, то ранг F равен n.

Известно /см. [1] стр. 32/, что матрица F порядка N, имеющая ранг n, может быть представлена в виде

$$F = PQ, \tag{1.5}$$

где P - прямоугольная матрица $N \times n$ /N строк, n столбцов/, Q - прямоугольная матрица $n \times N$.

Теорема. Если $I_N + PQ$ - неособенная матрица, то $I_n + QP$ - неособенная матрица и

$$(I_n + QP)^{-1} = I_n - Q(I_N + PQ)^{-1} P, \qquad /1.6/$$

$$(I_N + PQ)^{-1} = I_N - P(I_n + QP)^{-1} Q. \qquad /1.7/$$

Для доказательства достаточно перемножить соответствующие матрицы:

$$(I_n + QP)(I_n - Q(I_N + PQ)^{-1} P) =$$

$$= I_n + Q(I_N - (I_N + PQ)^{-1} - PQ(I_N + PQ)^{-1})P =$$

$$= I_n + Q(I_N - (I_N + PQ)(I_N + PQ)^{-1}) P = I_n. \qquad /1.8/$$

$$(I_N + PQ)(I_N - P(I_n + QP)^{-1} Q) =$$

$$= I_N + P(I_n - (I_n + QP)^{-1} - QP(I_n + QP)^{-1}) Q =$$

$$= I_N + P(I_n - (I_n + QP)(I_n + QP)^{-1}) Q = I_N. \qquad /1.9/$$

Итак, обращение матрицы порядка N с возмущением ранга n сводится к обращению матрицы порядка n.

2. *Диагонализация матрицы с возмущением малого ранга*

Дана нормальная матрица

$$A = B + G \qquad /2.1/$$

порядка N, где B - нормальная матрица, собственные значения и собственные векторы которой известны,

G - матрица ранга $n \le N$, называемая возмущением. Надо найти собственные значения и собственные векторы матрицы A.

Обозначим через U матрицу собственных векторов B. Тогда

$$U^{-1} BU = D, \quad U^{-1} = U^*, \qquad /2.2/$$

где D - диагональная матрица. Пусть

$$U^{-1}AU = H, \quad U^{-1}GU = F. \qquad /2.3/$$

Умножив /2.1/ слева на U^{-1} и справа на U, мы придем к задаче отыскания собственных значений и собственных векторов матрицы

$$H = D + F, \qquad /2.4/$$

где D - диагональная матрица, а F - матрица ранга $n \le N$.

Пусть λ_k - собственное значение, а $\bar{y}_k = (y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{Nk})$ - собственный вектор матрицы H. Для решения задачи в /2/ предложен итерационный метод, который состоит в следующем. Задается начальное приближение

$$\lambda_k^{(0)} = d_k, \quad y_{ik}^{(0)} = \delta_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, N \qquad /2.5/$$

и выполняются итерации

$$\lambda_k^{(s+1)} = d_k + \sum_{m=1}^{N} f_{km} y_{mk}^{(s)}, \qquad /2.6/$$

$$y_{\ell k}^{(s+1)} = \frac{1}{\lambda_k^{(s+1)} - d_\ell} \sum_{m=1}^{N} f_{\ell m} y_{mk}^{(s)}, \quad \ell = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, N, \qquad /2.7/$$

$$y_{kk}^{(s+1)} = 1. \qquad /2.8/$$

Согласно /1/, матрица $F = \{f_{ij}\}$ имеет специальный вид:

$$f_{ij} = \sum_{t=1}^{n} p_{it} q_{tj}, \quad n \le N. \qquad /2.9/$$

Матрицы такого вида /в частности, при $n=1$ / возникают, например, в задачах теории атомного ядра /см. /3/, стр. 369-374, /4/, стр. 154-160/.

Описанный выше итерационный процесс /2.5/ - /2.8/ для случая /2.9/ принимает следующий вид. Задается начальное приближение:

$$\lambda_k^{(0)} = d_k\,, \quad y_{ik}^{(0)} = \delta_{ik}\,, \quad i = 1,2,\dots,N, \qquad /2.10/$$

и выполняются итерации:

$$c_{tk}^{(s+1)} = \sum_{m=1}^{N} q_{tm} y_{mk}^{(s)}, \quad t = 1,2,\dots,n, \qquad /2.11/$$

$$\lambda_k^{(s+1)} = d_k + \sum_{t=1}^{n} p_{kt} c_{tk}^{(s+1)}, \qquad /2.12/$$

$$y_{\ell k}^{(s+1)} = \frac{1}{\lambda_k^{(s+1)} - d_\ell} \sum_{t=1}^{n} p_{\ell t} c_{tk}^{(s+1)}, \ \ell = 1,2,\dots,k-1,k+1,\dots,N, \qquad /2.13/$$

$$y_{kk}^{(s+1)} = 1\,. \qquad /2.14/$$

Итерации /2.10/ - /2.14/ можно записать, исключив $y_{k\ell}^{(s+1)}$:

$$\lambda_k^{(0)} = d_k\,, \quad c_{tk}^{(0)} = 0, \quad t = 1,2,\dots,n, \qquad /2.15/$$

$$c_{tk}^{(s+1)} = q_{tk} + \sum_{u=1}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{N} \frac{q_{tm} p_{mu}}{\lambda_k^{(s)} - d_m} c_{uk}^{(s)}, \qquad /2.16/$$

$$\lambda_k^{(s+1)} = d_k + \sum_{t=1}^{n} p_{kt} c_{tk}^{(s+1)}\,. \qquad /2.17/$$

Достаточное условие сходимости /из /2/ /:

$$2 \sum_{m=1}^{N} |f_{km}| + \max_k \sum_{m=1}^{N} |f_{km}| < \min_{k \neq \ell} |d_k - d_\ell| \qquad /2.18/$$

дает:

$$2 \sum_{m=1}^{N} \Big| \sum_{t=1}^{n} p_{kt} q_{tm} \Big| + \max_k \sum_{m=1}^{N} \sum_{t=1}^{n} |p_{kt} q_{tm}| < \min_{\ell \neq k} |d_k - d_\ell|\,. \qquad /2.19/$$

Преимущество итераций /2.15/ - /2.17/ состоит в том, что уменьшается объем оперативной памяти ЭВМ, необходимой для хранения величин, участвующих в итерациях: надо хранить $2nN$ значений p_{it} и q_{tj} и $2nN$ значений $c_{tk}^{(s+1)}$ и $c_{tk}^{(s)}$, $k = 1,2,\dots,N, t = 1,2,\dots,n$ вместо $2N^2$ значений элементов матрицы и компонент собственных векторов при обычно применяемых методах диагонализации.

Для выполнения одной итерации в /2/ надо выполнить $\approx N^2$ умножений и $\approx N^2$ сложений. Аналогичная итерация в описываемом выше процессе требует $\approx Nn^2$ умножений, $\approx Nn^2$ делений и $\approx Nn^2$ сложений, откуда следует, что при малых n последний процесс требует меньше времени, чем описанный в /2/.

Литература

1. *Ф.Р.Гантмахер. Теория матриц. "Наука", М., 1967.*
2. *А.А.Корнейчук, Н.Ю.Ширикова. Итерационный метод решения задач об отыскании собственных значений. Сб. "Материалы совещания по программированию и математическим методам решения физических задач". Д10-7707, Дубна, 1974.*
3. *В.Г.Соловьев. Теория сложных ядер. "Наука", М., 1971.*
4. *А.Лейн. Теория ядра. Атомиздат, М., 1967.*

Рукопись поступила в издательский отдел 17 ноября 1975 года.