СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

11 - 9180

В.С.Бондаренко

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

1975

11 - 9180

В.С.Бондаренко

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

При расчете полей возбуждения неоднородной идеально проводящей структуры движущимся сгустком электронов /I/ решалась следующая краевая задача: в области Ω (рис.I) дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} = -\dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \xi} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rw)}{\partial r}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \xi} = -\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial r}, \quad \xi \in [0,T], \ \xi = ct. \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

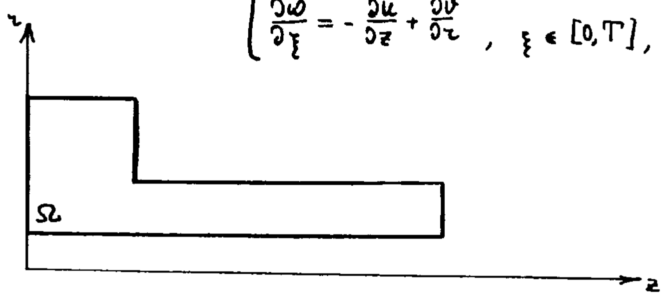

Рис.I

Заданы начальные и граничные условия. Счет ведется по схеме Лакса /2/ с пересчетом по явному кресту в узлах разностной сетки $\bar{\Omega} = \{r_i, z_j\}$ /I/.
Пусть $u^n_{kl} = u(r_k, z_l, \tau n)$; $v^n_{kl} = v(r_k, z_l, \tau n)$; $w^n_{kl} = w(r_k, z_l, \tau n)$,
τ – шаг по времени.

Введем обозначения: $y^n_{ke} = (u^n_{ke}, v^n_{ke}, w^n_{ke})$ и $y^n = \{y^n_{ke}\}$.

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство последовательностей векторов: $y = \{y_{ke}\}_{(z_k, z_e) \in \bar{\Omega}}$, удовлетворяющих граничным условиям /I/.

Норма в $\mathcal{H}$ дается соотношением

$$\| y \|^2 = \sum_{k,e:\,(z_k, z_e) \in \bar{\Omega}} |y_{ke}|^2, \tag{2}$$

$$|y_{ke}|^2 = u_{ke}^2 + v_{ke}^2 + w_{ke}^2 .$$

Разностная краевая задача может быть записана в операторном виде:

$$y^{n+1} = L y^n, \qquad y^0 \in \mathcal{H} . \tag{3}$$

Задача (3) называется устойчивой, если существует постоянная $C > 0$, не зависящая от h, такая, что

$$\|y^n\| \le C \|y^0\| \quad , \quad \forall y_0 \in \mathcal{H} \text{ и } n\tau \le T.$$

В свою очередь, оператор L можно представить в виде:

$$L = G + \tau Q \quad \text{, где}$$

Q -явный разностный оператор перехода от слоя к слою с ограниченными коэффициентами, аппроксимирующий член $\frac{\omega}{\tau}$, а G -оператор с постоянными коэффициентами.

Известно, /2/ что если семейство операторов $\{Q\}$ ограничено и краевая задача:

$$y^{n+1} = G y^n , \quad y^0 \in \mathcal{H}, \tag{4}$$

устойчива, то задача (3) также устойчива.

Тогда для доказательства устойчивости задачи (3) достаточно доказать устойчивость (4). Чтобы доказать устойчивость (4), исследуем устойчивость задачи Коши:

$$\begin{aligned}
u^{n+1}_{ij} = {} & \left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right) u^n_{ij} + \frac{\alpha^2}{4} u^n_{ij+1} + \frac{\alpha^2}{8} u^n_{i+1j+1} - \frac{\alpha^2}{4} u^n_{i+1j} + \frac{\alpha^2}{4} u^n_{ij-1} + \\
& + \frac{\alpha^2}{8} u^n_{i+1j-1} + \frac{\alpha^2}{8} u^n_{i-1j+1} - \frac{\alpha^2}{4} u^n_{i-1j} + \frac{\alpha^2}{8} u^n_{i-1j-1} - \frac{\alpha^2}{8} v^n_{i+1j+1} + \\
& + \frac{\alpha^2}{8} v^n_{i+1j-1} + \frac{\alpha^2}{8} v^n_{i-1j+1} - \frac{\alpha^2}{8} v^n_{i-1j-1} - \frac{\alpha}{4} w^n_{ij+1} - \frac{\alpha}{8} w^n_{i+1j+1} + \frac{\alpha}{4} w^n_{ij-1} + \\
& + \frac{\alpha}{8} w^n_{i+1j-1} - \frac{\alpha}{8} w^n_{i-1j+1} + \frac{\alpha}{8} w^n_{i-1j-1} ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v^{n+1}_{ij} = {} & -\frac{\alpha^2}{8} u^n_{i+1j+1} + \frac{\alpha^2}{8} u^n_{i+1j-1} - \frac{\alpha^2}{8} u^n_{i-1j-1} + \frac{\alpha^2}{8} u^n_{i-1j+1} + \left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right) v^n_{ij} + \\
& + \frac{\alpha^2}{4} v^n_{i+1j} + \frac{\alpha^2}{8} v^n_{i+1j+1} - \frac{\alpha^2}{4} v^n_{ij+1} + \frac{\alpha^2}{8} v^n_{i+1j-1} - \frac{\alpha^2}{4} v^n_{ij-1} + \frac{\alpha^2}{4} v^n_{i-1j} + \\
& + \frac{\alpha^2}{8} v^n_{i-1j+1} + \frac{\alpha^2}{8} v^n_{i-1j-1} + \frac{\alpha}{4} w^n_{i+1j} + \frac{\alpha}{8} w^n_{i+1j+1} + \frac{\alpha}{8} w^n_{i+1j-1} - \frac{\alpha}{4} w^n_{i-1j} - \\
& - \frac{\alpha}{8} w^n_{i-1j+1} - \frac{\alpha}{8} w^n_{i-1j-1} ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w^{n+1}_{ij} = {} & -\frac{\alpha}{4} u^n_{ij+1} - \frac{\alpha}{8} u^n_{i+1j+1} + \frac{\alpha}{4} u^n_{ij-1} + \frac{\alpha}{8} u^n_{i+1j-1} - \frac{\alpha}{8} u^n_{i-1j+1} + \frac{\alpha}{8} u^n_{i-1j-1} + \\
& + \frac{\alpha}{4} v^n_{i+1j} + \frac{\alpha}{8} v^n_{i+1j+1} - \frac{\alpha}{4} v^n_{i-1j} - \frac{\alpha}{8} v^n_{i-1j+1} + \frac{\alpha}{8} v^n_{i+1j-1} - \frac{\alpha}{8} v^n_{i-1j-1} + \\
& + (1-\alpha^2) w^n_{ij} + \frac{\alpha^2}{4} w^n_{i+1j+1} + \frac{\alpha^2}{4} w^n_{i-1j+1} + \frac{\alpha^2}{4} w^n_{i-1j-1} + \frac{\alpha^2}{4} w^n_{i+1j-1} .
\end{aligned}$$

$$u^0,\ v^0,\ w^0 \in l_2 \ , \quad \alpha = \frac{\tau}{h} \ , \quad h \text{ – шаг сетки } \bar{\Omega} \text{ по } z \text{ и } z \ , \tag{5}$$

$$-\infty < i,j < \infty .$$

Обозначим через $y = \{y_{ke}\}$ бесконечную последовательность векторов из l_2 : $\|y\|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |y_{ke}|^2$.

Тогда разностная задача Коши называется устойчивой, если существует постоянная $C > 0$, такая, что для любого $n \ge 0$ и любого $y^0 \in l_2$ выполняется неравенство

$$\|y^n\| \le C \|y^0\| .$$

После преобразования Фурье

$$f^n(\varphi,\psi) = \sum_{k,\ell=-\infty}^{\infty} y^n_{k\ell}\, e^{ik\varphi+i\ell\psi}, \quad (\varphi,\psi)\in[0,2\pi],$$

задача (5) запишется в виде

$$f^{n+1}(\varphi,\psi) = M(\varphi,\psi)\cdot f^n(\varphi,\psi), \qquad (6)$$

$$f^0 \in L_2, \text{ где}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1-2\alpha^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\psi}{2} & \frac{\alpha^2}{2}\sin\varphi\cdot\sin\psi & \alpha i\sin\psi\cos^2\frac{\varphi}{2} \\ \frac{\alpha^2}{2}\sin\varphi\cdot\sin\psi & 1-2\alpha^2\cos^2\frac{\psi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2} & -\alpha i\sin\varphi\cos^2\frac{\psi}{2} \\ \alpha i\sin\psi\cos^2\frac{\varphi}{2} & -\alpha i\sin\varphi\cos^2\frac{\psi}{2} & 1-2\alpha^2(\cos^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\psi}{2}+\cos^2\frac{\psi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix}.$$

Доказательство устойчивости задачи (6) эквивалентно доказательству равномерной по n ограниченности норм степеней матрицы M. Чтобы нормы степеней были ограничены, необходимо, чтобы собственные значения λ_i матрицы M были по модулю ≤ 1. Найдем λ_i, $i=1,2,3$.

Для простоты записи введем обозначения:

$$t^2 = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\psi}{2}; \quad \rho = \sqrt{2}\,\alpha\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}; \quad \beta = \sqrt{2}\,\alpha\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}; \qquad (7)$$

$$\alpha = \rho^2+\beta^2.$$

Тогда

$$M = \begin{pmatrix} 1-\beta^2 & \rho\beta & i\beta t \\ \rho\beta & 1-\rho^2 & -i\rho t \\ i\beta t & -i\rho t & 1-\rho^2-\beta^2 \end{pmatrix} \quad \text{и}$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3+\lambda^2(3-2\alpha)-\lambda(\alpha^2+(t^2-4)\alpha+3)+\alpha^2+(t^2-2)\alpha+1.$$

Откуда $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 1-(\rho^2+\beta^2)+ti\sqrt{\rho^2+\beta^2}$; $\lambda_3 = 1-(\rho^2+\beta^2)-ti\sqrt{\rho^2+\beta^2}$.

Покажем, что при $\alpha\leq 1$ $|\lambda_i|\leq 1$, i = I,2,3, для всех

$$0\leq\varphi,\psi\leq 2\pi.$$

Имеем: $|\lambda_1|=1$; $|\lambda_{2,3}|^2 = |\lambda|^2 = [1-(\rho^2+\beta^2)]^2+t^2(\rho^2+\beta^2)$. (8)

Обозначим: $\rho^2+\beta^2 = \alpha^2 a$, тогда

$$a = 2\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\psi}{2}+\cos^2\frac{\psi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\geq 0, \qquad (9)$$

$$t^2 a = \cos^4\frac{\varphi}{2}\sin^2\psi+\cos^4\frac{\psi}{2}\sin^2\varphi < 2. \qquad (10)$$

Из (7) видно, что $t^2\leq 2$ (II). Тогда из (9), (I0), (II) следует, что $a\leq 1$. Рассмотрим $t^2+a = 2\left(1-\sin^2\frac{\psi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\leq 2$. (I2)

Вернемся к (8):

$$|\lambda|^2 = 1-\alpha^2 a\left(2-(t^2+\alpha^2 a)\right).$$

При $\alpha\leq 1$, учитывая (I2), имеем

$t^2+\alpha^2 a\leq 2$, тогда $|\lambda|^2\leq 1$.

Находим собственные вектора матрицы M:

$$\bar{e}_1 = \left(\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+\beta^2}};\ \frac{\beta}{\sqrt{\rho^2+\beta^2}};\ 0\right),$$

$$\bar{e}_2 = \left(\frac{\beta}{\sqrt{\rho^2+\beta^2}};\ -\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+\beta^2}};\ 1\right),$$

$$\bar{e}_3 = \left(\frac{\beta}{\sqrt{\rho^2+\beta^2}};\ -\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+\beta^2}};\ -1\right).$$

Матрица T

$$
\begin{pmatrix}
\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+\beta^2}}; & \frac{\beta}{\sqrt{\rho^2+\beta^2}}; & \frac{\beta}{\sqrt{\rho^2+\beta^2}} \\
\frac{\beta}{\sqrt{\rho^2+\beta^2}}; & -\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+\beta^2}}; & -\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+\beta^2}} \\
0; & 1; & -1
\end{pmatrix}, \quad \det(T)=2\neq 0,
$$

преобразует $\mathcal{M}$ к диагональному виду: $T^{-1}MT=\Lambda$. Элементы матрицы T принадлежат L_2. $M=T\Lambda T^{-1}$; $M^n=T\Lambda^n T^{-1}$. Отсюда $\mathcal{M}^n$ может быть представлена в виде $M^n=$

$$
=\begin{pmatrix}
\frac{\rho^2\lambda_1^n}{\rho^2+\beta^2}+\frac{\beta^2(\lambda_2^n+\lambda_3^n)}{2(\rho^2+\beta^2)}; & \frac{\rho\beta\lambda_1^n}{\rho^2+\beta^2}-\frac{\rho\beta(\lambda_2^n+\lambda_3^n)}{2(\rho^2+\beta^2)}; & \frac{\beta(\lambda_2^n-\lambda_3^n)}{2\sqrt{\rho^2+\beta^2}} \\
\frac{\rho\beta\lambda_1^n}{\rho^2+\beta^2}-\frac{\rho\beta(\lambda_2^n+\lambda_3^n)}{2(\rho^2+\beta^2)}; & \frac{\beta^2\lambda_1^n}{\rho^2+\beta^2}+\frac{\rho^2(\lambda_2^n+\lambda_3^n)}{2(\rho^2+\beta^2)}; & -\frac{\rho(\lambda_2^n-\lambda_3^n)}{2\sqrt{\rho^2+\beta^2}} \\
\frac{\beta(\lambda_2^n-\lambda_3^n)}{2\sqrt{\rho^2+\beta^2}}; & -\frac{\rho(\lambda_2^n-\lambda_3^n)}{2\sqrt{\rho^2+\beta^2}}; & \frac{\lambda_2^n+\lambda_3^n}{2}
\end{pmatrix}.
$$

Каждый элемент m_{ij} матрицы M^n имеет вид: $m_{ij}=\sum_1^3 t_k\lambda_k^n$, где $t_k\in L_2$, а $|\lambda_k^n|\le 1$, и, следовательно, нормы степеней матрицы $\mathcal{M}$ равномерно по n ограничены.

Устойчивость задачи Коши (5) доказана.

Устойчивость (3) по граничным условиям исследовалась на модельных задачах /3/.

При счете (I) с $\alpha=1$ в случае больших времен наблюдались явления неустойчивости. Основной счет задачи (I), при котором было получено устойчивое решение, велся с $\alpha=\frac{1}{2}$ (τ = 0,I4; h = 0,28).

В заключение выражаю глубокую благодарность Е.П.Жидкову, Н.С.Бахвалову, С.И.Сердюковой за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

I. Н.С.Бахвалов, В.С.Бондаренко, Е.П.Жидков, С.Б.Рубин, С.И.Сердюкова. ОИЯИ, Р9-8643, Дубна, 1975.

2. Р.Рихтмайер, К.Мортон. Разностные методы решения краевых задач. Мир, стр.67, М.,1972.

3. Н.С.Бахвалов, В.С.Бондаренко, Е.П.Жидков, С.Б.Рубин, С.И.Сердюкова. ОИЯИ, Р11-8981, Дубна, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 сентября 1975 г.