

A-394



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

11-93-145

**АКИШИН
Павел Григорьевич**

**УДК 517.972.5
517.968.23
519.642
537.612**

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ НА ЭВМ**

**Специальность: 05.13.16 — применение вычислительной
техники, математического моделирования
и математических методов для научных исследований**

**Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук**

Дубна 1993

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Гребеников Евгений Александрович

доктор физико-математических наук,
профессор Дмитриев Владимир Иванович

доктор физико-математических наук,
профессор Дойников Николай Иванович

Ведущее научно-исследовательское учреждение:

Московский инженерно-физический институт.

Автореферат разослан "11" мая 1993 г.

Защита диссертации состоится "11" июня 1993 г.
в 10 часов на заседании Специализированного совета Д047.01.04 при
Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ, в г. Дубна
Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь
специализированного Совета
кандидат физико-математических наук *С.В.С.* З. М. Иванченко.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

1. Актуальность темы диссертации

При проектировании и эксплуатации различных физических установок возникает необходимость в изучении магнитостатических полей. Физическое моделирование установок, особенно при выборе оптимального режима работы, вызывает значительные материальные затраты, а во многих случаях и невозможно, например, когда требуется определить поле внутри ферромагнетика. В этих случаях численный эксперимент является единственным методом исследования. Численное моделирование позволяет исследовать распределение магнитного поля значительно полнее, быстрее и дешевле, чем это можно сделать методами экспериментальной физики, при условии адекватности математической модели и численных методов физической задаче. В связи с этим актуальными являются методы, связанные с численным моделированием магнитостатических полей с использованием ЭВМ.

Вопросами разработки численных методов и алгоритмов моделирования магнитных систем, созданием соответствующего программного обеспечения занимаются ряд исследовательских групп как в России, так и в других странах. Регулярно проводятся международные конференции, посвященные данной тематике: "COMPMAG", "INTERMAG", "MAGNET TECHNOLOGY" и др. Созданы пакеты программ моделирования пространственных магнитных полей. Но для многих институтов России эти программы недоступны ввиду значительной стоимости, а также повышенных требований, накладываемых на ЭВМ, используемых для расчетов.

Все более возрастающие требования, предъявляемые к качеству моделирования, стимулируют совершенствование существующих и разработку новых методов расчета пространственных магнитных полей. Прогресс вычислительной техники, появление мультипроцессорных вычислительных систем заставляет пересмотреть общепринятые оценки оптимальности того или иного подхода к решению задачи магнитостатики. На передний план выходят постановки, которые позволяют максимально использовать эти новые возможности, предоставляемые исследователю.

Однако этот факт не означает предание забвению альтернативных подходов. Любое продвижение в сторону улучшения существующих методов, разработка новых экономичных вычислительных алгоритмов делают возможным проведение расчетов все более сложных магнитных систем и на однопроцессорных ЭВМ.

В процессе моделирования магнитных полей важным моментом является учет специфики решаемой задачи. Во многих случаях учет особенностей распределения магнитного поля качественно сокращает вычислительные затраты и требования на оперативную память используемой для расчетов ЭВМ. Разработка экономичных численных методов и алгоритмов расчета для данного типа магнитных систем позволяет проводить моделирование на ЭВМ среднего класса.

Одним из важных вопросов, возникающих при использовании той или иной постановки задачи магнитостатики, является вопрос разработки эффективного программного инструмента, сочетающего в себе гибкость по отношению к типам областей, форме токовых обмоток, способам задания магнитной проницаемости ферромагнетика, учет симметрии магнитного поля и т.д. Важным вопросом является надежность программного обеспечения, эффективность построения расчетной сетки, быстрота и качество вычисления коэффициентов, входящих в дискретизованные уравнения, наличие модулей, реализующих мощные и устойчивые алгоритмы решения нелинейных дискретизованных уравнений, наличие сервисных модулей, обеспечивающих вычисление и выдачу требуемых характеристик поля. Оптимальная организация вычислительного процесса моделирования магнитостатических полей в условиях жестких ограничений по оперативной памяти и вычислительным возможностям имеющихся в наличии ЭВМ является очень важной и сложной задачей.

Выбор той или иной постановки во многом зависит от характера и особенностей решаемой задачи, наличия вычислительной техники, имеющейся в распоряжении математика. Для каждой методики расчета существует свой класс задач, для которых она может быть использована. Поэтому при разработке программного обеспечения очень важно указать сферу его применения, при этом нужно следить, чтобы она была достаточно широка, чтобы не возникала необходимость его перестройки при незначительных изменениях входных данных.

Эффективность процесса моделирования магнитных систем связана с решением поднятых проблем. Все это определяет актуальность разработки методов решения поставленных вопросов, чему посвящена настоящая диссертация.

Работы, положенные в основу диссертации, выполнены в соответ-

ствии с проблемно-тематическим планом научно-исследовательских работ Объединенного института ядерных исследований.

2. Цель работы.

Целью диссертационной работы является:

- 1) Разработка эффективных методов численного моделирования двумерных и трехмерных магнитостатических полей.
- 2) Теоретическое обоснование используемых для расчетов постановок задачи магнитостатики.
- 3) На основании проведенных исследований создание комплексов программ расчета магнитных систем.
- 4) Использование созданных комплексов программ для расчета магнитного поля в крупных электрофизических установках.

3. Научная новизна работы.

В диссертации разработан единый подход к численному анализу задачи магнитостатики в случае двух и трех измерений. Различные представления редуцированного скалярного потенциала позволили сформулировать три альтернативные постановки задачи: интегральную, дифференциальную и комбинированную.

При естественных физических предположениях о свойствах магнитной среды в рамках постановки относительно редуцированного скалярного потенциала доказана теорема существования и единственности обобщенного решения задачи магнитостатики в классе вектор-функций из $L^2(R^3)$.

Рассмотрены вопросы, связанные с использованием метода объемных и граничных интегральных уравнений для расчета магнитостатических полей; исследованы свойства спектра дискретизованных операторов, доказаны теорема существования решения нелинейных дискретизованных задач; разработаны быстрые алгоритмы вычисления коэффициентов матриц разностных операторов; предложены итерационные процессы решения нелинейных дискретизованных систем.

В рамках метода объемных интегральных уравнений разработаны параллельные алгоритмы решения задачи магнитостатики.

На основе анализа свойств решений краевых задач, определенных на бесконечной последовательности расширяющихся вложенных областей, предложена дифференциальная постановка задачи магнитостатики. Редуцированный скалярный потенциал ϕ приближается решением краевой задачи для некоторой ограниченной области K . Для дискретизации используется метод конечных элементов с трilinearными функциями формы. В диссертации получены оценки уклонения потенциала ϕ от приближенного решения, доказаны теоремы существования и единственности решения у дискретизованной задачи в рамках предложенной дифференциальной постановки. Получены асимптотические оценки уклонения приближенного решения от точного в зависимости от шага разбиения области K и ее размеров. Предложен итерационный процесс решения возникающей нелинейной дискретизованной задачи. Доказаны теорема существования решения. Доказана теорема о сходимости итерационного процесса к решению от любого начального приближения со скоростью геометрической прогрессии.

Сформулирована комбинированная постановка задачи магнитостатики. Редуцированный скалярный потенциал ϕ представляется в виде суммы двух потенциалов ϕ_1 и ϕ_2 . Потенциал ϕ_1 является решением краевой задачи в области G , заполненной ферромагнетиком, а ϕ_2 есть потенциал простого слоя на границе G с плотностью, зависящей от нормальной производной потенциала ϕ_1 . Приводится дискретизация непрерывной задачи. Доказана теорема существования решения у возникающей нелинейной дискретизованной задачи. Предложен итерационный процесс решения нелинейной дискретизованной системы

Разработаны специальные методы решения задачи магнитостатики, позволяющие существенно сократить требования, предъявляемые к оперативной памяти и вычислительным возможностям используемой для расчетов ЭВМ:

- 1) Изучены свойства дискретизованной задачи, возникающей при использовании метода объемных интегральных уравнений для области G , полученной вращением двумерной области \tilde{G} вокруг некоторой оси. Показано, что в этом случае дискретизованная матрица есть сумма пяти матриц, являющихся произведением диагональной и блочно-циркулянтной матриц. Аналогичными свойствами обладает дискретизованная матрица, получаемая при использовании метода граничных интегральных уравнений. Она является блочно-циркулянтной. Предложены быстрые итерационные алгоритмы решения дискретизованной задачи, в основе которых лежит процедура быстрого умножения блочно-циркулянтной матрицы на век-

тор. Сфера применимости предлагаемого метода может быть существенно расширена на более широкий класс областей, которые можно погрузить в область G , удовлетворяющим выше упомянутым условиям.

- 2) Для моделирования магнитных систем предложен метод, основанный на том, что расчетная область погружается в некий параллелепипед. Метод объемных интегральных уравнений применяется к выбранному параллелепипеду. Показывается, что в этом случае $9N^2$ коэффициентов матрицы дискретизованных уравнений выражаются через $9N$ базисных коэффициентов (N – число элементов разбиения параллелепипеда). Для каждого шага итерационного процесса требуется $O(N \ln N)$ операций, вместо $O(N^2)$ операций, необходимых при использовании областей общего вида. Для проведения расчетов требуется $O(N)$ ячеек оперативной памяти ЭВМ. Предлагаемая методика позволяет на порядок сократить вычислительные затраты и требования к оперативной памяти ЭВМ по сравнению с обычным методом объемных интегральных уравнений.
- 3) В рамках метода объемных интегральных уравнений предложен метод моделирования полойдальных магнитных систем. При этом компоненты поля раскладываются в гармонический ряд по угловой переменной. Исходное трехмерное интегральное уравнение редуцируется к бесконечной системе двумерных интегральных уравнений, которая при численном моделировании заменяется конечной системой. Получены оценки уклонения решения урезанной системы от точного решения. Приводится дискретизация непрерывной задачи. Разработаны методы вычисления коэффициентов матриц дискретизованных уравнений. Предложен итерационный процесс решения нелинейной дискретизованной системы

4. Практическая ценность работы.

Разработанные в диссертации численные алгоритмы были реализованы в виде комплексов программ расчета двумерных и трехмерных магнитостатических полей:

- 1) Комплекс программ расчета осесимметричных магнитных полей MAGAX.
- 2) Комплекс программ расчета плоских магнитных полей IAMAG2D.

- 3) Комплекс программ расчета трехмерных магнитных полей IAMAG3D.
- 4) Комплекс программ расчета трехмерных магнитных полей MAGDA (дифференциальная постановка).
- 5) Комплекс программ расчета трехмерных магнитных полей ГИБРИД (комбинированная постановка).
- 6) Комплекс программ расчета трехмерных магнитных полей ROTOR2D (Погружение в область, полученную вращением двумерной области. Линейный случай.).
- 7) Комплекс программ расчета трехмерных магнитных полей ROTOR3D (Погружение в область, полученную вращением двумерной области. Нелинейный случай.).
- 8) Комплекс программ расчета трехмерных магнитных полей BAR (Погружение в параллелепипед).
- 9) Комплекс программ расчета полюидальных магнитных систем. ТОРОИД

На основе метода объемных интегральных уравнений разработаны параллельные алгоритмы моделирования двумерных и трехмерных магнитостатических полей. Создано программное математическое обеспечение, реализующее предложенные методы и алгоритмы, базирующиеся на распределенной вычислительной системе: ЭВМ ЕС-1066 и матричный процессор ЕС-2706.

Созданные комплексы программ расчета магнитостатических полей использовались для моделирования магнитных систем в существующих и создаваемых в ОИЯИ ускорителях: синхрофазотрон ЛВЭ, Нуклотрон ЛВЭ, циклотрон У-400М ЛЯР. Разработанное программное математическое обеспечение применялось для определения параметров магнитных систем ЭЦР источника DECRI-14 (ЛЯР ОИЯИ), спектрометра АМПИР (ИЯИ АН СССР, Москва) и др.

5. Апробация работы.

Основные результаты диссертации опубликованы в 28 научных работах, по теме данной работы защищена кандидатская диссертация под научным руководством соискателя.

Результаты диссертации докладывались на семинарах ЛВТА, ЛВЭ, ЛСВЭ, ЛЯП, ЛЯР ОИЯИ (Дубна), ИФВЭ (Протвино), XI, XII, XIII Всесоюзных совещаниях по ускорителям заряженных частиц (Дубна 1988, 1990, 1992), рабочем совещании по источнику ионов с электронно-циклотронным резонансом (Дубна, 1991), на X Всесоюзной конференции по постоянным магнитам (Суздаль, 1991), Международном совещании по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач (Дубна, 1977, 1983), на VI международной школе "Применение математики в технике" (Варна, НРБ, 1980), на Всесоюзной школе "Численные методы решения задач математической физики" (Рига, 1982), на международной конференции по дифференциальным уравнениям и их применениям EQUADIFF-7 (Прага, Чехословакия, 1989), на конференции по расчетам магнитных полей COM-PUMAG (Грац, Австрия, 1987).

6. Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, содержит 11 таблиц, 66 рисунков, список литературы из 175 наименований и изложена на 200 страницах машинописного текста.

Методы расчета магнитостатических полей можно разделить на три основных класса.

- 1) Дифференциальные методы, использующие дифференциальные уравнения в частных производных.
- 2) Интегральные методы, приводящие к интегральным уравнениям магнитостатики.
- 3) Комбинированные методы, использующие как дифференциальные, так и интегральные уравнения.

Каждый тип методов имеет как свои достоинства, так и свои недостатки. К достоинствам дифференциальной методики следует отнести разреженность матриц, что позволяет организовать оперативный доступ к ним и применение быстрых алгоритмов, относительная простота вычисления коэффициентов матриц дискретизованных уравнений. К числу недостатков относятся проблемы генерации сетки, стыковки раздела сред, задание граничных условий, во многих случаях решение в области значительно превышает объем железа. Основным достоинством интегральной постановки является необходимость решения возникающих

уравнений только в области, занимаемой ферромагнетиком. Автоматически задается поведение искомых величин на бесконечности. Естественным образом решается проблема раздела сред, задание граничных условий. К числу недостатков необходимо отнести полную заполненность матриц, возникающих при дискретизации уравнений, что приводит к жесткому ограничению на методы решения дискретизованных уравнений. Вычисление коэффициентов матриц приводит к взятию интегралов большой кратности, в общем случае, от сингулярных функций. Определение поля в заданной области на основании полученного решения требует значительных затрат, в некоторых случаях имеет место численная неустойчивость при решении дискретизованной задачи. Комбинированные методы являются симбиозом методов первых двух типов. Для учета поведения функций на бесконечности используются интегральные уравнения на границе некоторой области, а для описания поля внутри области дифференциальные уравнения в частных производных.

Целесообразность применения той или иной постановки для решения задачи магнитостатики во многом зависит от конкретной магнитной системы. Если для закрытых магнитных систем, в которых происходит локализация поля в некоторой ограниченной области, предпочтительнее методы, связанные с дифференциальными подходами, то в открытых магнитных системах лучше работают методы, основанные на интегральной или комбинированной постановках.

В диссертации рассматриваются постановки всех трех классов.

В первой главе исследуются вопросы существования и единственности решения задачи магнитостатики.

Во второй главе рассматриваются вопросы, связанные с использованием метода объемных и граничных интегральных уравнений для расчета магнитостатических полей.

В третьей главе рассматриваются дифференциальная и гибридная постановки задачи магнитостатики.

В четвертой главе рассматриваются специальные методы решения задачи магнитостатики.

В пятой главе приводятся результаты использования разработанных комплексов программ расчета магнитных полей для моделирования различных магнитных систем крупных электрофизических установок.

7. Содержание работы.

Во введении приводится краткий обзор литературы, существующих

методов и подходов к численному определению магнитостатических полей. Обсуждаются проблемы, которые возникают при моделировании магнитных систем, дается описание постановок и методов, используемых в наиболее известных пакетах программ.

Рассмотрим задачу нахождения распределения магнитного поля, создаваемого стационарными токами в проводниках с изотропным ферромагнитным материалом.

Пусть $\vec{B}(\vec{a})$, $\vec{H}(\vec{a})$, $\vec{M}(\vec{a})$ есть индукция, напряженность и намагниченность магнитного поля в т. \vec{a} . В случае отсутствия поверхностных токов и токов, протекающих по ферромагнетик, величины \vec{B} , \vec{H} удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{Rot}_{\vec{a}}(\vec{H}(\vec{a})) &= \vec{J}(\vec{a}), \\ \text{div}_{\vec{a}}(\vec{B}(\vec{a})) &= 0, \\ \lim_{|\vec{a}| \rightarrow \infty} |\vec{B}(\vec{a})| &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где \vec{J} — вектор объемной плотности тока (отличен от нуля только в токовых обмотках). Величины \vec{B} , \vec{H} , \vec{M} связаны следующими нелинейными соотношениями

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{a}) &= \frac{\vec{B}(\vec{a})}{\mu(|\vec{B}(\vec{a})|)\mu_0}, \\ \vec{M}(\vec{a}) &= \frac{\vec{B}(\vec{a})}{\mu_0} - \vec{H}(\vec{a}), \end{aligned} \quad (2)$$

где μ_0 — абсолютная магнитная проницаемость вакуума, $\mu(x)$ — магнитная проницаемость (вне железа тождественно равная единице, а внутри железа есть нелинейная функция, характеризующая связь между \vec{H} и \vec{B} для данного типа ферромагнетика). На границе раздела сред с различными магнитными характеристиками выполняются условия непрерывности нормальной и тангенциальной составляющих векторов \vec{B} и \vec{H} соответственно:

$$\begin{aligned} (\vec{n}, (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)) &= 0, \\ [\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] &= \vec{0}, \end{aligned} \quad (3)$$

где \vec{n} — единичный вектор нормали к поверхности раздела сред.

Уравнения (1)–(3) неудобны для непосредственного нахождения вектор-функций $\vec{H}(\vec{a})$, $\vec{B}(\vec{a})$. Существует большое число постановок задачи магнитостатики, вытекающих из уравнений Максвелла.

Представим напряженность \vec{H} в виде суммы двух составляющих

$$\vec{H}(\vec{a}) = \vec{H}^s(\vec{a}) + \vec{H}^m(\vec{a}), \quad (4)$$

где $\vec{H}^S(\vec{a})$ есть поле, создаваемое токовыми обмотками, а $\vec{H}^m(\vec{a})$ есть добавочное поле от ферромагнетика. По закону Био-Саварра $\vec{H}^S(\vec{a})$ есть

$$\vec{H}^S(\vec{a}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_S} \left[\nabla_{\vec{a}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \times \vec{J}(\vec{a}) \right], \quad (5)$$

где Ω_S - объем, занимаемый токовыми обмотками. Из (1) следует, что

$$\text{Rot } \vec{H}^m(\vec{a}) = \vec{0}.$$

Таким образом $\vec{H}^m(\vec{a})$ есть градиент некоторой функции ϕ , и имеет место равенство

$$\vec{H}(\vec{a}) = \vec{H}^S(\vec{a}) + \nabla\phi. \quad (6)$$

Функцию ϕ будем называть редуцированным скалярным потенциалом. Из (3) получаем непрерывность ϕ на границе раздела сред и уравнения для скачка нормальной производной.

В первой главе диссертации исследуются вопросы существования и единственности решения задачи магнитостатики. В качестве основного инструмента используются свойства пространств С.Л.Соболева.

Пусть G есть односвязная ограниченная область в R^3 с гладкой границей. Рассмотрим дифференцируемую вектор-функцию $\vec{M}(\vec{x})$, заданную на G . Дополнительно будем предполагать, что

$$\int_G |\vec{M}(\vec{x})|^2 dv_x < \infty.$$

Сформулируем задачу А.

Задача А.

Рассмотрим $\varphi(\vec{x})$, удовлетворяющую следующим уравнениям:

$$\Delta\varphi(\vec{x}) + \text{div}(\vec{M}(\vec{x})) = 0, \quad x \in \text{Int}G, \quad (7)$$

$$\Delta\varphi(\vec{x}) \equiv 0, \quad \vec{x} \in R^3 \setminus G. \quad (8)$$

Нормальная производная на границе области DG терпит разрыв

$$\frac{\partial\varphi(\vec{x})}{\partial n_{\vec{x}}^-} - \frac{\partial\varphi(\vec{x})}{\partial n_{\vec{x}}^+} = (\vec{M}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})), \quad (9)$$

где $\frac{\partial\varphi(\vec{x})}{\partial n_{\vec{x}}^-}$ есть предел нормальной производной $\varphi(\vec{x})$ при стремлении точки наблюдения к граничной точке снаружи области G , а $\frac{\partial\varphi(\vec{x})}{\partial n_{\vec{x}}^+}$ предел нормальной производной при стремлении точки наблюдения к граничной

точке изнутри области G . На поведение $\varphi(\vec{a})$ на бесконечности накладываются следующие условия:

$$\lim_{|\vec{a}| \rightarrow \infty} |\varphi(\vec{a})| = 0, \quad \lim_{|\vec{a}| \rightarrow \infty} |\nabla\varphi(\vec{a})| = 0. \quad (10)$$

Отметим, что решение задачи А есть потенциал ϕ из (6).

Рассмотрим бесконечную последовательность расширяющихся шаров $\{S_l\}$ с общим центром в некоторой точке O . Радиус S_l шара стремится к бесконечности при l стремящемся к бесконечности. Будем предполагать, что область G содержится во всех $\{S_l\}$ и расстояние от G до границы S_l больше нуля. Для каждого S_l сформулируем задачу В.

Задача В.

Рассмотрим $\varphi(\vec{x})$, удовлетворяющую уравнению (7) и (9) в области S_l . Уравнение (8) заменим уравнением

$$\Delta\varphi(\vec{x}) \equiv 0, \quad \vec{x} \in S_l \setminus G. \quad (11)$$

Вместо условия (10) потребуем равенство $\varphi(\vec{x})$ нулю на границе S_l

$$\varphi(\vec{x}) \equiv 0, \quad \vec{x} \in DS_l. \quad (12)$$

Рассмотрим на S_l пространство Соболева $W_2^1(S_l)$ суммируемых, дифференцируемых почти всюду функций $\{f\}$ имеющих ограниченный интеграл

$$\int_{S_l} (f^2(\vec{x}) + |\nabla f(\vec{x})|^2) dv_x < \infty.$$

Обозначим $\dot{W}_2^1(S_l)$ подпространство функций из $W_2^1(S_l)$ обращающихся в ноль на границе области S_l .

Умножая (7) и (11) на $f(\vec{x})$ из $W_2^1(S_l)$, интегрируя по S_l с учетом (9), получаем

$$\int_{S_l} (\nabla\varphi(\vec{x}), \nabla f(\vec{x})) dv_x + \int_G (\nabla f(\vec{x}), \vec{M}(\vec{x})) dv_x = 0. \quad (13)$$

Назовем $\varphi(\vec{x})$ из $\dot{W}_2^1(S_l)$ удовлетворяющую (13) для любой функции f из $\dot{W}_2^1(S_l)$ обобщенным решением задачи В.

Определим функционал $\Phi^l(\varphi)$ для функций $\{\varphi\}$ из $\dot{W}_2^1(S_l)$ следующим образом

$$\Phi^l(\varphi) = 0.5 \int_{S_l} |\nabla\varphi|^2 dv_x + \int_G (\nabla\varphi, \vec{M}) dv_x. \quad (14)$$

Экстремальное значение $\Phi^l(\varphi)$ есть решение задачи В. Отметим, что функционал $\Phi^l(\varphi)$ полуограничен снизу

$$\Phi^l(\varphi) \geq -0.5 \int_G |\bar{M}(\bar{x})|^2 dv_{\bar{x}}. \quad (15)$$

Из (15) следует, что существует точная нижняя грань значения $\Phi^l(\varphi)$

$$d = \inf \Phi^l(\varphi),$$

$$\varphi \in \dot{W}_2^1(S_1).$$

Из множества $\dot{W}_2^1(S_1)$ можно выделить минимизирующую последовательность $\{\varphi_k\}$, для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi^l(\varphi_k) = d.$$

Имеет место теорема.

Теорема 1.

Минимизирующая последовательность $\{\varphi_k\}$ сходится в $\dot{W}_2^1(S_1)$ к предельной функции φ^* , принадлежащей $\dot{W}_2^1(S_1)$ и дающей функционалу $\Phi^l(\varphi)$ наименьшее значение на $\dot{W}_2^1(S_1)$. Для любой f из $\dot{W}_2^1(S_1)$ выполняется тождество

$$\int_{S_1} (\nabla f, \nabla \varphi^*) dv_{\bar{x}} + \int_G (\nabla f, \bar{M}) dv_{\bar{x}} \equiv 0. \quad (16)$$

Для предельной функции φ^* имеет место неравенство

$$\int_{S_1} |\nabla \varphi^*(\bar{x})|^2 dv_{\bar{x}} \leq \int_G |\bar{M}(\bar{x})|^2 dv_{\bar{x}}. \quad (17)$$

Обозначим ψ_l функцию φ^* минимизирующую $\Phi^l(\varphi)$ из (14). Функция ψ_l есть обобщенное решение задачи В для S_l . Рассмотрим последовательность функций $\{\psi_l\}$. В §1.2 доказывается теорема.

Теорема 2.

Для любого шара Ω конечного радиуса ($G \subset \Omega$) последовательность $\{\psi_l\}$ сходится к некоторой функции ψ^* из $W_2^1(\Omega)$ в метрике $W_2^1(\Omega)$. Для любой функции f из $\dot{W}_2^1(\Omega)$ имеет место тождество

$$\int_{\Omega} (\nabla \psi^*(\bar{x}), \nabla f(\bar{x})) dv_{\bar{x}} + \int_G (\nabla f(\bar{x}), \bar{M}(\bar{x})) dv_{\bar{x}} \equiv 0. \quad (18)$$

Назовем $\psi^*(\bar{x})$ обобщенным решением задачи А.

Рассмотрим поведение обобщенного решения $\psi^*(\bar{x})$ задачи А в области $R^3 \setminus G$. В §1.2 доказывается теорема.

Теорема 3.

Обобщенное решение $\psi^*(\bar{x})$ является гармонической функцией в $R^3 \setminus G$. Для $\forall \bar{x}_0 \in R^3 \setminus G$ имеет место тождество

$$\psi^*(\bar{x}_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_G \left(\bar{M}(\bar{x}), \nabla_{\bar{x}} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}_0|} \right) dv_{\bar{x}}. \quad (19)$$

Ввиду произвольности выбора шара Ω доказывается существование обобщенного решения задачи А во всем пространстве R^3 . Функция $\psi^*(\bar{x})$ стремится к нулю как $\frac{C_1}{|\bar{x}|^2}$ при $|\bar{x}| \rightarrow \infty$. Модуль градиента $\psi^*(\bar{x})$ стремится к нулю как $\frac{C_2}{|\bar{x}|}$ при $|\bar{x}| \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что

$$\int_{R^3} (|\psi^*(\bar{x})|^2 + |\nabla \psi^*(\bar{x})|^2) dv_{\bar{x}} < \infty.$$

Для предельной функции ψ^* имеет место неравенство

$$\int_{R^3} |\nabla \psi^*(\bar{x})|^2 dv_{\bar{x}} \leq \int_G |\bar{M}(\bar{x})|^2 dv_{\bar{x}}. \quad (20)$$

Построение обобщенного решения задачи А проводилось для последовательности вложенных расширяющихся шаров $\{S_l\}$. Схема доказательства не меняется, если вместо шаров $\{S_l\}$ рассмотреть последовательность вложенных расширяющихся областей $\{G_k\}$. Построенное решение не зависит от выбора областей.

Для дальнейшего изложения сформулируем свойства величин индукции \bar{B} , напряженности \bar{H} и намагниченности \bar{M} магнитного поля. В диссертации предполагается, что для модуля напряженности $H = H(B)$, рассматриваемой как функции модуля индукции B имеет место неравенство

$$0 < \alpha \leq \mu_0 \frac{\partial H}{\partial B} \leq 1, \quad (21)$$

где α — постоянная для данного типа железа и не зависит от H и B . Намагниченность \bar{M} — добавочное поле, создаваемое железом по модулю ограничено

$$|\bar{M}| \leq M_{\max}, \quad (22)$$

где M_{\max} соответствует полностью насыщенной среде. Для ферромагнетиков соотношения (21) и (22) имеют место.

Из неравенства (21) следует, что для любых B_1, B_2 выполняется неравенство

$$\mu_0 |M(B_2) - M(B_1)| \leq q |B_2 - B_1|, \quad (23)$$

где $0 < q = 1 - \alpha < 1$. Имеет место лемма.

Лемма 1

Для любых \bar{B}_1 и \bar{B}_2 имеет место неравенство:

$$\mu_0 |\bar{M}(\bar{B}_1) - \bar{M}(\bar{B}_2)| \leq q |\bar{B}_2 - \bar{B}_1|, \quad (24)$$

где $0 \leq q < 1$.

В §1.3 доказывается теорема.

Теорема 4

Уравнение (6) имеет единственное решение в классе вектор-функций из $L^2(R^3)$.

Для доказательства теоремы 4 использовался следующий итерационный процесс:

Рассмотрим последовательность $\bar{B}^k(\bar{a})$, определяемую рекуррентным образом:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{B}^{k+1}(\bar{a})}{\mu_0} &= \bar{H}^S(\bar{a}) + \bar{S}^k \\ \bar{B}^0(\bar{a}) &= \bar{0} \\ k &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (25)$$

где \bar{S}^k есть $\nabla \psi^*(\bar{x}) + \bar{M}(\bar{B}^k)$. Функция $\psi^*(\bar{x})$ есть решение задачи А для $\bar{M}(\bar{B}^k)$. В §1.3 доказывается, что итерационный процесс (25) сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q из (23).

Во второй главе рассматривается интегральная постановка задачи магнитостатики. Выпишем явный вид ϕ в (6)

$$\phi(\bar{a}) = \frac{1}{4\pi} \int_G \left(\bar{M}(\bar{x}), \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} \right) dv_{\bar{x}}, \quad (26)$$

где G - объем, заполненный ферромагнетиком. Подставляя ϕ из (26) в (6), получаем окончательный вид уравнения

$$\bar{H}(\bar{a}) = \bar{H}^S(\bar{a}) + \frac{1}{4\pi} \nabla_{\bar{a}} \int_G \left(\bar{M}(\bar{x}), \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} \right) dv_{\bar{x}}. \quad (27)$$

Рассмотрим метод дискретизации, используемый в диссертации для расчета нелинейных магнитных сред. Разобьем область G на подмножества $\{G_i\}$:

$$G = \bigcup_{i=1}^N G_i.$$

Мера пересечения G_i с G_j равна нулю при $i \neq j$. В каждом G_i выберем точку наблюдения \bar{a}_i :

$$\bar{a}_i = \frac{\int_{G_i} \bar{x} dv_{\bar{x}}}{\int_{G_i} dv_{\bar{x}}}.$$

Будем считать $\bar{B}(\bar{x})$ в каждом G_i постоянным и равным \bar{B}_i . Тогда дискретизованная система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{B}_i}{\mu(|\bar{B}_i|)} &= \mu_0 \bar{H}^S(\bar{a}_i) + \sum_{j=1}^N \frac{\nabla_{\bar{a}}}{4\pi} \left[\int_{G_j} \left(\bar{B}_j \left(1 - \frac{1}{\mu(|\bar{B}_j|)} \right), \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} \right) dv_{\bar{x}} \right] \Big|_{\bar{a}=\bar{a}_i}, \\ i &= \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (28)$$

Введем следующие обозначения. Пусть

$$\begin{aligned} \hat{B} &= (\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_N)^T, \\ \hat{M}(\hat{B}) &= (\bar{M}(\bar{B}_1), \bar{M}(\bar{B}_2), \dots, \bar{M}(\bar{B}_N))^T, \\ \hat{H}^S &= (\bar{H}^S(\bar{a}_1), \bar{H}^S(\bar{a}_2), \dots, \bar{H}^S(\bar{a}_N))^T, \\ [A] &= \begin{pmatrix} [A_{11}] & \dots & [A_{1N}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [A_{N1}] & \dots & [A_{NN}] \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $[A_{ij}]$ - матрица размерности $[3 \times 3]$, такая, что для любого постоянного вектора \bar{M} справедливо соотношение

$$[A_{ij}] \bar{M} = \frac{\nabla_{\bar{a}}}{4\pi} \left[\int_{G_j} \left(\bar{M}, \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} \right) dv_{\bar{x}} \right] \Big|_{\bar{a}=\bar{a}_i}.$$

Учитывая (2) систему (28) можно записать в виде

$$\hat{B} = \mu_0 \hat{H}^S + ([A] + [E]) \hat{M}(\hat{B}), \quad (29)$$

где $[E]$ - единичная матрица размерности $[3N \times 3N]$.

Имеет место теорема.

Теорема 5

Система уравнений (29) имеет по крайней мере одно решение.

При решении практических задач для достижения требуемой точности аппроксимации возникает необходимость подробного разбиения области G на все более мелкие элементы, что приводит к резкому возрастанию размерности решаемых нелинейных систем уравнений. Использование методов, требующих обращения матриц подобного порядка крайне

затруднительно. Поэтому для решения дискретизованных систем уравнений используется итерационный процесс (25). Для (29) он имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{B}_{k+1} &= \mu_0(\hat{H}^S + ([A] + [E])\hat{M}(\hat{B}_k)) \\ \hat{B}_0 &= \bar{0} \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (30)$$

Итерационные процессы (30) заканчиваются, когда невязка уравнения (29) становится меньше наперед заданного числа ϵ .

Отметим, что в случае постоянной магнитной проницаемости μ в пределах ферромагнетика объемные интегральные уравнения редуцируются к граничным интегральным уравнениям. В §2.1 формулируются используемые для расчетов трехмерных магнитостатических полей дискретизации граничных интегральных уравнений, исследуются свойства спектра дискретизованных операторов возникающих линейных и нелинейных разностных задач. Для решения дискретизованных задач в линейном случае предлагается итерационный процесс, аналогичный итерационному процессу (25).

В §2.2 рассматривается задача магнитостатики для случая плоских полей. Формулируется используемая в диссертации дискретизация задачи. Доказывается теорема существования дискретизованного решения. Приводится анализ свойств спектра дискретизованного интегрального оператора и на его основе предлагается модификация итерационного процесса (30) решения нелинейной дискретизованной системы, позволяющая найти оптимальный критерий выхода из этого итерационного процесса.

В §2.3 рассматриваются вопросы, связанные с решением задачи магнитостатики для случая осесимметричных полей в рамках метода объемных интегральных уравнений. Описывается используемая в диссертации дискретизация исходных интегральных уравнений. Доказывается теорема существования дискретизованных решений. Приводятся методы вычисления коэффициентов матриц дискретизованных уравнений, основанные на развитии метода арифметико-геометрического среднего для вычисления эллиптических интегралов. Дается описание комплекса программ расчета осесимметричных полей MAGAX, созданного на основе проведенных исследований.

В §2.4 рассматриваются вопросы, связанные с вычислением коэффициентов матриц дискретизованных уравнений для двумерных и трехмерных интегральных уравнений магнитостатики, предлагаются параллельные алгоритмы организации вычислений, дается описание созданных

комплексов программ расчета магнитостатических полей в рамках метода объемных интегральных уравнений IAMAG2D, IAMAG3D, а также их модификации, работающих на распределенном вычислительном комплексе 1066, матричный процессор ЕС-2706. На примере расчета дипольного магнита дается сравнение вычислительных затрат для различных алгоритмов, необходимых для моделирования трехмерных магнитных систем.

В §2.5 на основе метода объемных интегральных уравнений предлагаются алгоритмы оптимизации распределения магнитного поля. Ввиду сложности задачи рассматриваются только плоский и осесимметричный случаи. Задача оптимизации сводится к минимизации функционала, отвечающего за распределения поля. Приводятся примеры использования предложенных алгоритмов.

В третьей главе рассматриваются вопросы, связанные с дифференциальной и гибридной постановкой задачи магнитостатики. Во второй главе для определения потенциала φ из (6) использовалось его явное интегральное представление. С другой стороны для φ имеется система уравнений в частных производных во всем пространстве R^3 . Потенциал φ есть решение задачи А. В первой главе сформулирована задача В для системы расширяющихся областей $\{S_i\}$. Из теоремы 2 следует, что ψ_i (решения задачи В для S_i) сходятся к функции φ_A , являющейся решением задачи А. Рассмотрим задачу В для некоторой области K ($G \subset K$). Довольно естественно использовать решения φ_B этой задачи для аппроксимации потенциала φ .

Для дискретизации задачи В область K разбивается на объединение гексаэдров $\{G_i\}$ $K = \bigcup_{i=1}^N G_i$. Для аппроксимации φ_B используются трилинейные функции формы.

Обозначим s^h пространство сеточных функции $\{v^h\}$. Отметим, что для решения φ_B задачи В для любого $v^h \in s^h$ имеет место тождество

$$\int_k (\nabla \varphi_B, \nabla v^h) + \int_k (\nabla v^h, \bar{M}) \equiv 0. \quad (31)$$

Пусть $\{\bar{P}_j, j = 1, J\}$ есть набор внутренних вершин разбиения K . Определим набор базисных функций $\{v_j^h\}$ в пространстве s^h :

$$v_j^h(\bar{P}_i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Приближим намагниченность \bar{M} в области G кусочно-постоянной вектор-функцией $\bar{M}^h(\bar{x})$ ($\bar{M}^h(\bar{x}) \equiv \bar{M}(\bar{a}_i)$, $\bar{x} \in G_i$; \bar{a}_i - центроид G_i). В качестве

приближенного решения задачи В будем рассматривать $\varphi^h(\bar{x})$ из s^h , удовлетворяющей для любой v_j^h из (31) следующему уравнению:

$$\int_k (\nabla \varphi^h(\bar{x}), \nabla v_j^h) dv_{\bar{x}} + \int_k (\nabla v_j^h, \bar{M}^h(\bar{x})) dv_{\bar{x}}.$$

Пусть $\{\varphi_j\}$ есть значения $\varphi^h(\bar{x})$ в узлах сетки. Тогда для определения $\{\varphi_j\}$ получаем следующую систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^J \varphi_j \int_k (\nabla v_j^h, \nabla v_i^h) dv_{\bar{x}} + \int_k (\nabla v_i^h, \bar{M}^h(\bar{x})) dv_{\bar{x}} = 0, \quad (32)$$

$$i = \overline{1, J}.$$

Для того, чтобы определить распределение намагниченности в G , проинтегрируем (6) по отдельному гексаэдру G_i . Приближая напряженность $\bar{H}(x)$ кусочно-постоянной вектор-функцией $\bar{H}^h(x)$ ($\bar{H}^h(x) = \bar{H}(\bar{a}_i)$) в G_i и заменяя $\varphi(x)$ на $\varphi^h(x)$, получаем систему уравнений:

$$\int_{G_i} \bar{H}^h(x) dv_{\bar{x}} = \int_{G_i} \bar{H}^S(x) dv_{\bar{x}} + \int_{G_i} \nabla \varphi^h(\bar{x}) dv_{\bar{x}}, \quad (33)$$

$$i = \overline{1, L}.$$

Пусть \bar{M}_i есть значение $\bar{M}^h(x)$ в G_i ($i = \overline{1, L}$). Аналогично, \bar{B}_i и \bar{H}_i есть значения $\bar{B}^h(x)$ и $\bar{H}^h(x)$ в G_i . Введем следующие обозначения:

$$\bar{B} = (\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_L)^T,$$

$$\bar{H} = (\bar{H}_1, \bar{H}_2, \dots, \bar{H}_L)^T,$$

$$\bar{M} = (\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_L)^T,$$

$$\bar{H}^S = \left(\int_{G_1} \bar{H}^S(\bar{x}) dv_{\bar{x}}, \dots, \int_{G_L} \bar{H}^S(\bar{x}) dv_{\bar{x}} \right)^T.$$

Ввиду того, что $\varphi^h(x)$ линейно зависит от $\bar{M}^h(x)$, систему (12) можно сокращенно записать следующим образом:

$$[C]\bar{H} = \bar{H}^S + [A]\bar{M}. \quad (34)$$

Матрица $[A]$ в (34) есть матрица размера $[3L \times 3L]$, а $[C]$ - диагональная матрица. Учитывая (2), (34) можно записать следующим образом:

$$[C]\bar{B} = \mu_0 \left(\bar{H}^S + ([C] + [A])\bar{M}(\bar{B}) \right). \quad (35)$$

Для решения нелинейной системы (35) используется следующий итерационный процесс:

$$[C]\bar{B}_{k+1} = \mu_0 \left(\bar{H}^S + ([C] + [A])\bar{M}(\bar{B}_k) \right), \quad (36)$$

$$\bar{B}_0 = \bar{H}^S,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

В §3.1 доказывается, что уравнение (34) имеет единственное решение, итерационный процесс (36) сходится от любого начального приближения со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q из (23). Там же доказывается теорема.

Теорема 6.

В предположении ограниченности вторых производных $\varphi_A(\bar{x})$, $\bar{M}(\bar{x})$, \bar{B} и интеграла $\int_G |\operatorname{div}(\bar{M}(\bar{x}))| dv_{\bar{x}}$ дискретизованное решение $\bar{B}^h(x)$ сходится к непрерывному $\bar{B}(\bar{x})$, и выполняется неравенство

$$\int_K \|\bar{B}^h(\bar{x}) - \bar{B}(\bar{x})\|^2 dv_{\bar{x}} \leq ah^2 + \frac{b}{R^2},$$

где h есть диаметр максимального элемента, R - диаметр области K . Константы a и b не зависят от h и R .

На основе предложенной методики был создан комплекс программ расчета трехмерных магнитостатических полей MAGDA. Для решения возникающих линейных систем уравнений использовался метод неполного разложения Холецкого в сочетании с методом сопряженных градиентов.

Отметим отличительную особенность данной дифференциальной постановки. Матрица дискретизованных уравнений вычисляется только один раз и не меняется в процессе итераций. Как следствие, факторизация матрицы в методе неполного разложения Холецкого также проводится только один раз.

В §3.1 для аппроксимации потенциала φ из (6) использовалось решение задачи В для некоторой области K ($G \subset K$). В §3.2 для определения φ используется комбинированная постановка.

Представим потенциал φ в виде суммы двух потенциалов

$$\varphi(\bar{a}) = \psi(\bar{a}) + u(\bar{a}). \quad (37)$$

Положим

$$\begin{cases} \Delta \psi(\bar{a}) + \operatorname{div}(\bar{M}(\bar{a})) = 0, & \bar{a} \in \operatorname{Int}G \\ \psi(\bar{a}) = 0, & \bar{a} \in R^3 \setminus \operatorname{Int}G \end{cases} \quad (38)$$

Тогда $u(\bar{a})$ удовлетворяет следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \Delta u(\bar{a}) = 0 & \bar{a} \in \text{Int}G \\ \Delta u(\bar{a}) = 0 & \bar{a} \in R^3 \setminus G \end{cases} \quad (39)$$

Функция $u(\bar{a})$ имеет скачок нормальной производной на границе G . Имеем

$$\frac{\partial u(\bar{x})}{\partial n_{\bar{z}}} - \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial n_{\bar{z}}} = (\bar{M}(\bar{x}), (\bar{n}(\bar{x})) + \frac{\partial \psi(\bar{x})}{\partial n_{\bar{z}}}, \quad (40)$$

где $\bar{n}(\bar{x})$ есть вектор внешней нормали к DG в т. \bar{x} ; $\frac{\partial u(\bar{x})}{\partial n_{\bar{z}}}$, $\frac{\partial \psi(\bar{x})}{\partial n_{\bar{z}}}$ есть предел нормальной производной $u(\bar{x})$, $\psi(\bar{x})$ при стремлении точки наблюдения \bar{x} к граничной точке изнутри области G ; а $\frac{\partial u(\bar{x})}{\partial n_{\bar{z}}}$ есть предел нормальной производной $u(\bar{x})$ при стремлении \bar{x} к граничной точке снаружи G . Кроме того, $u(\bar{a})$, и ее производные должны стремиться к нулю при $|\bar{a}|$ стремящемся к бесконечности. В качестве потенциала $u(\bar{a})$ возьмем потенциал простого слоя по границе области G :

$$u(\bar{a}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{DG} \frac{\delta(\bar{x}) dS_{\bar{x}}}{|\bar{x} - \bar{a}|}. \quad (41)$$

Очевидно, что $u(\bar{a})$ удовлетворяет (39). Для того, чтобы выполнялось (41), положим $\delta(\bar{x})$ равным

$$\delta(\bar{x}) = (\bar{M}(\bar{x}), (\bar{n}(\bar{x})) + \frac{\partial \psi(\bar{x})}{\partial n_{\bar{z}}}. \quad (42)$$

В §3.2 рассматриваются вопросы связанные с дискретизацией уравнений (37)-(42). Для решения нелинейной дискретизованной системы используется итерационный процесс (25). На основе предложенной методики создан комплекс программ расчета трехмерных магнитостатических полей "ГИБРИД"

Эффективность использования метода объемных интегральных уравнений для расчета трехмерных магнитостатических полей во многом зависит от учета специфики задачи. В четвертой главе рассматриваются методы, позволяющие существенно улучшить качество выполнения расчета в некоторых специальных случаях.

В §4.1 рассматривается ситуация, когда область G является телом вращения двумерной области G_1 .

Приближим область G областью $\hat{G} = \bigcup_{k=1}^L G^k$. Пусть угол $\phi_0 = \frac{2\pi}{L}$. Область G^{k+1} получается из G^k поворотом вокруг оси O_z на угол ϕ_0 (G^1 получается из G^L поворотом на тот же угол ϕ_0).

Пусть U есть матрица поворота на угол ϕ_0 вокруг оси O_z :

$$U = \begin{pmatrix} \cos \phi_0 & -\sin \phi_0 & 0 \\ \sin \phi_0 & \cos \phi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Разобьем G_1 на подобласти $\{G_1^i\}$,

$$G^1 = \bigcup_{i=1}^N G_1^i.$$

Аналогично разобьем область G_k ($k = \overline{2, L}$)

$$G^k = \bigcup_{i=1}^N G_2^k,$$

причем $G_i^k = U G_i^{k-1}$. Для такого разбиения рассмотрим дискретизацию (28). Пусть $\{\bar{a}_i^k\}$ есть центроиды $\{G_i^k\}$. Обозначим $\bar{B}_i^k, \bar{M}_i^k, \bar{H}_i^k$ - значения индукции, намагниченности и напряженности в G_i^k . В этих обозначениях (28) имеет вид

$$\bar{H}_{i_0}^{k_0} = \bar{H}^S(\bar{a}_{i_0}^{k_0}) + \frac{\nabla \bar{a}}{4\pi} \left[\sum_{k=1}^L \sum_{i=1}^N \int_{G_i^k} \left(\bar{M}_i^k, \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} \right) dv_{\bar{x}} \right] \Big|_{\bar{a}=\bar{a}_{i_0}^{k_0}}, \quad (43)$$

$$i_0 = \overline{1, N}, k_0 = \overline{1, L}.$$

Пусть $[A_{i_1, i_2}^{k_1, k_2}]$ есть матрица размера $[3 \times 3]$, такая что для любого постоянного вектора \bar{M} имеет место тождество

$$[A_{i_1, i_2}^{k_1, k_2}] \bar{M} = \frac{\nabla \bar{a}}{4\pi} \int_{G_{i_2}^{k_2}} \left(\bar{M}, \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} \right) dv_{\bar{x}} \Big|_{\bar{a}=\bar{a}_{i_1}^{k_1}}. \quad (44)$$

Соответственно, матрица $[C_{l,m}]$ есть матрица размера $[3N \times 3N]$ вида

$$[C_{l,m}] = \begin{pmatrix} [A_{1,1}^{l,m}] & \dots & [A_{1,N}^{l,m}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [A_{N,1}^{l,m}] & \dots & [A_{N,N}^{l,m}] \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Аналогично, матрица $[D]$ есть матрица размера $[3NL \times 3NL]$ типа

$$[D] = \begin{pmatrix} [C_{1,1}] & \dots & [C_{1,L}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [C_{L,1}] & \dots & [C_{L,L}] \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Пусть $\bar{M}_k, \bar{B}_k, \bar{H}_k^S$ – векторы размера $3N$:

$$\bar{M}_k = (\bar{M}_1^k, \bar{M}_2^k, \dots, \bar{M}_N^k)^T,$$

$$\bar{B}_k = (\bar{B}_1^k, \bar{B}_2^k, \dots, \bar{B}_N^k)^T,$$

$$\bar{H}_k^S = (\bar{H}^S(\bar{a}_1^k), \bar{H}^S(\bar{a}_2^k), \dots, \bar{H}^S(\bar{a}_N^k))^T.$$

Соответственно $\bar{M}, \bar{B}, \bar{H}^S$ – векторы размера $3NL$:

$$\bar{M} = (\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_L)^T,$$

$$\bar{B} = (\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_L)^T,$$

$$\bar{H}^S = (\bar{H}_1^S, \bar{H}_2^S, \dots, \bar{H}_L^S)^T.$$

В этих обозначениях систему (43) можно записать в виде

$$\bar{B} = \bar{H}^S + ([D] + [E]) \bar{M}, \quad (47)$$

где $[E]$ – единичная матрица размера $3NL$.

Рассмотрим структуру матриц $[A_{j_1, j_2}^{i_1, i_2}]$. Имеют место следующие равенства:

$$G_{j_2}^{i_2} = [U]^{i_2-1} G_{j_2}^1, \quad \bar{a}_{j_1}^{i_1} = [U]^{i_1-1} \bar{a}_{j_1}^1. \quad (48)$$

Из (44) и (48) вытекает

$$[A_{j_1, j_2}^{i_1, i_2}] = \begin{cases} [U]^{i_2-1} [A_{j_1, j_2}^{i_1, -i_2+1, 1}] [U^T]^{i_2-1} & i_1 \geq i_2, \\ [U]^{i_1-1} [A_{j_1, j_2}^{L+i_1-i_2+1, 1}] [U^T]^{i_2-1} & i_2 > i_1, \end{cases} \quad (49)$$

Используя (49) в §4.1 доказывается, что матрицу $[D]$ из (47) можно представить в виде суммы пяти матриц, причем каждая матрица – произведение блочно-циркулянтной и диагональной матриц.

Для решения нелинейной дискретизованной системы (47) используется итерационный процесс (30). При использовании быстрых алгоритмов умножения блочно-циркулянтной матрицы на вектор для одного шага итерационного процесса требуется $O(N^2 L \ln L)$ операций.

Таким образом, учет осевой симметрии ферромагнетика позволяет в $O(L)$ раз сократить вычислительные затраты на подготовку матрицы дискретизованных уравнений и в $O(L/\ln L)$ раз – затраты на итерационный процесс решения нелинейной системы.

Предложенная методика обобщается на случай, когда часть элементов разбиения отсутствует.

Аналогичный алгоритм рассматривается для линейного случая, когда магнитная проницаемость μ является постоянной в пределах области G . В этом случае объемные интегральные уравнения редуцируются к граничному интегральному уравнению. Учет осевой симметрии проводится аналогично нелинейному случаю. При этом матрица $[D]$ является блочно-циркулянтной (в отличие от нелинейного случая, где она была суммой произведений блочно-циркулянтных и диагональных матриц).

Аналогично нелинейному случаю в $O(L)$ раз сокращаются вычислительные затраты на подготовку коэффициентов матрицы $[A]$ и в $O(L/\ln L)$ раз затраты на один шаг итерационного процесса (30).

Теория, изложенная в §4.1, послужила основой для создания комплексов программ расчета трехмерных магнитных полей ROTOR2D (линейный случай) и ROTOR3D (нелинейный случай). В диссертации рассматриваются примеры использования комплексов программ ROTOR2D, ROTOR3D для расчетов магнитных систем, в том числе для расчета поля мультипольного корректора Нуклотрона (ЛВЭ ОИЯИ).

В §4.2 рассматривается случай, когда область G является параллелепипедом. Разобьем G на $N \times L \times M$ равных параллелепипедов. Введем следующую индексацию элементов:

$$G = \bigcup G_{i,j,k}, \quad i = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{0, L-1}, \quad k = \overline{0, M-1}.$$

Пусть $\bar{a}_{i,j,k}$ есть центры $G_{i,j,k}$. Для данного разбиения запишем (28) в следующем виде:

$$\bar{H}_{i,j,k} = \bar{H}^S(\bar{a}_{i,j,k}) + \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{j_1=0}^{L-1} \sum_{k_1=0}^{M-1} [A_{i_1, j_1, k_1}^{i, j, k}] \bar{M}_{i_1, j_1, k_1},$$

$$i = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{0, L-1}, \quad k = \overline{0, M-1},$$

где $[A_{i_1, j_1, k_1}^{i, j, k}] \bar{B} = \frac{\nabla a}{4\pi} \left(\int_{G_{i_1, j_1, k_1}} (\bar{B}, \nabla_a \frac{1}{|x-a|}) dv_x \right) \Big|_{\bar{a}=\bar{a}_{i_1, j_1, k_1}}$. Матрицы $[A_{i_1, j_1, k_1}^{i, j, k}]$ являются функциями величин $(i-i_1), (j-j_1), (k-k_1)$. Поэтому коэффициенты всех матриц $[A_{i_1, j_1, k_1}^{i, j, k}]$ можно выразить через коэффициенты $N \cdot L \cdot M$ матриц $[A_{i_1, j_1, k_1}^{0, 0, 0}]$ ($i = \overline{0, N-1}, j = \overline{0, L-1}, k = \overline{0, M-1}$).

В §4.2 рассматриваются быстрые алгоритмы вычисления всех коэффициентов матриц дискретизованных уравнений. Учитывая специфику дискретизованных операторов и используя трехмерное дискретное преобразование Фурье в диссертации предложены алгоритмы, которые для каждого шага итерационного процесса (30) требуют $O(NLM(N+L+M))$ операций. Если N, L, M есть степени 2, тогда можно использовать алгоритмы быстрого преобразования Фурье. И тогда для каждого шага итерационного процесса (30) потребуется $O(NLM \cdot \ln(N \cdot L \cdot M))$ операций.

Отметим, что для реализации данного алгоритма требуется $O(NLM)$ рабочих ячеек памяти ЭВМ.

В диссертации рассматривается обобщение алгоритма на случай, когда часть элементов разбиения параллелепипеда отсутствует.

Предложенная методика послужила основой для создания комплекса программ расчета магнитостатических полей "ВАР". Для определения коэффициентов дискретизованных уравнений и вычисления трехмерного дискретного преобразования Фурье в процессе решения нелинейной системы были разработаны параллельные алгоритмы, базирующиеся на распределенном вычислительном комплексе: ЭВМ ЕС - 1061 и матричном процессоре ЕС - 2706.

В §4.3 рассматривается вопрос определения магнитного поля в тороидальных магнитах. Ввиду периодичности индукции магнитного поля, рассматриваемой как функции от азимута, в качестве базовой идеи используется метод разложения компонент магнитного поля в гармонический ряд по угловой переменной. Будем предполагать, что область G получается вращением некоторой двумерной области \hat{G} , лежащей в плоскости (r, z) , вокруг оси O_z .

Рассмотрим уравнение (27) в цилиндрической системе координат (r, z, ϕ) . Пусть \bar{x} есть $\bar{x} = \bar{x}(r_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}, \phi_{\bar{x}})$, а $\bar{a} = \bar{a}(r_{\bar{a}}, z_{\bar{a}}, \phi_{\bar{a}})$. Выберем специальный вид векторных функций $\bar{M}(\bar{x})$:

$$\begin{aligned} \bar{M}(\bar{x}) &= \bar{M}_0(r_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}), \\ \bar{M}(\bar{x}) &= \bar{M}_k^c(r_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}) \cos k\phi, \\ \bar{M}(\bar{x}) &= \bar{M}_k^s(r_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}) \sin k\phi, \\ k &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (51)$$

Рассмотрим интегральный оператор $A(\bar{M})$

$$A(\bar{M}) = \frac{\nabla_{\bar{a}}}{4\pi} \int_G \left(\bar{M}(\bar{x}), \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} \right) dv_{\bar{x}}$$

на функциях из (51) для $\phi_{\bar{a}} = 0$. Введем следующие операторы $[A_0], [A_k^c], [A_k^s]$:

$$\begin{aligned} [A_0] \bar{M} &= \frac{\nabla_{\bar{a}}}{4\pi} \left\{ \int_G \left(\bar{M}(r_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}), \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} \right) r_{\bar{x}} dr_{\bar{x}} dz_{\bar{x}} d\phi_{\bar{x}} \right\} \Big|_{\phi_{\bar{a}}=0}, \\ [A_k^c] \bar{M} &= \frac{\nabla_{\bar{a}}}{4\pi} \left\{ \int_G \left(\bar{M}(r_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}), \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} \right) \cos k\phi_{\bar{x}} r_{\bar{x}} dr_{\bar{x}} dz_{\bar{x}} d\phi_{\bar{x}} \right\} \Big|_{\phi_{\bar{a}}=0}, \\ [A_k^s] \bar{M} &= \frac{\nabla_{\bar{a}}}{4\pi} \left\{ \int_G \left(\bar{M}(r_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}), \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} \right) \sin k\phi_{\bar{x}} r_{\bar{x}} dr_{\bar{x}} dz_{\bar{x}} d\phi_{\bar{x}} \right\} \Big|_{\phi_{\bar{a}}=0}, \end{aligned} \quad (52)$$

$$[A_k^s] \bar{M} = \frac{\nabla_{\bar{a}}}{4\pi} \left\{ \int_G \left(\bar{M}(r_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}), \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} \right) \sin k\phi_{\bar{x}} r_{\bar{x}} dr_{\bar{x}} dz_{\bar{x}} d\phi_{\bar{x}} \right\} \Big|_{\phi_{\bar{a}}=0}.$$

Разлагая $\bar{B}(\bar{a}), \bar{H}(\bar{a}), \bar{M}(\bar{a}), \bar{H}^S(\bar{a})$ в ряд Фурье по угловой переменной, учитывая ортогональность функций $\{\sin k\phi, \cos k\phi\}$ на отрезке $[0, 2\pi]$ используя (27) в диссертации получена следующая система уравнений

$$\begin{aligned} \bar{H}_0 &= \bar{J}_0 + [A_0] \bar{M}_0, \\ \bar{H}_k^c &= \bar{J}_k^c + [A_k^c] \bar{M}_k^c - [A_k^s] \bar{M}_k^s, \\ \bar{H}_k^s &= \bar{J}_k^s + [A_k^s] \bar{M}_k^s + [A_k^c] \bar{M}_k^c, \\ k &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (53)$$

где \bar{H}_k^c, \bar{H}_k^s есть гармоники \bar{H} , \bar{M}_k^c, \bar{M}_k^s - гармоники \bar{M} , \bar{J}_k^c, \bar{J}_k^s - гармоники \bar{H}^s соответственно.

Таким образом, исходная трехмерная задача сводится к бесконечной системе двумерных задач относительно гармоник магнитного поля.

Для дискретизации в (53) мы вынуждены ограничиться конечным числом уравнений.

Рассмотрим подпространство вектор-функций E^n вида $E^n = \left\{ \bar{B}(r, z, \phi) : \bar{B}(r, z, \phi) = \bar{B}_0(r, z) + \sum_{k=1}^n (\bar{B}_k^c(r, z) \cos(k\phi) + \bar{B}_k^s(r, z) \sin(k\phi)) \right\}$.

Функции $\bar{B}_0(r, z), \{\bar{B}_k^c(r, z), \bar{B}_k^s(r, z), k = \overline{1, N}\}$ принадлежат $L^2(R^2)$ с нормой

$$\|\bar{B}\|_{L^2} = \int_{R^2} |\bar{B}(r, z)|^2 r dz dr.$$

Пусть P^n есть проектор пространства $L^2(R^3)$ на E^n . Тогда урезанная система уравнений имеет вид

$$\bar{H}(r, z, \phi) = \mu_0 P^n (\bar{H}^S(r, z, \phi) + A(P^n(\bar{M}(B(r, z, \phi)))))) \quad (54)$$

В §4.3 доказывается теорема.

Теорема 7

Система уравнений (54) имеет единственное решение \bar{B} из $L^2(R^3)$. Пусть \bar{B}^* есть решение (27). Тогда выполняется неравенство

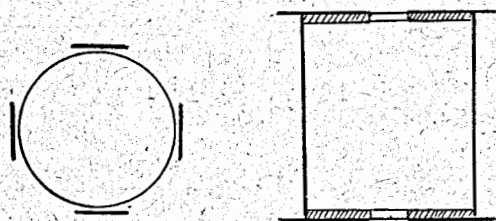
$$\begin{aligned} \|\bar{B} - \bar{B}^*\|_{L^2(R^3)} &\leq \frac{\mu_0}{1-q} \|\bar{H}^S - P^n(\bar{H}^S)\|_{L^2(R^3)} + \\ &+ \frac{1}{1-q} \|\bar{M}(\bar{B}^*) - P^n(\bar{M}(\bar{B}^*))\|_{L^2(G)}, \end{aligned}$$

где $0 < q < 1$ из (23).

Для дискретизации (54) использовался метод коллокации с кусочно-постоянной аппроксимацией поля. Для решения возникающих нелинейных дискретизованных уравнений использовался итерационный процесс (30).

На основе изложенной методики был создан комплекс фортранных программ расчета трехмерных магнитостатических полей ТОРОИД. В диссертации приводятся результаты моделирования поля в тороидальном магните.

В пятой главе приводятся результаты использования разработанных комплексов программ расчета магнитных полей для моделирования различных магнитных систем крупных электрофизических установок.



Эскиз макета спектрометра

рис.1

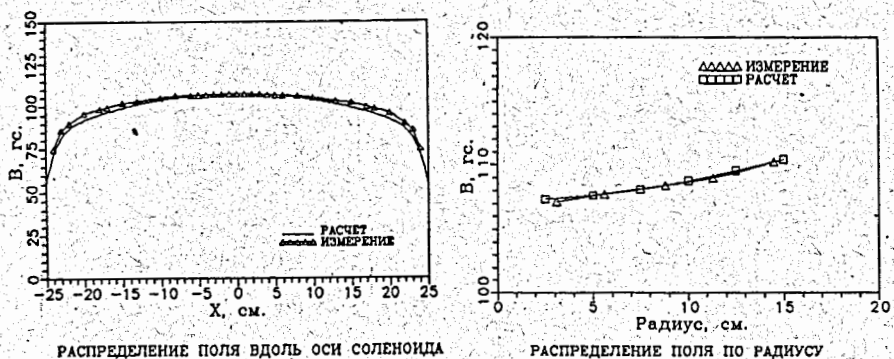
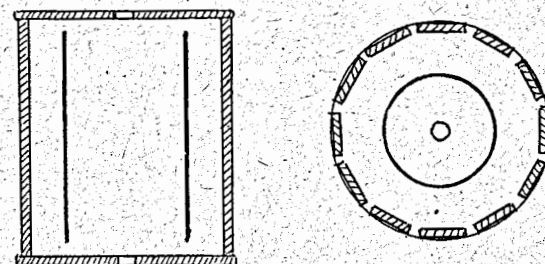


рис.2

В §5.1 излагаются результаты моделирования магнитной системы спектрометра АМПИР. На рис.1 приведен эскиз макета спектрометра. На рис.2 дано сравнение результатов численных расчетов с данными измерений. На рис.3 приведен эскиз упрощенного варианта спектрометра. На рис.4 приведено сравнение численных расчетов с результатами расчетов, проведенными с помощью коммерческого пакета программ моделирования магнитных систем MAGNUS.



Упрощенный вариант спектрометра установки "АМПИР"

рис.3

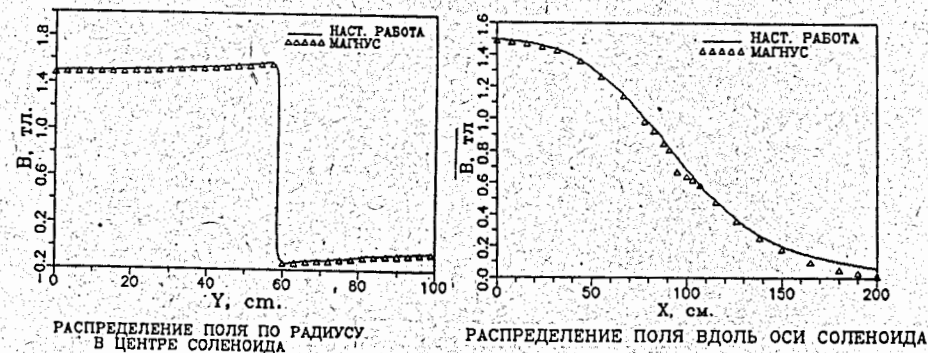


рис.4

В §5.2 приводятся результаты моделирования магнитной системы ЭЦР источника DECRI-14 (ЛЯР ОИЯИ), состоящей из соленоидальных токовых катушек, ферромагнитных дисков и гексаполя на постоянных

магнитах (рис.5). На рис.6 приведено сравнение результатов расчета и измерения радиальной составляющей магнитного поля гексаполя на постоянных магнитах на радиусе 3.5 см. Сравнение результатов расчета с данными магнитных измерений магнитного поля на оси ионного источника показано на рис.7. На рис.8 приведено характерное распределение линий уровня постоянства модуля магнитного поля в разных сечениях ионизационной камеры ЭЦР-источника. Проведенные трехмерные расчеты позволяют определить положение резонансной зоны в сечении ионизационной камеры рис.9.

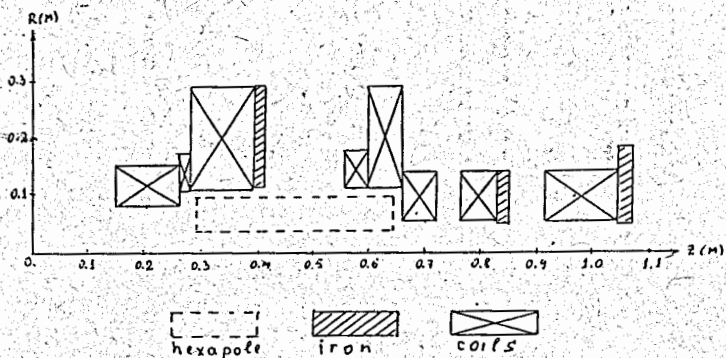


рис.5

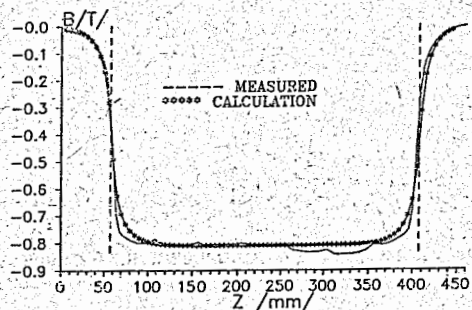


рис.6

В §5.3 приводятся результаты моделирования магнитного поля в диамагнитных образцах в форме параллелепипедов и цилиндров. Для расчетов используется метод граничных интегральных уравнений. Приво-

дится сравнение вычисленных размагничивающих факторов с данными магнитных измерений и аналитическими решениями.

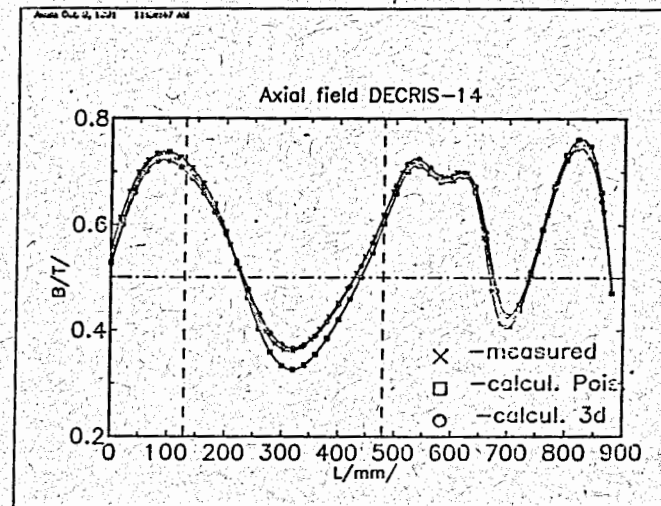


рис.7

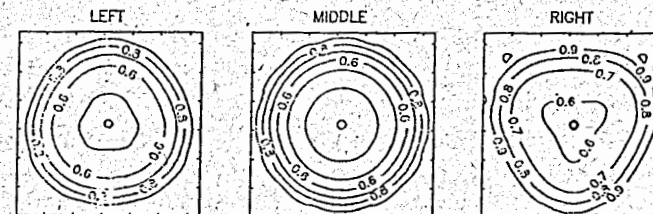


рис.8

В §5.4 приводятся примеры расчетов элементов магнитных систем ускорителей ОИЯИ (синхрофазотрон ЛВЭ, Нуклотрон ЛВЭ, циклотрон

У-400М ЛЯР), для моделирования которых использовалось созданное автором прикладное математическое обеспечение.

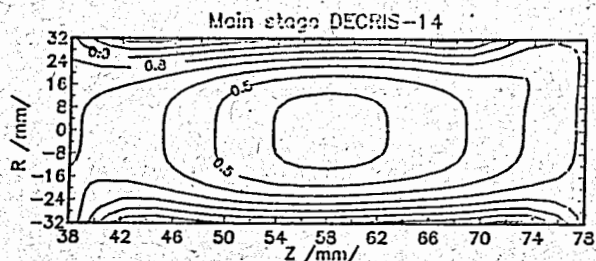


рис.9

4. Результаты представляемые к защите.

На основании проведенных исследований на защиту выносятся следующие результаты:

1. Исследована постановка задачи магнитостатики относительно редуцированного скалярного потенциала. На основе изучения свойств решений вспомогательных краевых задач на последовательности расширяющихся вложенных областей доказана теорема существования и единственности решения задачи магнитостатики, принадлежащее пространству вектор-функций $L^2(R^3)$.
2. Исследованы свойства дискретизованных операторов, получаемых при использовании методов объемных и граничных интегральных уравнений для случая пространственных, плоских и осесимметричных полей. Доказаны теоремы существования решения дискретизованных задач, получаемых в рамках метода объемных интегральных уравнений. Разработаны быстрые алгоритмы вычисления коэффициентов матриц разностных уравнений. Предложены итерационные алгоритмы решения линейных и нелинейных задач, сходящиеся от любого начального приближения со скоростью геометрической прогрессии.
3. Предложены дифференциальная и комбинированная постановки задачи магнитостатики относительно редуцированного скалярного по-

тенциала. Изучены свойства разностных операторов, возникающих при дискретизации предложенных постановок. На основе проведенных исследований для дифференциальной постановки доказана теорема существования и единственности решения дискретизованных уравнений, получены оценки уклонения приближенного решения от точного в зависимости от шага разбиения расчетной области на элементы, а также ее размеров. Разработаны итерационные алгоритмы решения нелинейных дискретизованных задач, возникающих при использовании предложенных постановок, сходящиеся от любого начального приближения со скоростью геометрической прогрессии.

4. В рамках метода объемных интегральных уравнений на основе погружения расчетной области в параллелепипед или область, полученную вращением некоторой двумерной области, разработаны быстрые алгоритмы решения дискретизованной задачи магнитостатики. При этом качественно сокращаются требования, предъявляемые к оперативной и дисковой памяти и вычислительным возможностям, используемой для расчетов ЭВМ.
5. В рамках метода объемных интегральных уравнений на основе разложения компонент магнитного поля в гармонический ряд по угловой переменной предложена методика, ориентированная на расчет полюидальных магнитных систем. Проведена оценка уклонения точного решения от решения связанной системы двумерных интегральных уравнений относительно гармоник поля, полученной путем урезания исходной бесконечной системы. Разработаны алгоритмы вычисления коэффициентов матриц разностных уравнений, получаемых при дискретизации предложенной постановки, а также итерационный метод решения нелинейной дискретизованной задачи.
6. На языке FORTRAN77 написано прикладное математическое обеспечение, реализующее методы и алгоритмы моделирования магнитостатических полей в рамках рассмотренных в диссертации постановок. Созданы комплексы программ расчета осесимметричных полей MAGAX, плоских полей IAMAG2D, пространственных полей IAMAG3D, использующие метод объемных интегральных уравнений; комплексы программ расчета пространственных полей MAGDA (дифференциальная постановка), ГИБРИД (комбинированная постановка), ROTOR2D, ROTOR3D (погружение в область, полученную вращением двумерной области), VAR (погружение в параллелепипед), ТОРОИД (полоидальные магнитные системы).

7. На основе метода объемных интегральных уравнений разработаны параллельные алгоритмы моделирования плоских и пространственных магнитостатических полей. Создано программное математическое обеспечение, реализующее предложенные методы и алгоритмы, базирующиеся на распределенной вычислительной сети: ЭВМ ЕС-1066 и матричный процессор ЕС-2706.
8. Созданные комплексы программ расчета магнитостатических полей использовались для моделирования магнитных систем в существующих и создаваемых в ОИЯИ ускорителях: синхрофазотрон ЛВЭ, Нуклотрон ЛВЭ, циклотрон У-400М ЛЯР. Разработанное программное математическое обеспечение применялось для определения параметров магнитных систем ЭЦР источника DECRIS-14 (ЛЯР ОИЯИ), спектрометра АМПИР (ИЯИ АН СССР; Москва).

Результаты, полученные в работе, опубликованы в следующих работах.

1. Акишин П.Г. Об одном методе решения задачи магнитостатики в дифференциальной постановке. ОИЯИ Р11-92-80. Дубна, 1984.
2. Акишин П.Г., Ефремов А.А., Кутнер В.Б. Расчет магнитной структуры ионного источника DECRIS-14. ОИЯИ Р9-91-555, Дубна, 1991.
3. Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. Метод интегральных уравнений в осесимметричных задачах магнитостатики. ОИЯИ Р11-85-552, Дубна, 1985.
4. Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. Об одном оптимизированном алгоритме решения двумерных интегральных уравнений магнитостатики. ОИЯИ Р11-86-534, Дубна, 1986.
5. Акишин П.Г. Об одной программной реализации GFUN- метода. ОИЯИ Р11-85-522, Дубна, 1986.
6. Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. Об одном устойчивом алгоритме решения интегральных уравнений магнитостатики. ОИЯИ Р11-86-718, Дубна, 1986.
7. Akishin P.G., Zhidkov E.P., Kravtsov V.D. Investigation of the Integral Magnetic Field Equation. JINR E11-87-101, Dubna, 1987.
8. Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. Оптимизация распределения двумерных магнитных полей на основе метода интегральных. ОИЯИ Р11-87-427, Дубна, 1987.

9. Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. Решение двумерных интегральных уравнений магнитостатики в случае линейной аппроксимации намагниченности. ОИЯИ Р11-87-732, Дубна, 1987.
10. Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. Об одном параллельном алгоритме решения трехмерных интегральных уравнений магнитостатики. Математическое моделирование, т.1, N7, 1989, с.100-105.
11. Акишин П.Г. Об одном методе расчета магнитных полей в системах с осесимметричной конфигурацией ферромагнетика. ЖВМ и МФ, 1989, т.29, с.1168-1174.
12. Акишин П.Г. Об использовании специальных областей для расчета трехмерных задач магнитостатики методом объемных интегральных уравнений. ОИЯИ Р11-90-588, Дубна, 1990.
13. Акишин П.Г. Об одной комбинированной постановке задачи магнитостатики. ОИЯИ Р11-91-577, Дубна, 1991.
14. Акишин П.Г., Жидков Е.П. Об существовании решения дискретизованных задач магнитостатики. ОИЯИ Р11-81-826, Дубна, 1981.
15. Акишин П.Г., Жидков Е.П. О единственности решения дискретизованных задач магнитостатики. ОИЯИ Р11-83-427, Дубна, 1983.
16. Акишин П.Г., Гаврилов Ю.К. Математическое моделирование магнитного поля сверхпроводящего соленоида установки АМПИР. ОИЯИ Р11-91-363, Дубна, 1991.
17. Акишин П.Г., Жидков Е.П. Метод интегральных уравнений в двумерных задачах магнитостатики. ОИЯИ Р11-84-799, Дубна, 1984.
18. Акишин П.Г., Жидков Е.П. Вычисление магнитного поля методом интегральных уравнений в случае постоянной магнитной проницаемости. ОИЯИ Р11-82-702, Дубна, 1982.
19. Акишин П.Г., Ефремов А.А. Математическое моделирование магнитной системы ЭЦР-источника. Рабочее совещание по источнику ионов с электронно-циклотронным резонансом (ЭЦР). (Дубна, 29-31 января 1991). Сборник аннотаций. ОИЯИ Р9-91-263, Дубна, 1991.
20. Акишин П.Г., Борисов О.Н., Гульбекян Г.Г. Система вывода пучка из циклотрона У-400М магнитными дефлекторами. XIII совещание по ускорителям заряженных частиц. (Дубна, 13-15 октября 1992г.) ОИЯИ Д9-92-380, Дубна 1992.

21. Акишин П.Г. GAUSS - программа решения больших линейных систем уравнений с выходом на внешние устройства. ОИЯИ Р11-84-493, Дубна, 1984.
22. Акишин П.Г. SQROOT - программа решения больших линейных систем уравнений с симметричными матрицами. ОИЯИ Р11-85-321, Дубна, 1985.
23. Akishin P.G., Gaganov I.A. The Demagnetizing Factors for The Rectangular Samples. JINR E11-90-599, Dubna, 1990.
24. Akishin P.G., Gaganov I.A. Calculation of The Demagnetization Factors for The Cylindrical Samples. JINR E11-89-879, Dubna, 1989.
25. Akishin P.G., Gaganov I.A. The macroscopic demagnetizing effects in cylindrical and rectangular box samples. J. Magnetism and Magnetic Materials, 110(1992) pp.175-180, North-Holland.
26. Акишин П.Г. и др. Численное моделирование магнитных полей синхротрона для фокусировки пучка второго направления медленного вывода. ОИЯИ Р11-85-973, Дубна, 1985.
27. Акишин П.Г. Об одном методе расчета тороидальных магнитов. ОИЯИ Р11-93-91, Дубна, 1993.
28. Акишин П.Г., Бартенев В.Д., Бундаковский В.Н. и др. СП-инфлекторный септум-магнит Нуклотрона. В кн: Труды XII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. т. II, ОИЯИ Д9-92-235, Дубна, 1992.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 апреля 1993 года.