АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОРДЕНА ЛЕНИНА СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Вычислительный центр

На правах рукописи

11-92-4

ЕМЕЛЬЯНЕНКО
Геннадий Андреевич

БЛОЧНО-ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ И МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Специальность: 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Новосибирск 1992

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ: доктор физико-математических наук, профессор В.П.Ильин
доктор физико-математических наук, профессор И.Н.Молчанов
доктор физико-математических наук, профессор А.М.Блохин

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ: Научно-исследовательский вычислительный центр Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова

Защита состоится "___"__________1992 г. в____час. на заседании специализированного совета Д 002.01.01 при Вычислительном центре СО АН СССР по адресу: 630090, Новосибирск, пр-т ак. Лаврентьева, 6.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале Вычислительного центра СО АН СССР (Новосибирск, 90, пр-т ак. Лаврентьева, д.6).

Автореферат разослан "___"__________1992 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
д.ф.-м.н. Ю.И.Кузнецов

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертации построены и систематизированы представления различных типов для произвольных вещественных блочно-трехдиагональных и им обратных матриц, а также для их ведущих блочно-угловых миноров и определителей. Некоторые из полученных численных алгоритмов использованы при обработке экспериментальных данных в физике высоких энергий. Получены на основе модификаций LR (RL) - итерационных алгоритмов и предложенных обобщенных мультипликативных представлений ведущих угловых миноров трехдиагональных матриц общего вида эффективные методы численного решения на ЭВМ спектральных задач для различных типов вещественных квадратных матриц. Созданы на ЭВМ серии ЕС соответствующие стандартные программы, обладающие лучшими характеристиками, чем аналогичные программы из наиболее известных пакетов.

Таким образом, <u>целью и задачами</u> настоящей диссертационной работы являются:

1°. Разработка и систематизация эффективных итерационных методов численного нахождения [$\sigma(\mathbb{C}_3) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$] - всех собственных значений (спектра) и соответствующих им ($\|\overset{(1)}{u}(\lambda)\| = 1$) - нормированных на единицу [$\overset{(1)}{u}(\lambda) : (\mathbb{C}_3 - \lambda E)\overset{(1)}{u}(\lambda) = 0$] - собственных и ($\min \|\overset{(\ell)}{u}(\lambda)\|$) - минимальных по норме [$\overset{(\ell)}{u}(\lambda) : (\mathbb{C}_3 - \lambda E)\overset{(\ell)}{u}(\lambda) = \overset{(\ell-1)}{u}(\lambda)$, где $\ell = 1, 2, \ldots, n_i$ - размерности клеток Жордана] - корневых векторов $\mathbb{C}_3$ - вещественных трехдиагональных матриц общего вида произвольной структуры.

2°. Модификация (с целью повышения эффективности) некоторых из наиболее широко известных итерационных численных методов нахождения $\sigma(\mathbb{C}_5)$, $\sigma(\mathbb{C}_7)$, $\sigma(\mathbb{C})$, $\sigma(H)$, $\sigma(A)$ - спектров вещественных $\mathbb{C}_5$ - пяти, $\mathbb{C}_7$ - семидиагональных, $\mathbb{C}$ - блочно-трехдиагональных, H - хессенберговых и A - полностью заполненных матриц общего вида произвольной структуры.

3°. Получение и систематизация представлений различных типов для $\mathbb{C}$ - блочно-трехдиагональных и $\mathbb{C}^{-1} = B$ - им обратных матриц, а также для их Δ_1^i , Δ_j^m - ведущих блочно-угловых миноров и $det(\mathbb{C})$, $det(B)$ - определителей как в случае невырожденности их $\mathbb{C}^{(i)}$, $B^{(i)}$, $\mathbb{C}_{(j)}$, $B_{(j)}$ - ведущих (усеченных) угловых подматриц, так и в случае вырожденности некоторых из них. Исследование вычислительных свойств и анализ основных характеристик алгоритмов, индуцированных полученными представлениями.

4°. Создание на основе разработанных алгоритмов стандартных программ (в том числе для решения спектральных задач линейной алгебры) на ФОРТРАНе и сравнение их характеристик с аналогичными, наиболее широко известными, стандартными программами.

5°. Разработка математических моделей и эффективных численных алгоритмов (а также анализ результатов) решения задач восстановления кинематических параметров частиц при обработке экспериментальных данных в физике высоких энергий.

Традиционный[x)], по сути, характер большей части из основных задач, решаемых в настоящей диссертации, и их ключевое место в вычислительной линейной алгебре свидетельствуют, уже сами по себе, о принципиальной важности получения в этой области качественно новых результатов, поскольку порой утверждается, не без оснований на то, о достаточно полной разработанности в литературе этого классического раздела вычислительной математики. Действительно, в настоящее время имеется уже, о чем свидетельствует, в том числе и обширный библиографический перечень в конце диссертации, огромное количество монографий, сборников, справочников, обзоров и оригинальных публикаций, в которых либо рассмотрены методы решения указанных задач, либо приводятся примеры из различных областей знания и практики к ним приводящих. Настоящие же исследования были стимулированы, в том числе, задачами ядерной физики [15] и теории рассеяния элементарных частиц, а также моделирования и обработки экспериментальных данных в физике высоких энергий [9÷14, 16÷17].

Актуальность проблем, рассматриваемых в диссертации, и настоящего исследования в целом обусловлена, с учетом сказанного, следующим.

Во-первых, в последние годы заметно вообще увеличение интереса исследователей к аппарату и методам линейной алгебры и теории матриц. Это продиктовано, прежде всего, стремлением повысить эффективность численных методов решения на ЭВМ различных алгебраических задач с учетом специфики заполненности их матриц. В частности же, например, развитие итерационных методов в подпространствах и растущая популярность, в том числе, предобусловленных вариантов метода сопряженных градиентов решения больших систем уравнений служат важным стимулом изучения и систематизации свойств блочно-трехдиагональных и им обратных матриц.

Во-вторых, трех- и блочно-трехдиагональные матрицы, являясь уникальными (в силу ряда характерных свойств) объектами вычислительной линейной алгебры, играют и самостоятельную (выделенную) роль при решении многих задач вычислительной математики, теоретической и математической физики. В частности, проблема многократного вычисления большого числа Δ_1^i , Δ_j^m – блочно-угловых миноров высокого порядка возникает, как известно, при расчетах электромагнитных переходов между высоковозбужденными состояниями деформированных ядер. Необходимость же вычисления явного вида матриц, обратных к блочно-трехдиагональным и блочно-факторизованным из некоторого класса, является характерной и существенной особенностью как при моделировании экспериментов, так и при минимизации функционалов (в общем случае сложной нелинейной природы) относительно искомых кинематических параметров, фитируемых на основе экспериментальных данных в физике высоких энергий. При этом успех в построении эффективных вычислительных алгоритмов для решения указанных задач с такими матрицами определяется с учетом как требований на поведение элементов матриц $\mathcal{C}$ и $B = \mathcal{C}^{-1}$ для обеспечения устойчивости, высокой скорости вычислений на ЭВМ и оптимизации памяти машины, так и выбором адекватных им характерных представлений этих матриц. Анализ же имевшихся до настоящего времени в справочной и оригинальной литературе результатов по всевозможным типам представлений произвольных матриц $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}^{-1} = B$ свидетельствовал, в том числе, и о недостаточно еще полной изученности проблем построения для них и их миноров всевозможных представлений мультипликативного типа (без использования, в частности, перестановок в процессе вычислений и без ограничений на характер поведения миноров).

В-третьих, выделенную роль $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}$, а также $\mathcal{C}_5$, $\mathcal{C}_7$, ленточным и H – почти треугольным (хессенберговым) матрицам в вычислительной математике обеспечили также спектральные задачи, занимающие ключевое место в вычислительной линейной алгебре. Решение полной спектральной проблемы для A – матриц общего вида является, как известно, сложной (по причине характерной неустойчивости) практической задачей. Однако существование устойчивых к ошибкам округлений на ЭВМ ортогональных преобразований подобия $[P \cdot A \cdot P^{-1} = H$ либо $Q \cdot A \cdot Q^{-1} = \mathcal{C}_3]$ несколько улучшает ситуацию, поскольку итерационные методы, являющиеся (для $10 \leq m$ – порядков матриц) основными при решении таких задач, значительно эффективнее реализуются на ЭВМ в случае H и $\mathcal{C}_3$.

В-четвертых, к используемым на практике численным методам решения спектральных задач, помимо условия устойчивости, предъявляются также жесткие требования на скорость их сходимости, объем вычислительных операций и требуемой памяти ЭВМ. Кроме того, часто требуется иметь оценку точности найденных собственных значений и векторов. Другими словами, под алгоритмом на ЭВМ следует понимать здесь совокупность всех операций, учитывающих как собственно итерационный процесс с реализуемой в нем конкретной процедурой исчерпания, так и способ введения в него (и соответственно выбора) итерационных ускоряющих коэффициентов – сдвигов и конкретно реализуемой стратегией начала процесса

x) Это обстоятельство не могло, конечно, не отразиться и на особенностях приводимого ниже обоснования актуальности исследования.

ускорения. При этом теоретически обычно считается задача нахождения $u(\lambda)$ – собственных (корневых) векторов более простой, чем задача нахождения λ – собственных значений. Практически же это утверждение не всегда оправдано. Известно, что в наиболее часто используемых на практике итерационных методах достигнуты уже значительные успехи в решении только что отмеченных характерных проблем. Однако, по-прежнему, остаются практически открытыми, как известно, вопросы оптимизации в них процедур, связанных и с ускорением сходимости и с затратами ресурсов ЭВМ. Об этом свидетельствует, в частности, и помещенный во введении диссертации анализ сильных и известных слабых сторон таких, наиболее часто используемых на практике итерационных методов, как методы бисекций и обратных (прямых) итераций, а также $QR(QL)$ и $LR(RL)$ и др. методов.

Итак, кратко отмеченный выше перечень как нерешенных теоретических, так и практических проблем и обусловили в целом актуальность работ, положенных в основу диссертации и выполненных в соответствии с проблемно-тематическим планом научно-исследовательских работ ЛВТА ОИЯИ.

Формальной основой новых результатов, полученных во второй главе, послужили известные $\{[(\overset{(k)}{\mathbb{C}}_3-\overset{(k)}{W}\cdot E)=\overset{(k)}{L}\cdot\overset{(k)}{R}\to\overset{(k)}{R}\cdot\overset{(k)}{L}=\overset{(k+1)}{\mathbb{C}}_3]\to[\overset{(k+1)}{\mathbb{C}}_3=(\overset{(k)}{L}^{-1}\cdots\overset{(1)}{L}^{-1})(\mathbb{C}_3-\sum_{\ell=1}^{k}\overset{(\ell)}{W}_k\cdot E)(\overset{(1)}{L}\cdots\overset{(k)}{L})]\}$, либо $\{[(\overset{(k)}{\mathbb{C}}_3-\overset{(k)}{W}\cdot E)=\overset{(k)}{L}\cdot\overset{(k)}{R}\to(\overset{(k)}{R}\cdot\overset{(k)}{L}+\overset{(k)}{W}\cdot E)=\overset{(k+1)}{\mathbb{C}}_3]\to[\overset{(k+1)}{\mathbb{C}}_3=(\overset{(k)}{L}^{-1}\cdots\overset{(1)}{L}^{-1})\,\mathbb{C}_3(\overset{(1)}{L}\cdots\overset{(k)}{L})]\}$ итерационные процессы ускоренных на основе двух различных стратегий LR -методов и нетрадиционные результаты первой главы диссертации.

<u>Научная новизна и значимость работы</u>. В представленной работе получено на основе модификаций $LR(RL)$ – алгоритмов, а также нетрадиционных факторизаций $\mathbb{C}_3$ -матриц и обобщенной теории мультипликативных представлений их ведущих угловых миноров множество эффективных методов вычисления на ЭВМ всех собственных значений и собственных (корневых) векторов трехдиагональных матриц общего вида (I) произвольной структуры. Лучшие (например, $T_\Lambda W\alpha$ и $T_G W\alpha$) из разработанных методов требуют при нахождении спектра $\mathbb{C}_3$ -матриц в два раза меньше операций умножения, чем стандартные (без перестановок) версии $LR(RL)$ -методов и в три раза меньше умножений и делений, чем $QR(QL)$-методы. Предложенные методы сохраняют вид исходных матриц и в процессе итераций, в том числе и при наличии у них кратных и (или) комплексных собственных значений. Это достигнуто благодаря нетрадиционному взгляду на роль сдвигов спектра матриц как в процессе повышения скорости сходимости, так и в сохранении вида исходных матриц в процессе итераций. Разработаны эффективные алгоритмы вычисления собственных (корневых) векторов трехдиагональных матриц общего вида произвольной структуры.

Предложены новые эффективные алгоритмы выбора ускоряющих сдвигов в итерационных (на основе $LR(RL)$ -методов) процессах поиска спектров трех-, пяти-, семидиагональных и хессенберговых матриц, позволяющие улучшить характеристики соответствующих (в том числе и из известного пакета *EISPACK*) стандартных программ.

Получены систематизированные множества представлений различных (в том числе нетрадиционного) типов для блочно-трехдиагональных и им обратных матриц, а также для их ведущих блочно-угловых миноров и определителей как в случае невырожденности всех их ведущих блочных подматриц, так и в случае вырожденности некоторых из них. В результате чего предложены новые эффективные методы вычисления на ЭВМ матриц обратных к блочно-трехдиагональным общего вида и к блочно-факторизованным из некоторого класса, а также их ведущих блочно-угловых миноров.

Выполнен анализ особенностей различных моделей и связанных с ними численных алгоритмов решения некоторых задач обработки экспериментальных данных в физике высоких энергий.

<u>Практическая значимость работы</u>. Создана система стандартных программ на ЭВМ серии ЕС на ФОРТРАНе для решения спектральных задач линейной алгебры. Проведено их сравнение с известными стандартными программами, например, из пакета *EISPACK* и из библиотеки "Дубна", т.е. с программами *ФMTQL1*, *ФMTQL2*, *ФBCECT*, *ФINVIT*, в которых реализованы $QR(QL)$-алгоритмы, методы бисекций и обратных итераций соответственно для вещественных трехдиагональных матриц. Лучшие из созданных программ превосходят по основным характеристикам известные стандартные программы и имеют, в частности, более чем в два раза лучшее быстродействие при повышенной точности вычислений по сравнению с указанными выше программами.

Разработаны на основе полученных представлений блочно-трехдиагональных и им обратных матриц варианты оптимального решения задач численного моделирования и реконструкции (с учетом известных случайных факторов) кинематических параметров треков заряженных частиц в физических установках типа "Гиперон".

<u>Апробация работы</u>. Результаты, вошедшие в диссертацию, докладывались на Международном симпозиуме по вопросам автоматизации обработки данных с пузырьковых и искровых камер (Дубна, 1971 г.), Всесоюзной конференции по статистическому моделированию в математической физике (Новосибирск, 1976 г.), Всесоюзном совещании по программированию и математическим методам решения физических задач (Дубна, 1973 г.), Третьей Национальной конференции "Автоматизация-76" (Варна, НРБ, 1976 г.), Международной конференции по обратным задачам (Monpellier,

France, 1982 г.), Конференции молодых ученых ЕрФИ (Нор-Амберд, 1979 г.), Всесоюзной конференции "Вычислительная физика и математическое моделирование" (Волгоград, 1989 г.), Всесоюзной школе-семинаре "Пакеты прикладных программ для решения задач линейной алгебры" (Киев, 1990 г.); докладывались на научных семинарах ЛВТА и по методам вычислительной и прикладной математики ЛВТА ОИЯИ, по структуре атомного ядра ЛТФ ОИЯИ, и ИЯФ АН Уз ССР (г. Ташкент), отдела вычислительных методов ИВМ им. Н.Н.Мусхелишвили АН ГССР (г. Тбилиси), отдела вычислительной математики ИК им. В.М.Глушкова АН УССР (г. Киев), на семинаре вычислительных методов НИВЦ МГУ (г. Москва), на семинаре по вычислительным методам ВЦ СО АН СССР (г. Новосибирск).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в печати в работах [1÷14], [16÷40].

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, включающих 15 параграфов, основных результатов и списка литературы, насчитывающего 347 наименований. В диссертации принята трехзначная нумерация (а,б,с) формул, лемм, теорем, представлений, следствий и замечаний, где а – номер главы, в – номер параграфа в ней, с – номер соответствующих формул, теорем и т.д. в этом параграфе. При ссылках ниже на соответствующие результаты из текста диссертации мы будем пользоваться также указанной нумерацией.

Личный вклад автора. Автор диссертации, работая в коллективе соавторов, объединяющем сотрудников ЛВТА, ЛЯП ОИЯИ, а также ИЯФ АН Уз ССР (г. Ташкент) и ИФВЭ ТГУ (г. Тбилиси) был инициатором и научным руководителем данного научного направления. Им лично разработаны все принципиальные вопросы, относящиеся к полученным результатам, что обеспечило его основной научный вклад в выполненные исследования. Он непосредственно участвовал также в программной реализации на ЭВМ разработанных алгоритмов и в анализе результатов решения физических задач.

II. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обсуждается содержание предмета исследований, обосновывается их актуальность и приводится анализ литературы. Сформулирована также цель, научная новизна и практическая значимость работы. Указаны основные результаты, выносимые на защиту, дано описание структуры диссертации и перечень основных результатов по главам.

Первая глава, состоящая из четырех параграфов, содержит изложение полученных результатов, связанных с разработкой и систематизацией основных алгебраических представлений различных типов для блочно-

факторизованных из некоторого класса, блочно-трехдиагональных общего вида

$$\mathbb{C}=\begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & \\ & p_3 & q_3 & r_4 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & p_m & q_m \end{bmatrix}, \quad \text{либо } diag[(q_k)_{k=1}^m]\cdot\check{\mathbb{C}}=\mathbb{C}=\tilde{\mathbb{C}}\cdot diag[(q_k)_{k=1}^m], \quad \text{если } \{det(q_i)\neq 0\}_{i=1}^m, \tag{I}$$

и им обратных ($\mathbb{C}^{-1}=B$) -матриц, а также для их (например, для $\mathbb{C}$) верхних

$$[\Delta_1^1=det(q_1)],\ [\Delta_1^2=det(\begin{bmatrix} q_1 & r_2 \\ p_2 & q_2\end{bmatrix})],\ [\Delta_1^3=det(\begin{bmatrix} q_1 & r_2 & \\ p_2 & q_2 & r_3 \\ & p_3 & q_3\end{bmatrix})],\ \ldots$$

либо нижних

$$[\Delta_m^m=det(q_m)],\ [\Delta_{m-1}^m=det(\begin{bmatrix} q_{m-1} & r_m \\ p_m & q_m\end{bmatrix})],\ [\Delta_{m-2}^m=det(\begin{bmatrix} q_{m-2} & r_{m-1} & \\ p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & p_m & q_m\end{bmatrix})],\ \ldots \tag{2}$$

ведущих угловых миноров и определителей.

Особое место при этом занимают вопросы количества представлений каждого из рассматриваемых типов. Здесь в (I) и (2) $\{q_i\}_{i=1}^m$ – диагональные элементы $\mathbb{C}$, являющиеся (в общем случае) квадратными различных размерностей и $\{p_k, r_k\}_{k=2}^m$ – прямоугольными соответствующих размерностей вещественными матрицами общего вида, а $diag[(q_k)_{k=1}^m]$ – блочно-диагональные с элементами-блоками q_i на диагонали матрицы. При этом, если $\{q_1, q_k, r_k, p_k\}_{k=2}^m$ – произвольные вещественные числа, то ($\mathbb{C}=\mathbb{C}_3$) – является трехдиагональной матрицей общего вида. Проблема построения указанных представлений наиболее полно была изучена (см., например, [4,1,2,6]) в литературе лишь для $\mathbb{C}_3$-матриц и, как следует из содержания первой главы диссертации, обобщение результатов на случай $\mathbb{C}$(I)-матриц общего вида представлял собой, с одной стороны, не всегда технически простую (из-за некоммутативности в общем случае умножения матриц) задачу и, с другой стороны, во втором случае множество представлений оказалось значительно шире, чем в первом. Принципиальную роль в генерации множества всевозможных представлений для $\mathbb{C}(1)$ и B матриц и для их ведущих миноров сыграла предложенная концепция одновременной проверки обеих блочно-матричных систем равенств $B\cdot\mathbb{C}=E=\mathbb{C}\cdot B$, в отличие от обычно принятой в подобных исследованиях проверки только левого равенства, что лишь формально отвечало известной групповой аксиоме.

В §1.1 приводится теорема 1.1.1, определенным образом суммирующая основные результаты из работ автора по описанию структурных особенностей строения матриц, обратных к трехдиагональным, а также по различным (в том числе обобщенно-мультипликативного типа) представлениям их ведущих угловых миноров. Указанная теорема послужила своеобразным генератором различных подходов и технических решений при обобщении результатов на случай блочно-трехдиагональных матриц. В частности, в первом параграфе получены обобщения теоремы I.I.I на случай блочно-трехдиагональных матриц $\mathbb{C}(1)$, принадлежащих к классу, характеризуемому определенными коммутационными соотношениями[x)]. При этом представления для $B=\mathbb{C}^{-1}$ получены без каких-либо ограничений на поведение ведущих угловых миноров матриц $\mathbb{C}(1)$, поскольку при доказательстве была использована общая теория $B=[det(\mathbb{C})]^{-1}\cdot\tilde{\tilde{\mathbb{C}}}$ – присоединенных матриц, а не факторизации типа Гаусса. Определяющую роль в исследованиях первой главы диссертации сыграло введение в [I8+27] обобщенных матричных последовательностей вида

$$\begin{cases} \text{Если } det(\bar{G}_z)\neq 0 \text{, то} \\ \bar{G}_{z-1}=q_z-r_{z+1}\cdot\bar{G}_z^{-1}\cdot p_{z+1},\ \bar{G}_{m-1}=q_m,\ (det(q_m)\neq 0),\ z=m-1,\dots,1 \\ \text{Если } det(\bar{G}_z)=0 \text{ для любого } z \text{ из } (2\le z\le m-2)\text{, то } \bar{G}_{z-1}=?, \\ \text{но } \bar{G}_{z-2}=q_{z-1},\ \text{если } det(q_{z-1})\neq 0. \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \text{Если } det(\bar{\Lambda}_z)\neq 0 \text{, то} \\ \bar{\Lambda}_{z+1}=q_z-p_z\cdot\bar{\Lambda}_z^{-1}\cdot r_z,\ \bar{\Lambda}_2=q_1,\ (det(q_1)\neq 0),\ z=2,3,\dots,m \\ \text{Если } det(\bar{\Lambda}_z)=0 \text{ для любого } z \text{ из } (3\le z\le m-1)\text{, то } \bar{\Lambda}_{z+1}=?, \\ \text{но } \bar{\Lambda}_{z+2}=q_{z+1},\ \text{если } det(q_{z+1})\neq 0, \end{cases} \quad (4)$$

которые являются, как видно, функциями от элементов $\mathbb{C}(1)$. В других теоремах этого параграфа с использованием результатов работ [I,3,5,7, I8+22] для невырожденных матриц $\mathbb{C}(I)$ общего вида в предположении ненулевых ведущих блочно-угловых миноров либо $\{det(\bar{\Lambda}_k)\neq 0\}_{k=2}^{m+1}$ и (либо) $\{det(\bar{G}_k)\neq 0\}_{k=0}^{m-1}$ построены следующие шесть единственных различных прямых представлений для $B=\mathbb{C}^{-1}$

$$B_{ij}=\begin{cases} B_{ii}\cdot\prod_{z=j+1}^{i}\beta_z, & \text{если } 1\le j\le i\le m, \\ \prod_{z=i+1}^{j}c_z\cdot B_{jj}, & \text{если } 1\le i\le j\le m; \end{cases} \quad B_{ij}=\begin{cases} \prod_{z=j+1}^{i}\hat{c}_z\cdot B_{jj}, & \text{если } 1\le j\le i\le m, \\ B_{ii}\cdot\prod_{z=i+1}^{j}\hat{\beta}_z, & \text{если } 1\le i\le j\le m; \end{cases} \quad (5)$$

$$B_{ij}=\begin{cases} B_{ii}\cdot\prod_{z=j+1}^{i}\beta_z, & \text{если } 1\le j\le i\le m, \\ B_{ii}\cdot\prod_{z=i+1}^{j}\hat{\beta}_z, & \text{если } 1\le i\le j\le m; \end{cases} \quad B_{ij}=\begin{cases} \prod_{z=j+1}^{i}\hat{c}_z\cdot B_{jj}, & \text{если } 1\le j\le i\le m, \\ \prod_{z=i+1}^{j}c_z\cdot B_{jj}, & \text{если } 1\le i\le j\le m, \end{cases} \quad (6)$$

где структурные матрицы $\{c_z, \hat{c}_z$ и $\beta_z, \hat{\beta}_z$ выражаются через элементы B_{ij} и матрицы $\{\bar{\Lambda}, \bar{G}\}$ в виде

$$\beta_k=B_{kk}^{-1}\cdot B_{kk-1},\quad \hat{\beta}_k=B_{k-1k-1}^{-1}\cdot B_{k-1k};\ c_k=B_{k-1k}\cdot B_{kk}^{-1},\ \hat{c}_k=B_{kk-1}\cdot B_{k-1k-1}^{-1} \quad (7)$$

для всех $k=2,3,\dots,m$ и

---

x) Примеры матриц $\mathbb{C}(1)$ из указанного класса, а также задач, к ним приводящих, даются в §3.2 диссертации

$$\begin{cases} \beta_{k+1}=-(p_{k+1}\cdot\bar{\Lambda}_{k+1}^{-1}),\ c_{k+1}=-(\bar{\Lambda}_{k+1}^{-1}\cdot r_{k+1}), & \text{если } k=1,2,\dots,m-1 \\ \hat{\beta}_{k+1}=-(r_{k+1}\cdot\bar{G}_k^{-1}),\ \hat{c}_{k+1}=-(\bar{G}_k^{-1}\cdot p_{k+1}), & \text{если } k=m-1,m-2,\dots,1 \end{cases} \quad (8)$$

а для невырожденных B_{ii} – диагональных блоков B имеют место следующие единственные представления аддитивного типа

$$B_{ii}=(\bar{\Lambda}_{i+1}+\bar{G}_{i-1}-q_i)^{-1},\ k=1,2,\dots,m,\ \text{ либо} \quad (9)$$

$$\left.\begin{matrix} \sum_{k=i}^{m}\prod_{z=i+1}^{k}c_z\cdot\bar{\Lambda}_{k+1}^{-1}\cdot\prod_{z=i+1}^{k}\beta_z,\ i=m,\dots,1 \\ \sum_{k=1}^{i}\prod_{z=k+1}^{i}\hat{c}_z\cdot\bar{G}_{k-1}^{-1}\cdot\prod_{z=k+1}^{i}\hat{\beta}_z,\ i=1,\dots,m \end{matrix}\right\}=B_{ii}=\begin{cases} \bar{\Lambda}_{i+1}^{-1}+c_{i+1}\cdot B_{i+1i+1}\cdot\beta_{i+1},\ i=m,\dots,1 \\ \bar{G}_{i-1}^{-1}+\hat{c}_i\cdot B_{i-1i-1}\cdot\hat{\beta}_i,\ i=1,\dots,m \end{cases} \quad (I0)$$

При этом для единственных B_{kk} (9) и $\{\beta_k, \hat{\beta}_k; c_k, \hat{c}_k\}$ (8) получены для матриц $\mathbb{C}(1)$ общего вида равенств $\{c_k\cdot B_{kk}=B_{k-1k-1}\cdot\hat{\beta}_k,\ B_{kk}\cdot\beta_k=\hat{c}_k\cdot B_{k-1k-1}\}$ а также для частного случая матриц $\mathbb{C}(1)$, у которых $\{det(\bar{\Lambda}_k)\neq 0,\ det(\bar{G}_k)\neq 0$ и $det(r_k)\neq 0,\ det(p_k)\neq 0\}$, четыре различных представления мультипликативного типа для блоков B_{ii}

$$\left.\begin{matrix} (\prod_{k=2}^{m}c_k)^{-1}\cdot(\bar{G}_0^{-1}=B_{11})\cdot\prod_{k=2}^{i}\hat{\beta}_k, \\ \prod_{k=2}^{i}\hat{c}_k\cdot(\bar{G}_0^{-1}=B_{11})\cdot(\prod_{k=2}^{i}\beta_k)^{-1},\ i=2,\dots,m \end{matrix}\right\}=B_{ii}=\begin{cases} \prod_{k=i+1}^{m}c_k\cdot(B_{mm}=\bar{\Lambda}_{m+1}^{-1})\cdot(\prod_{k=i+1}^{m}\beta_k)^{-1}, \\ (\prod_{k=i+1}^{m}\hat{c}_k)^{-1}\cdot(B_{mm}=\bar{\Lambda}_{m+1}^{-1})\cdot\prod_{k=i+1}^{m}\beta_k,\ k=m-1,\dots,1. \end{cases} \quad (II)$$

В теореме I.I.6 этого параграфа (на основе результатов работ [I8+2I]) для указанного частного случая невырожденных матриц $\mathbb{C}(1)$, в которых все $\{q_i\}_{i=1}^{m}$ имеют одинаковые размерности и все $\{p_k, r_k\}_{k=2}^{m}$ – не вырождены, а также отличны от нуля все $\{\Delta_1^i, \Delta_j^m\}$, показано, что представление B_{ii} в виде аддитивной скобки $(\bar{\Lambda}_{i+1}+\bar{G}_{i-1}-q_i)^{-1}$ (9) и прямые представления (5), (6) являются генераторами I6-единственных различных прямых факторизованных представлений B вида

$$B_{ij}=\begin{cases} F_i\cdot V_j, & \text{если } 1\le(i\le j)\le m, \\ R_i\cdot W_j, & \text{если } 1\le(j\le i)\le m, \end{cases} \quad (I2)$$

а (5), (6) и мультипликативные представления B_{ii} вида (II) – генераторами 256-различных представлений B вида (I2). Представления (I2) имеют место, если не пользоваться укрупнением блоков, только для указанного частного случая матриц $\mathbb{C}(1)$ и при этом все матрицы $\{F_i, V_i, R_i, W_i\}$ – квадратные одинаковых размерностей и невырождены. В двух теоремах §I.2 – второго параграфа показано существование двенадцати единственных нерекуррентных прямых и соответствующих им шести единственных матрично-факторизованных представлений для матриц обратных к блочно-факторизованным типа (5)+(7) и в частности, (I2). Показано также, что полученные шесть матрично-факторизованных представлений для $B^{-1}=\tilde{\mathbb{C}}$ имеют место и для блочно-трехдиагональных матриц общего вида $\mathbb{C}(1)$, в которых отличны от нуля ведущие блочно-угловые миноры. Четыре, из шести указанных, являются представлениями нового (нетрадиционного) типа, поскольку в качестве параметров в разложениях матриц $\mathbb{C}(1)$ используют диагональные блоки $B_{ii}(9)$ матрицы $B=\mathbb{C}^{-1}$. Эти новые представления позволили (см.[22÷27]) успешно справиться с задачей построения естественно-элементарных матрично-факторизованных и прямых представлений матриц $\mathbb{C}(1)$ и $B=\mathbb{C}^{-1}$ при наличии у них нулевых ведущих блочных угловых миноров. Большую роль сыграли эти новые представления и в обосновании нетрадиционного решения проблемы миноров, а также спектральных задач. В §3.I с учетом обобщенных матричных последовательностей (3) и (4) строятся (без использования перестановок) различные типы матрично-факторизованных представлений (разложений) блочно-трехдиагональных матриц $\mathbb{C}(1)$ общего вида при наличии у них различных комбинаций нулевых ведущих блочно-угловых миноров. При этом в качестве факторизующих матриц (сомножителей) в разложениях таких $\mathbb{C}(1)$ матриц используются лишь естественные с минимальной размерностью блоков блочно-двухдиагональные и блочно-диагональные матрицы. Например, в теореме I.3.10 для невырожденной $\mathbb{C}(1)$ матрицы общего вида, у которой обращаются в нуль лишь по одному из ведущих блочно-угловых миноров, каждого из двух указанных типов, получены следующие разложения

Представление для $\mathbb{C}(1)$ [при $det(\bar{G}_k)=0$ и $det(q_{k-1})\neq 0\neq det(q_m)$ для любого k из интервала $2\leq k\leq m-2$]

$$\begin{bmatrix} E_1 & (-\hat\beta_2) & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & E_{k-2} & (-\hat\beta_{k-1}) & & & & \\ & & & E_{k-1} & O_k & & & \\ & & & & E_k & O_{k+1} & & \\ & & & & & E_{k+1} & (-\hat\beta_{k+2}) & \\ & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & E_{m-1} & (-\hat\beta_m) \\ & & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ & E_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & E_{k-1} & & & \\ \hat{A}_1 & \cdots & \hat{A}_{k-1} & & E_k & & \\ & & & & & E_{k+1} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & E_{m-1} \\ & & & & & & & & E_m \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{G}_0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \bar{G}_{k-3} & & & \\ & & & q_{k-1} & & \\ & & & & \begin{bmatrix} (q_k-\hat\theta_k) & z_{k+1} \\ p_{k+1} & \bar{G}_k \end{bmatrix} & \\ & & & & & \bar{G}_{k+1} \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \bar{G}_{m-1} \end{bmatrix}}_{\hat\omega(\bar{G})} \begin{bmatrix} E_1 & & & & \hat{B}_1 & & \\ & E_2 & & & \hat{B}_2 & & \\ & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & E_{k-1} & \hat{B}_{k-1} & & \\ & & & & E_k & & \\ & & & & & E_{k+1} & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & & & \\ (-\hat{c}_2) & E_2 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & (-\hat{c}_{k-1}) & E_{k-1} & & & & \\ & & & O_k & E_k & & & \\ & & & & O_{k+1} & E_{k+1} & & \\ & & & & & (-\hat{c}_{k+2}) & E_{k+2} & \\ & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & (-\hat{c}_m) & E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\bar{G}) \qquad (I3)$$

где

$$\begin{cases} \hat{A}_j = p_k\cdot\prod_{s=j+1}^{k-1}\hat{c}_s\cdot\bar{G}_{j-1}^{-1}, \; j=1,2,\ldots,k-1; \quad \hat{B}_i=\bar{G}_{i-1}^{-1}\cdot\prod_{s=i+1}^{j}\hat\beta_s\cdot z_k, \; i=1,2,\ldots,k-1, \\ \hat\theta_k=\sum_{s=1}^{k-1}(\hat{A}_s\cdot\bar{G}_{s-1}\cdot\hat{B}_s). \text{ При этом } (q_k-\hat\theta_k)=\bar\Lambda_{k+1}, \text{ если } \{det(\bar\Lambda_s)\neq 0\}_{s=2}^{k}. \end{cases} \qquad (I3')$$

Представление для $\mathbb{C}(1)$ [при $det(\bar\Lambda_k)=0$ и $det(q_{k+1})\neq 0\neq det(q_1)$ для любого k из интервала $3\leq k\leq m-1$]

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & & \\ (-\beta_2) & E_2 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & (-\beta_{k-1}) & E_{k-1} & & & & \\ & & & O_k & E_k & & & \\ & & & & O_{k+1} & E_{k+1} & & \\ & & & & & (-\beta_{k+2}) & E_{k+2} & \\ & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & (-\beta_m) & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ & E_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & E_{k-1} & & & \\ & & & & E_k & B_{k+1} & \cdots & B_m \\ & & & & & E_{k+1} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & E_{m-1} \\ & & & & & & & & E_m \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar\Lambda_2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \bar\Lambda_{k-1} & & & \\ & & & \begin{bmatrix} \bar\Lambda_k & z_k \\ p_k & (q_k-\check\theta_k) \end{bmatrix} & & \\ & & & & q_{k+1} & & \\ & & & & & \bar\Lambda_{k+3} & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \bar\Lambda_{m+1} \end{bmatrix}}_{\omega(\bar\Lambda)} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ & E_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & E_{k-1} & & & \\ & & & & E_k & & \\ & & & & A_{k+1} & E_{k+1} & & \\ & & & & A_{k+2} & & E_{k+2} & \\ & & & & \vdots & & & \ddots \\ & & & & A_m & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & (-c_2) & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & E_{k-2} & (-c_{k-1}) & & & & \\ & & & E_{k-1} & O_k & & & \\ & & & & E_k & O_{k+1} & & \\ & & & & & E_{k+1} & (-c_{k+2}) & \\ & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & E_{m-1} & (-c_m) \\ & & & & & & & E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\bar\Lambda) \qquad (I4)$$

где

$$\begin{cases} B_j = z_{k+1}\cdot\prod_{s=k+2}^{j}c_s\cdot\bar\Lambda_{j+1}^{-1}, \; j=k+1,\ldots,m; \quad A_i=\bar\Lambda_{i+1}^{-1}\cdot\prod_{s=k+2}^{i}\beta_s\cdot p_{k+1}, \; i=k+1,\ldots,m, \\ \check\theta_k=\sum_{s=k+1}^{m}(B_s\cdot\bar\Lambda_{s+1}\cdot A_s). \text{ При этом } (q_k-\check\theta_k)=\bar{G}_{k-1}, \text{ если } \{det(\bar{G}_s)\neq 0\}_{s=k}^{m-1}. \end{cases} \qquad (I5)$$

Индуцированные матрицы $\hat\omega(\bar{G})$ и $\omega(\bar\Lambda)$ в зависимости от различных комбинаций нулевых миноров у $\mathbb{C}(1)$, могут, как следует из (I3)÷(I4) и теорем I.3.I÷I.3.I3 этого параграфа, принимать от простейшего до общего блочно-трехдиагонального вида. При этом основная теорема I.3.I3 этого параграфа утверждает, что для индуцированных $\hat\omega(\bar{G})$ либо $\omega(\bar\Lambda)$ блочно-трехдиагональных матриц существуют, в свою очередь, разложения с максимальной размерностью блоков не более чем размерность матриц

$$\begin{bmatrix} (q_k-\hat\theta_k) & z_{k+1} \\ p_{k+1} & \bar{G}_k \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \bar\Lambda_k & z_k \\ p_k & (q_k-\check\theta_k) \end{bmatrix}.$$

В этом параграфе получены также (теорема I.3.5 и лемма I.3.2) достаточные условия вырожденности блочно-трехдиагональных матриц $\mathbb{C}(1)$ общего вида, обобщающие известные аналогичные условия для $\mathbb{C}_3$ -матриц. В §I.4 – последнем параграфе первой главы, исходя из определений (3), (4) – обобщенных последовательностей и факторизаций типа (I3), (I4), строятся, с учетом результатов работ [22÷27], представления обобщенно-мультипликативного типа для ведущих блочно-угловых миноров и определителей матриц $\mathbb{C}_3$, $\mathbb{C}(1)$ и $B=\mathbb{C}^{-1}$, которые дают эффективные алгоритмы для вычисления указанных величин. При этом для $\mathbb{C}_3$ -матриц устанавливается соотношение $\prod_{k=i}^{m}(\bar\Lambda_{k+1}/\bar{G}_k)=[B_{ii}^{-1}=(\bar\Lambda_{i+1}+\bar{G}_{i-1}-q_i)]=\prod_{k=1}^{i}(\bar{G}_{k-1}/\bar\Lambda_k)$, являющееся следствием четырех мультипликативных представлений (II). Вычислительные свойства и основные характеристики алгоритмов, индуцированных полученными в первой главе представлениями, рассмотрены в §3.I диссертации.

Вторая глава диссертации, состоящая из шести параграфов, содержит систематизированное изложение основных результатов оригинальных исследований [28÷39], посвященных как разработке новых, так и модификации некоторых из широко известных численных методов (с целью улучшения их основных характеристик) решения спектральных задач. Особое место здесь занимают вопросы нахождения спектра и собственных (корневых) векторов вещественных трехдиагональных матриц общего вида произвольной структуры. Исследования этой главы выполнены на основе модификаций известных $LR(RL)$ – методов с использованием отмеченных уже выше результатов обобщенной теории ведущих угловых миноров $\mathfrak{C}_3$ -матриц, а также свойств их матрично-факторизованных (в том числе нетрадиционного вида) представлений. Успех исследований был предопределен также не совсем традиционным взглядом на роль и методы вычисления итерационных сдвигов спектра. Специальным образом выбираемые α -начальные сдвиги использовались нами также и как средство исключения нулевых ведущих угловых миноров и, следовательно, сохранения исходного вида $\mathfrak{C}_3$ -матриц произвольной структуры и в процессе итераций.

В §2.I для каждой (см. теоремы 2.I.5 и 2.I.6 соответственно) из ускоряющих стратегий, приведенных на стр. 4 автореферата, построена множество из двенадцати алгоритмов вычисления $\sigma(\mathfrak{C}_3)$ – спектра вещественных $\mathfrak{C}_3$ – трехдиагональных матриц общего вида как при наличии у них всех различных, так и в случае (с учетом теоремы 2.I.7 и леммы 2.I.I3) кратных вещественных или (и) комплексных собственных значений. Так, например, алгоритмическую основу первых четырех (из двенадцати) методов теоремы 2.I.5, использующей первую из указанных стратегий ускорения, составили следующие итерационные последовательности

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} = 1-\overset{(k)}{\gamma}_i\cdot\overset{(k)}{\Lambda}{}_i^{-1}\ ;\quad \overset{(k)}{\Lambda}_1=\overset{(k)}{\Lambda}_2=1\ ;\quad i=2,3,\dots,m\\ &\overset{(k)}{\tilde{\tau}}_i=\overset{(k)}{\gamma}_i\big/(1-\overset{(k)}{\tilde{\tau}}_{i-1})\ ;\quad \overset{(k)}{\tilde{\tau}}_1=0\ ,\ i=2,3,\dots,m\\ &\overset{(k)}{T}_i=(\overset{(k)}{P}_i\cdot z_i)\big/(\overset{(k)}{q}_{i-1}-\overset{(k)}{T}_{i-1})\ ;\quad \overset{(k)}{T}_1=0,\ i=2,3,\dots,m\\ &\overset{(k)}{L}_i=\overset{(k)}{q}_i-(\overset{(k)}{P}_i\cdot z_i)\big/\overset{(k)}{L}_{i-1}\ ;\quad \overset{(k)}{L}_1=\overset{(k)}{q}_i\ ;\ i=2,3,\dots,m \end{aligned}\right\}, \tag{16}$$

используемые обозначения в которых формально были перенесены и при выборе названия соответствующего метода. Здесь и всюду далее

$$\overset{(k)}{\gamma}_i=(\overset{(k)}{P}_i\cdot z_i)\big/(\overset{(k)}{q}_{i-1}\cdot\overset{(k)}{q}_i)\ ;\quad \overset{(k)}{\gamma}_1=0\ ;\quad i=2,3,\dots,m\ , \tag{17}$$

а также $\{\overset{(1)}{q}_i=q_i+\alpha\}$, $\{q_1,q_i,z_i,P_i\}_{=2}^{m}$ – элементы исходной матрицы $\mathfrak{C}_3(1)$ и α – некоторые вещественные числа такие, что $\{\overset{(1)}{q}_i\neq 0\}_{i=1}^{m}$.
Пятый из алгоритмов этой теоремы основан на использовании комбинации последовательностей $\{\overset{(k)}{T}_i\}$ и $\{\overset{(k)}{L}_i\}$. Одним[x)] из лучших в группе из первых пяти построенных соответственно в этой теореме, методов является следующий

x) Мы приводим здесь (как это принято в литературе при характеристике подобных методов) лишь собственно алгоритм метода без включения в него итерационных ускоряющих сдвигов $\overset{(k)}{W}$.

$T_\Lambda\alpha$ **– метод**

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(k+1)}{q}_i=(\overset{(k)}{q}_i-\overset{(k)}{T}_i)+\overset{(k)}{T}_{i+1}\ ;\quad \overset{(k)}{T}_{m+1}=0\ ,\ i=1,2,\dots,m\\ &\overset{(k+1)}{T}_i=[(\overset{(k)}{q}_i-\overset{(k)}{T}_i)\overset{(k)}{T}_i]\big/(\overset{(k+1)}{q}_{i-1}-\overset{(k+1)}{T}_{i-1})\ ;\quad \overset{(k+1)}{T}_1=0\ ;\ i=2,3,\dots,m\\ &\tilde{\lambda}_i=\lim_{k\to\infty}\overset{(k+1)}{q}_i-\alpha\ ;\quad i=1,2,\dots,m\ ,\\ \text{где}\quad &\overset{(1)}{T}_i=(\overset{(1)}{P}_i\cdot z_i)\big/(\overset{(1)}{q}_{i-1}-\overset{(1)}{T}_{i-1})\ ;\quad \overset{(1)}{T}_1=0\ ;\ i=2,3,\dots,m;\ k=1,2,\dots \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Метод требует, как видно, $(m-1)$ – делений, $(m-1)$ – умножений, m – сложений и m – вычитаний на каждой итерации, а также не накладывает никаких условий на элементы исходной матрицы $\mathfrak{C}_3(1)$.
Последовательности

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(k)}{G}_{j-1}=1-\overset{(k)}{\gamma}_{j+1}\cdot\overset{(k)}{G}{}_j^{-1}\ ;\quad \overset{(k)}{G}_m=\overset{(k)}{G}_{m-1}=1\ ,\ j=m-1,\dots,1\\ &\overset{(k)}{S}_{j-1}=\overset{(k)}{\gamma}_j\big/(1-\overset{(k)}{S}_j)\ ;\quad \overset{(k)}{S}_m=0\ ;\ j=m,\dots,2\\ &\overset{(k)}{F}_{j-1}=(\overset{(k)}{P}_j\cdot z_j)\big/(\overset{(k)}{q}_j-\overset{(k)}{F}_j)\ ;\quad \overset{(k)}{F}_m=0,\ j=m,\dots,2\\ &\overset{(k)}{\tilde{L}}_{j-1}=\overset{(k)}{q}_{j-1}-(\overset{(k)}{P}_j\cdot z_j)\big/\overset{(k)}{\tilde{L}}_j\ ;\quad \overset{(k)}{\tilde{L}}_m=\overset{(k)}{q}_m,\ j=m,\dots,2 \end{aligned}\right\}, \tag{19}$$

а также комбинация последовательностей $\{\overset{(k)}{F}_j\}$ и $\{\overset{(k)}{\tilde{L}}_j\}$ послужили итерационной основой следующих пяти из построенных в теореме 2.I.5 алгоритмов вычисления $\sigma(\mathfrak{C}_3)$. При этом одним из лучших в группе из этих пяти методов является

$T_G\alpha$ **– метод**

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(k+1)}{q}_j=(\overset{(k)}{q}_j-\overset{(k)}{F}_j)+\overset{(k)}{F}_{j-1}\ ;\quad \overset{(k)}{F}_0=0\ ,\ j=m,\dots,1\\ &\overset{(k+1)}{F}_{j-1}=[(\overset{(k)}{q}_{j-1}-\overset{(k)}{F}_{j-1})\overset{(k)}{F}_{j-1}]\big/(\overset{(k+1)}{q}_j-\overset{(k+1)}{F}_j)\ ;\quad \overset{(k+1)}{F}_m=0\ ,\ j=m,\dots,2\\ &\tilde{\lambda}_j=\lim_{k\to\infty}\overset{(k+1)}{q}_j-\alpha\ ;\quad j=m,\dots,1\ , \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

где

$$\overset{(1)}{F}_{j-1}=(\overset{(1)}{P}_j\cdot z_j)\big/(\overset{(1)}{q}_j-\overset{(1)}{F}_j)\ ;\quad \overset{(1)}{F}_m=0\ ;\ j=m,\dots,2\ ;\ k=1,2,\dots\ , \tag{21}$$

в которых также требуется $(m-1)$ – делений, $(m-1)$ – умножений, m – сложений и m – вычитаний на каждой итерации и не накладывается никаких ограничений на элементы исходной матрицы $\mathfrak{C}_3(1)$. Наконец, последние два из полученных в теореме 2.I.5 алгоритмов основаны на использовании последовательностей $\overset{(k)}{B}_{ii}$ (9), в которых одновременно учитываются свойства ведущих угловых миноров обоих типов, в частности, полученное в лемме 2.I.I0 необходимое и достаточное условие вырожденности матриц $\overset{(k)}{\mathfrak{C}}$

$$\overset{(k)}{\tilde{L}}_1=0\ ;\quad \overset{(k)}{\tilde{L}}_i+\overset{(k)}{L}_i=\overset{(k)}{q}_i\ ;\quad 2\le i\le m-1\ ;\ \overset{(k)}{L}_m=0\ . \tag{22}$$

Обеспечению корректности вычислительных процедур построенных алгоритмов в этой теореме служат также результаты Лемм 2.I.6 и 2.I.8, 2.I.9. Вопросы же их устойчивости к ошибкам округлений на ЭВМ и априорной оценки точности получаемых приближенных значений рассмотрены в §3.I диссертации. В теореме 2.I.6 собраны аналогичные результаты для второй из указанных на стр. 4 автореферата стратегии ускорения.

В §2.2 предложены на основе известных стратегий ускорения, приведенных на стр. 4 автореферата, новые универсальные эффективные способы выбора ускоряющих $\overset{(\kappa)}{W}$ - коэффициентов (сдвигов), а также рассмотрена проблема оптимального выбора α -начальных сдвигов для множества алгоритмов §2.I определения спектра $\mathbb{C}_3(1)$ -матриц общего вида. Программная реализация предложенных алгоритмов позволяет не только сохранить исходный вид матриц $\mathbb{C}_3(1)$ в процессе итераций и добиться ускорения сходимости, но и исключить возможность "преобретенных" комплексных значений λ, если спектр $\mathbb{C}_3$ матрицы чисто вещественный. В теореме 2.2.I с учетом следствий 2.2.I и 2.2.2; леммы 2.2.I и следствия 2.2.3 устанавливается, что если в алгоритмах (за исключением $T_\Lambda W\alpha$ - метода) теоремы 2.I.5 (т.е. для первой из указанных стратегий ускорения) выбирать $\overset{(\kappa)}{W}$ - ускоряющие сдвиги в виде

$$\overset{(\kappa+1)}{W_j} = \overset{(\kappa)}{q_j} - \overset{(\kappa)}{P_j}\cdot z_j \Big/ \overset{(\kappa)}{q_{j-1}} \ ; \ j=m,\dots,2 \ ; \ \kappa=1,2,\dots \tag{23}$$

а в $T_\Lambda W\alpha$ - методе в виде

$$\overset{(\kappa+1)}{W_j} = \overset{(\kappa+1)}{q_j} - (\overset{(\kappa)}{q_j} - \overset{(\kappa)}{W_j} - \overset{(\kappa)}{T_j})\overset{(\kappa)}{T_j}\cdot \overset{(\kappa+1)}{q_{j-1}}{}^{-1} \ ; \ \overset{(1)}{W_j} = 0, \ j=m,\dots,2; \ \kappa=1,2,\dots, \tag{23'}$$

то эти алгоритмы имеют кубическое ускорение сходимости.
Если же в алгоритмах (за исключением $T_G W\alpha$ -метода) теоремы 2.I.6 (т.е. для второй из указанных стратегий) выбирать $\overset{(\kappa)}{\widetilde{W}}$ в виде

$$\overset{(\kappa+1)}{\widetilde{W}_j} = \overset{(\kappa)}{q_{j-1}} - \overset{(\kappa)}{P_j}\cdot z_j \Big/ \overset{(\kappa)}{q_j} \ ; \ j=2,3,\dots,m \ ; \ \kappa=1,2,\dots \tag{24}$$

а в $T_G W\alpha$ - методе в виде

$$\overset{(\kappa+1)}{\widetilde{W}_j} = \overset{(\kappa+1)}{q_{j-1}} - (\overset{(\kappa)}{q_{j-1}} - \overset{(\kappa)}{\widetilde{W}_j} - \overset{(\kappa)}{F_{j-1}})\overset{(\kappa)}{F_{j-1}}\cdot \overset{(\kappa+1)}{q_j}{}^{-1} ; \ \overset{(1)}{\widetilde{W}_j} = 0, \ j=2,3,\dots,m; \ \kappa=1,2,\dots, \tag{24'}$$

то эти алгоритмы имеют квадратическое ускорение сходимости.
Параграф §2.3 посвящен методам вычисления собственных (корневых) векторов трехдиагональных $\mathbb{C}_3(1)$ - матриц общего вида произвольной структуры. В теореме 2.3.I получены методы отыскания собственных векторов при заданных собственных значениях $\mathbb{C}_3$ матриц общего вида, у которых все внедиагональные элементы отличны от нуля. Из множества полученных здесь алгебраических представлений для собственных векторов $(u(\lambda) = \{u_i(\lambda)\}_{i=1}^m$, где $u(\lambda) = \|u'(\lambda)\|\cdot u'(\lambda))$, для приложений рекомендованы наиболее эффективные рекуррентные процессы:

1°. Рекуррентный метод, основанный на нижних ведущих угловых минорах.

2°. Рекуррентный метод, основанный на верхних ведущих угловых минорах.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Если } u'_{i-1}(\lambda)\neq 0 \text{ и } 0<|\widetilde{L}_i(\lambda)|<\infty, \\ \text{то } -(P_i/\widetilde{L}_i(\lambda))\cdot u'_{i-1}(\lambda). \\ \text{Если } u'_{i-1}(\lambda)=0 \text{ либо } \widetilde{L}_i(\lambda)=0, \\ \text{то } -(P_{i-1}/z_i)\cdot u'_{i-2}(\lambda). \\ \text{Если } \widetilde{L}_i(\lambda)=\infty, \text{ то } 0, \\ \text{где } u'_1(\lambda)=1, \ i=2,3,\dots,m; \end{array}\right\} = u'_i(\lambda) = \left\{\begin{array}{l} \text{Если } u'_{i+1}(\lambda)\neq 0 \text{ и } 0<|L_i(\lambda)|<\infty, \\ \text{то } -(z_{i+1}/L_i(\lambda))\cdot u'_{i+1}(\lambda). \\ \text{Если } u'_{i+1}(\lambda)=0 \text{ либо } L_i(\lambda)=0, \\ \text{то } -(z_{i+2}/P_{i+1})\cdot u'_{i+2}(\lambda). \\ \text{Если } L_i(\lambda)=\infty, \text{ то } 0, \\ \text{где } u'_m(\lambda)=1, \ i=m-1,\dots,1. \end{array}\right. \tag{25}$$

Здесь:

$$\left.\begin{array}{l} \widetilde{L}_{i-1}(\lambda) = q_{i-1}(\lambda) - P_i z_i / \widetilde{L}_i(\lambda); \ \widetilde{L}_m(\lambda) = q_m(\lambda), \ i=m,\dots,2 \\ L_i(\lambda) = q_i(\lambda) - P_i z_i / L_{i-1}(\lambda); \ L_1(\lambda) = q_1(\lambda), \ i=2,\dots,m \\ \{q_n(\lambda) = (q_n - \lambda)\}_{n=1}^m \end{array}\right\} \tag{26}$$

В следствии 2.3.3 из теоремы 2.3.I дается метод вычисления $u(\lambda)$ для таких матриц и при наличии у них комплексных собственных значений. Поскольку наличие нулевых внедиагональных элементов у $\mathbb{C}_3(1)$ существенным образом влияет на структуру ее пространства собственных векторов, то в комбинаторной теореме 2.3.2 этого параграфа, доказательство которой опирается на разбиение исходной матрицы на несвязанные трехдиагональные подматрицы и связанные блоки, получен обобщенный метод вычисления собственных (корневых) векторов таких вещественных $\mathbb{C}_3$ - матриц общего вида произвольной структуры.

В §2.4 рассмотрены [38] способы выбора ускоряющих сдвигов (как обобщение приведенных выше методов для $\mathbb{C}_3$ - матриц) при поиске $\sigma(\lambda)$ - спектров $\mathbb{C}_5$ - пяти и $\mathbb{C}_7$ - семидиагональных матриц общего вида, а также (см. теорему 2.4.3) методы вычисления их кратких и комплексных значений λ на основе модифицированного LR -метода. При этом предлагаемые методы сохраняют как вещественность, так и ленточный вид исходных $\mathbb{C}_5$ и $\mathbb{C}_7$ матриц и в процессе итераций. В §2.5 выполнено формальное обобщение некоторых из построенных в §2.I методов определения спектра $\mathbb{C}_3(1)$ матриц на случай блочно-трехдиагональных матриц $\mathbb{C}(1)$ общего вида, имеющих все различные собственные значения. И, наконец, в теореме 2.6.I последнего §2.6 параграфа второй главы для H -верхней вещественной матрицы Хессенберга общего вида произвольной структуры предложен универсальный[x)] способ

$$\overset{(\kappa)}{W_j} = \begin{cases} 0\,, & \text{если } |\overset{(\kappa)}{a}_{jj-1}| \geq 1 \\ \overset{(\kappa)}{a}_{jj} - \overset{(\kappa)}{a}_{jj-1}\cdot\overset{(\kappa)}{a}_{j-1j}\big/\overset{(\kappa)}{a}_{j-1j-1}\,, & \text{если } |\overset{(\kappa)}{a}_{jj-1}| < \varepsilon_p < 1 \end{cases}$$

x) Подобный способ выбора $\overset{(\kappa)}{W}$ -применим и для комплексных H -матриц. Использование же его в комбинации с перестановками обеспечивает наибольшую эффективность LR -метода по сравнению со всеми другими из известных в настоящее время.

выбора $\overset{(k)}{w}$ – ускоряющих сдвигов, обеспечивающий не хуже, чем квадратическое ускорение сходимости и сохранение вещественности (в соответствующем случае) спектра матрицы H. При этом стратегия выбора α – сдвигов остается прежней. Результаты теоремы 2.6.2 дают эффективный аппарат вычисления комплексных и кратных собственных значений H – матриц при использовании модифицированных LR –методов.

Третья глава содержит результаты, связанные с характеристикой основных вычислительных свойств некоторых из полученных в первых двух главах алгоритмов, с их использованием при решении некоторых задач моделирования и обработки экспериментальных данных в физике высоких энергий, а также с тестовыми расчетами. Здесь дано описание новых эффективных программ на ФОРТРАНе, в которых реализованы полученные в диссертации алгоритмы, и дается сравнение их характеристик с аналогичными характеристиками подобных, из наиболее известных уже, программ. В §3.I получены оценки для количества арифметических операций и вычислительных погрешностей (из-за округлений на ЭВМ) некоторых из основных методов обсуждавшихся в первых двух главах. Здесь получена, в частности, следующая априорная оценка для $\Delta\lambda$ –погрешности (из-за округлений на ЭВМ) собственных значений, вычисляемых на ЭВМ $T_\Lambda W\alpha$ –методам. А именно, $|\Delta\lambda| \lesssim 5\cdot\delta\cdot\alpha$, где δ – относительная погрешность представления чисел в ЭВМ в режиме плавающей запятой и $\alpha = \max\limits_{1\le i\le m} (|p_i|+|q_i|+|r_{i+1}|)$. Исследована здесь и проблема устойчивости к накоплению погрешности из-за округлений на ЭВМ процессов (3), (4), составляющих основу предложенных в диссертации численных алгоритмов. В частности, показано, что оптимальным (как по затратам ресурсов ЭВМ так и с точки зрения устойчивости вычисления) из всех известных, а также из предложенных в диссертации методов вычисления $B=\mathbb{C}^{-1}$ является метод, связанный с правым представлением в (6), т.е. использующий структурные матрицы $\{\hat{C}_3$ и $C_3\}$ (8).

В §3.2 рассматриваются простые, но характерные как для проверки некоторых из полученных, так и известных уже результатов и утверждений, тестовые примеры. В частности, здесь приводится пример I семейства положительно определенных неэрмитовых матриц, для которых итерационный процесс LR – алгоритма без сдвигов (или перестановок) не осуществим. В примере 2 даны блочно-трехдиагональные матрицы, а также задачи, в которых они появляются, элементы-блоки которых удовлетворяют коммутационным условиям §I.I. Приводится здесь и приложение техники основной теоремы I.3.I3 при наличии у $\mathbb{C}(1)$ матриц цепочки циклически вырожденных ведущих угловых подматриц. В §3.3 выполнен краткий анализ особенностей постановки и подходов к решению некоторых задач моделирования и обработки данных в современных экспериментах по физике высоких энергий. Показана эффективность использования развитого в диссертации аппарата блочно-трехдиагональных и им обратных матриц при разработке и практическом использовании математического обеспечения для некоторых из таких экспериментов. В §3.4 приведено описание системы стандартных подпрограмм на ФОРТРАНе для вычисления собственных значений вещественных трех-, пяти-, семидиагональных, хессенберговых, а также произвольных симметрических и общего вида полностью заполненных матриц произвольной структуры. Все подпрограммы реализованы (как и в любом другом из подобных пакетов) в арифметике с двойной точностью и используют разработанные в диссертации алгоритмы. Кроме того, в описанных подпрограммах для анализа характера спектра трехдиагональных подматриц порядка не выше 4, появляющихся на диагонали итерационных матриц $\overset{(k)}{\mathbb{C}}$, использованы необходимые и достаточные условия, полученные в леммах 5,6 из [33]. В этих подпрограммах также начальный α– сдвиг и α – сдвиги для снятия опасности появления нулевых или близких к нулю ведущих угловых миноров в матрицах $\overset{(k)}{\mathbb{C}}$ выбираются следующим образом. Если в соответствующих методах (подпрограммах) появляются равенства $\{(\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1}\simeq 0, \overset{(k)}{L}_i \simeq 0), (\overset{(k)}{G}_{i-1}\simeq 0, \overset{(k)}{\tilde{L}}_i \simeq 0), (\overset{(k)}{\tilde{\tau}}_i \simeq 1, \overset{(k)}{S}_i \simeq 1), (\overset{(k)}{T}_i \simeq \overset{(k)}{q}_i, \overset{(k)}{F}_i \simeq \overset{(k)}{q}_i)\}$ при любых i и k для матриц $\overset{(k)}{\mathbb{C}}$, то при данном k в $\overset{(k)}{\mathbb{C}}$ итерационным образом добавляется единичная матрица до тех пор пока у $\overset{(k)}{\tilde{\mathbb{C}}}$ (при всех i) не окажется отмеченных выше равенств (см. IO с.[32]). В этом параграфе приводится также описание подпрограмм для вычисления собственных (корневых) векторов $\mathbb{C}_3$ – матриц, в которых также реализованы предложенные в диссертации алгоритмы. При вычислении присоединенных векторов в подпрограммах используется информация о геометрической кратности данного собственного значения. Подобная информация сохраняется в соответствующих подпрограммах на основе результатов рассмотренных во второй главе диссертации. В большинстве из описываемых здесь подпрограмм не требуется дополнительной памяти ЭВМ, кроме массивов для хранения исходных матриц, а время счета более чем в два раза меньше, чем у аналогичных программ, например, из пакета *EISPACK* .

В заключении к диссертации формулируются результаты представленных исследований.

Ш. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

I^o. Изучены (на основе предложенного обобщенного варианта мультипликативных представлений ведущих угловых миноров) структурные свойства и построены различные представления ($B=\mathbb{C}^{-1}$) –матриц обратных к трехдиагональным, а также получены их обобщения на некоторое подмножество блочно-трехдиагональных матриц, элементы-блоки которых удовлетворяют определенным коммутационным соотношениям.

2°. Построены и систематизированы множества представлений различных (в том числе нетрадиционного) типов для произвольных вещественных блочно-трехдиагональных, им обратных и блочно-факторизованных из некоторого класса матриц, а также для их ведущих блочно-угловых миноров и определителей. При этом соответствующие угловые подматрицы могут быть как невырожденными, так и вырожденными.

3°. Получены достаточные условия вырожденности блочно-трехдиагональных матриц общего вида, обобщающие известные аналогичные условия для произвольных трехдиагональных матриц, а также необходимые и достаточные условия вырожденности произвольных трехдиагональных матриц, все ведущие угловые миноры которых (порядка менее m) отличны от нуля.

4°. Выполнен анализ вычислительных свойств некоторых из полученных алгоритмов, индуцированных различными представлениями изучаемых матриц, позволяющий осуществить выбор для использования в приложениях наиболее эффективных из этих алгоритмов. В частности, решена проблема оптимального выбора численных алгоритмов решения известных задач моделирования и обработки экспериментальных данных в некоторых из современных экспериментов по физике высоких энергий.

5°. Предложены эффективные способы вычисления $\overset{(\kappa)}{W}$ -ускоряющих и α -начальных сдвигов при нахождении $\sigma(\lambda)$ - спектра вещественных трех-, пяти-, семидиагональных, хессенберговых и произвольных квадратных матриц общего вида произвольной структуры, сохраняющие и в процессе итераций вещественность этих матриц, а также начальную ширину ленты для указанных из них.

6°. Получены эффективные методы вычисления $\sigma(\lambda)$ -спектра и $u(\lambda)$ - собственных (корневых) векторов вещественных трехдиагональных матриц общего вида произвольной структуры. Методы получены путем модификаций $LR(RL)$ - алгоритмов с использованием предложенных обобщенных мультипликативных представлений ведущих угловых миноров матриц $\mathcal{C}_3$ и представлений им обратных матриц ($B = \mathcal{C}_3^{-1}$), а также новых способов выбора $\overset{(\kappa)}{W}$ - ускоряющих и α - начальных сдвигов.

7°. Создана (на основе разработанных численных алгоритмов) на ЭВМ серии ЕС на ФОРТРАНе система эффективных стандартных программ для вычисления $\sigma(\lambda)$ - спектра вещественных пяти-, семидиагональных, а также общего вида трехдиагональных, хессенберговых и квадратных матриц произвольной структуры. Созданы также эффективные программы вычисления собственных (корневых) векторов указанных трехдиагональных

матриц. В сравнении с подобными программами из известных пакетов (например, EISPACK), лучшие из созданных программ характеризуются следующими основными показателями:

а) Время вычисления всех собственных значений с использованием новых подпрограмм в среднем более чем в 2 раза меньше.

б) Для сравнения полных затрат времени на вычисления имеет место соотношение

$$(\hat{t}_{\lambda,u(\lambda)}/t_{\lambda,u(\lambda)}) = \kappa \simeq 1 + m/8 \quad ,$$ где

$t_{\lambda,u(\lambda)}$, $\hat{t}_{\lambda,u(\lambda)}$ - полное время вычисления всех собственных значений и собственных векторов $\mathcal{C}_3(1)$ матриц в новых и соответственно в $QL(QR)$ - алгоритмах.

в) среднее число итераций на одно собственное значение в новых подпрограммах не превосходит 4.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Г.А.Емельяненко. О свойствах систем линейных уравнений с неособенными трехдиагональными, ленточными и квазитрехдиагональными матрицами (вычисление главных угловых миноров трехдиагональных матриц). Препринт ОИЯИ, Р11-86-531, Дубна, 1986.
2. Г.А.Емельяненко. О свойствах систем... (свойства матриц, обратных к трехдиагональным). Препринт ОИЯИ, Р11-85-304, Дубна, 1985.
3. Г.А.Емельяненко. Методы обращения квазитрехдиагональных и ленточных матриц. Препринт ОИЯИ, Р11-693, Дубна, 1973.
4. Бухбергер Б., Емельяненко Г.А. Методы обращения трехдиагональных матриц. Препринт ОИЯИ, Р11-5686, Дубна, 1971; ЖВМиМФ. Т. 13, №3, 1973; Math. Rev. 48, N2, 1974, p.382.
5. Emelyanenko G.A. On the methods of calculation with spars matrices. JINR,E11-83-71,Dubna,1983;Cahiers Math.Montpellier,1983.
6. Г.А.Емельяненко. О свойствах системы... (Компактные устойчивые схемы обращения трехдиагональных матриц). Препринт ОИЯИ, Р11-85-488, Дубна, 1985.
7. Г.А.Емельяненко. О свойствах систем линейных уравнений с неособенными трехдиагональными, ленточными и квазитрехдиагональными матрицами. Препринт ОИЯИ, Р11-85-489, Дубна, 1985.
8. Г.А.Емельяненко. Методы вычисления спектра и основных алгебраических характеристик трех-, пяти-, семи-диагональных, ленточных, блочно-трехдиагональных, хессенберговых и некоторых факторизованных матриц. Труды II Всесоюзной конференции "Вычислительная физика и математическое моделирование", Волгоград, 1989 г.

9. Ю.А.Будагов, Г.А.Емельяненко, В.Г.Одинцов, А.И.Мачавариани. О некоторых вопросах эффективной оценки кинематических параметров заряженных частиц с учетом множественных случайных факторов в экспериментах по физике высоких энергий. ОИЯИ, Р10-9950, Дубна, 1976.
10. Бережнев С.Ф., Емельяненко Г.А., Займидорога О.А. Метод моделирования многократного кулоновского рассеяния при прохождении заряженных частиц через систему рассеивающих сред с учетом энергетических потерь. ОИЯИ, Р10-8167, Дубна, 1974.
11. Г.А.Емельяненко. Труды международного симпозиума по вопросам автоматизации обработки данных с пузырьковых и искровых камер. Д10-6142, Дубна, 1971 г.
12. Емельяненко Г.А., Одинцов В.Г. ОИЯИ, Р10-11127, Дубна, 1977.
13. Гасанбеков Р.М., Емельяненко Г.А., Одинцов В.Г. Получение параметров прямолинейных треков с учетом факторизованного представления информационных матриц. ОИЯИ, Р10-12712, Дубна, 1979.
14. Емельяненко Г.А., Одинцов В.Г. Труды IУ конференции молодых ученых Ереванского физического института, Нор-Амберд, 25-27 сентября, 1979 г.
15. T.I.Kopaleishvili,A.I.Machavariani,G.A.Emelyanenko.JINR,E4-9951, Dubna,1976,Phys.Lett.,B71 (1977);
Abstract volum.Proc.Seventh.Inter.Conf.on high-energy physics and nuclear structure. Zurich,1977,p.83,JINR, E4-10943,Dubna, 1977, Nucl.Phys.,A302 (1978) 423.
16. П.Г.Акишин, Г.А.Емельяненко, А.А.Карпов, В.И.Кочкин, Г.А.Ососков. Вопросы моделирования некоторых ядерно-физических процессов. В кн.: Статистическое моделирование в математической физике. Сб. научн. работ. Под ред. Г.И.Марчука. Новосибирск, 1976, с. 143--152.
17. Емельяненко Г.А., Одинцов В.Г., Рахмонов Т.Т. Использование факторизованных представлений блочно-трехдиагональных и им обратных матриц при создании математического обеспечения для анализа информации, регистрируемой спектрами частиц высоких энергий. ОИЯИ, Р10-89-682, Дубна, 1989.
18. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Свойства матриц, обратных к квазитрехдиагональным. Препринт ОИЯИ, Р11-86-504, Дубна, 1986.
19. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Факторизации и свойства квазитрехдиагональных (им обратных) матриц с квадратными блоками. Препринт ОИЯИ, Р11-87-524, Дубна, 1987.
20. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Свойства квазитрехвекторных факторизаций квазитрехдиагональных (им обратных) матриц с прямоугольными блоками. Препринт ОИЯИ. Р11-87-533. Дубна, 1987.
21. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. О множествах представлений (их свойствах) квазитрехдиагональных (им обратных) матриц. Препринт ОИЯИ, Р11-87-623, Дубна, 1987.
22. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. О множестве факторизованных представлений квазитрехдиагональных матриц со всеми отличными от нуля (а также некоторыми обращающимися в нуль) главными блочными угловыми минорами. Препринт ОИЯИ. Р11-88-598. Дубна, 1988.
23. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. О факторизациях квазитрехдиагональных матриц с одновременным учетом информации о верхних и нижних главных блочных угловых минорах. Препринт ОИЯИ, Р11-88--599, Дубна, 1988.
24. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. О естественно-элементарных факторизациях квазитрехдиагональных матриц с обращающимися в нуль главными блочными угловыми минорами. Препринт ОИЯИ, Р11-88-786, Дубна, 1988.
25. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Факторизации квазитрехдиагональных матриц при одновременном обращении в нуль некоторых из их ведущих верхних и нижних блочных угловых миноров. Препринт ОИЯИ. Р11-88-922, Дубна, 1988.
26. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. О полной факторизации невырожденных квазитрехдиагональных (и им обратных) матриц в случае обращения в нуль одного или (одновременно) двух главных блочных угловых миноров. Препринт ОИЯИ, Р11-89-203, Дубна, 1989.
27. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. О полных естественных факторизациях произвольных (блочно) трехдиагональных матриц и методах вычисления ведущих (блочно)угловых миноров (без ограничения на их поведение) и определителя таких матриц, а также (блочно) факторизованных матриц из некоторого класса. Препринт ОИЯИ, Р11-89--340, Дубна, 1989.
28. Емельяненко Г.А., Им Ён Сек. О компактных модификациях метода Бауэра для нахождения собственных значений трехдиагональных матриц. Препринт ОИЯИ, Р11-88-451, Дубна 1988. (РЖМ, 1989, 3Г23).
29. Емельяненко Г.А., Им Ён Сек. Стратегия смещений и множества корректных методов вычисления собственных значений трехдиагональных матриц общего вида. Препринт ОИЯИ, Р11-88-452, Дубна 1988, (РЖМ, 1989, 2Г30).
30. Емельяненко Г.А., Им Ён Сек. О множествах корректных ускоренных методов вычисления полного спектра трехдиагональных матриц общего вида. Препринт ОИЯИ, Р11-88-453, Дубна 1988, (РЖМ, 1989,4Г36).

31. Емельяненко Г.А., Им Ён Сек. О методах нахождения собственных векторов вещественных трехдиагональных матриц. Препринт ОИЯИ, Р11-88-736, Дубна, 1988 (РЖМ, 1989, 5Г27).
32. Емельяненко Г.А., Им Ён Сек. О системах программ на ФОРТРАНе ЭВМ ЕС-1061(60) для вычисления всех корневых векторов любых вещественных трехдиагональных матриц, а также полного спектра таких матриц простой структуры. Препринт ОИЯИ, Р11-88-787, Дубна 1988.
33. Емельяненко Г.А., Им Ён Сек. Методы вычисления полного спектра вещественных трехдиагональных матриц общего вида произвольной структуры. Препринт ОИЯИ, Р11-88-920, Дубна 1988 (РЖМ, 1989, 8Г19).
34. Емельяненко Г.А., Им Ён Сек. О системе программ на ФОРТРАНе ЭВМ ЕС-1061(60) для вычисления собственных значений и корневых векторов вещественных трехдиагональных матриц общего вида произвольной структуры. Препринт ОИЯИ, Р11-88-921, Дубна 1988.
35. Емельяненко Г.А., Им Ён Сек. О методах поиска всех собственных значений блочно-трехдиагональных, а также пяти и семи-диагональных матриц. Препринт ОИЯИ, Р11-89-543, Дубна, 1989.
36. Емельяненко Г.А., Им Ён Сек. Краткий обзор, анализ проблем и систематизация методов нахождения собственных значений и собственных векторов трех, пяти, семи-диагональных и Хессенберговых матриц. Деп. публ. ОИЯИ Дубна, 1989. №Б1-11-89-574.- с. 1-24.
37. Емельяненко Г.А., Им Ён Сек. Об эффективных методах и стандартных программах на ФОРТРАНе ЭВМ ЕС-1061(60) для вычисления всех собственных значений пяти и семидиагональных матриц, а также матриц Хессенберга. Препринт ОИЯИ, Р11-89-544, Дубна, 1989.
38. Емельяненко Г.А., Им Ён Сек. О методах поиска всех собственных значений блочно-трехдиагональных, а также пяти- и семидиагональных матриц. Препринт ОИЯИ, Р11-89-543, Дубна, 1989.
39. Г.А.Емельяненко, Им Ён Сек, А.И.Салтыков. Описание системы новых программ на ФОРТРАНе для вычисления собственных значений и собственных векторов матриц. ОИЯИ Р11-90-302, Дубна, 1990.
40. Г.А.Емельяненко. Труды Совещания по программированию и математическим методам решения физических задач, Д10-7707. Дубна, 1973 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 января 1992 года.