ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

11-91-563

МУМИНОВ
Хикмат Халимович

автореферат

УДК 519.677; 531.314

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СПИНОВЫХ СИСТЕМ

Специальность: 05.13.16 - применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1992

Работа выполнена в Лаборатории Вычислительной Техники и Автоматизации Объединенного Института Ядерных Исследований.

Научные руководители:

Доктор физико-математических наук профессор — МАХАНЬКОВ Владимир Григорьевич

Кандидат физико-математических наук, доцент — АБДУЛЛОЕВ Хабибулло Одинаевич

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук профессор — БАРАШЕНКОВ Владлен Сергеевич

Кандидат физико-математических наук, доцент — САНЮК Валерий Иванович

Ведущая организация: Московский инженерно-физический институт

Защита диссертации состоится "____"_____________ 1992 г. в______ часов на заседании Специализированного совета Д047.01.04 при Лаборатории Вычислительной Техники и Автоматизации Объединеного института ядерных исследований, г.Дубна, Московская область.

Автореферат разослан "____"_______________ 1992 г.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь совета кандидат физико-математических наук — *Ив* — З.М.ИВАНЧЕНКО

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. Математическим аспектам исследования нелинейных явлений в магнетиках в последние годы посвящено значительное число работ. Обычные подходы здесь основаны на феноменологических теориях, рассматривающих магнетик как сплошную среду,и базируются на описании спиновых волн в магнетиках посредством нелинейных дифференциальных уравнений, таких как нелинейное уравнение Шредингера, синус-уравнение Гордона, уравнение Ландау-Лифшица. Локализованные решения этих уравнений описывают магнитные солитоны. Имеющиеся экспериментальные данные содержат указания о том, что эти классические модели не всегда оказываются достаточно точными и не учитывают ряд эффектов (такие как, например, сокращение длины классического спина).

На микроскопическом (квантовом) уровне математическое описание магнетиков основано на спиновых моделях типа Гейзенберговских. Таким образом возникает вопрос о связи между нелинейными явлениями в классических и квантовых моделях, т.е. возникает проблема постулирования достаточно обоснованной математической процедуры перехода от квантовой к соответствующей ей макроскопической модели. Причем процедура эта должна быть достаточно аккуратной, т.е. должна сохранять основные свойства исследуемого объекта. Вместе с тем получающиеся в результате проведения этой процедуры полуклассические модели должны учитывать эффекты, отсутствующие в моделях классического подхода, т.е. описывть более широкий круг нелинейных явлений и таким образом давать больше информации об этих явлениях. Развитию математических методов решения этих проблем и получению макроскопических моделей посвящена первая часть диссертации.

Несмотря на наличие такого мощного инструмента аналитических исследований нелинейных дифференциальных уравнений, как метод обратной задачи рассеяния, достаточно полное исследование многих неинтегрируемых, многомерных и диссипативных систем возможно только благодаря использованию численных методов. Вторая часть диссертации посвящена численному моделированию полученных новых полуклассических моделей, описывающих магнетики со спином S=1.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ. Целью диссертации является математическое моделирование динамики спиновых систем на основе построения, в качестве пробных функций, обобщенных когерентных состояний на группе SU(2S+1), учитывающих размерность пространства спиновых состояний, получения соответствующих уравнений и их численного исследования.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА РАБОТЫ. В качестве метода математического описания квазиклассического поведения квантовых спиновых систем с произвольным спином построены обобщенные когерентные состояния на группе SU(2S+1). Построены гамильтоновы уравнения движения для SU(3) когерентных состояний.

Исследованы квантовые и классические вакуумы модели Гейзенберга. Показано, что для моделей со спином S»1 вакуум легкоплоскостного магнетика является боголюбовским конденсатом магнонов.

Найдены уравнения, описывающие малоамплитудные спиновые волны в магнетиках со спином S=1 как с обменной так и с одноионной типами анизотропий. Подтверждено наличие высокочастотной моды в магнонном спектре S=1 магнетиков.

Построены когерентные состояния в физической, наглядной параметризации в качестве пробных функций для исследования S=1 магнетиков. Получена система уравнений, описывающая спин-квадрупольные волны в магнетике с обменной анизотропией.

Численными и аналитическими методами проведено исследование систем уравнений, описывающих малоамплитудные волны в S=1 легкоосных магнетиках и показано, что как в случае обменной анизотропии, так и в случае одноионной, стационарные нелинейные волны оказываются захваченными SU(2) сечением спинового фазового пространства. В этом смысле SU(2) сечение в спиновом фазовом пространстве является "классическим" аттрактором.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ РАБОТЫ. Построенные в качестве математического метода квазиклассического описания магнетиков обобщенные когерентные состояния на группе SU(2S+1) могут явиться инструментом для дальнейшего исследования широкого класса магнетиков с произвольным спином. Когерентное состояние в действительной параметризации, дающее удобное, физическое описание спин-квадрупольной динамики магнетиков, имеет важное значение в получении квазиклассического описания магнетиков со спином S=1. Обнаруженные дополнительные высокочастотные моды в магнонных спектрах S=1 магнетиков могут представить интерес для физиков-экспериментаторов. Полученные в диссертации системы уравнений, описывающие малоамплитудные волны в легкоосных моделях S=1 магнетиков с обменной и одноионной типами анизотропий, а также система уравнений в действительной параметризации, описывающая как легкоосный, так и легкоплоскостной магнетик с обменной анизотропией, могут быть базой для дальнейших теоретических исследований и численного моделирования. Развитие спинового хаоса вблизи обнаруженного в диссертации численными методами SU(2) аттрактора может явиться одной из причин сокращения длины классического спина.

ПУБЛИКАЦИИ. По материалам диссертации опубликовано 11 работ.

АПРОБАЦИЯ ДИССЕРТАЦИИ. Результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на семинарах в ЛВТА и ЛТФ ОИЯИ, на IV Международном совещании "Солитоны и приложения" (Дубна,1989), на Международных конференциях "Нелинейность и хаос" (Ташкент,1990), "Солитоны и хаос" (Брюссель,1990), "Нелинейные эволюционные уравнения и динамические системы" (Дубна,1990; Галлиполи,1991).

ОБЪЕМ РАБОТЫ. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Общий объем составляет 138 страниц .Диссертация содержит 12 таблиц, 5 рисунков и список литературы (108 наименований).

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обсуждается актуальность проблем, рассмотренных в диссертации, сформулирована цель диссертации. Кратко изложено содержание работы.

Глава I

В §1 исследуется модель ферромагнетика Гейзенберга с обменной анизотропией

$$\hat{H} = -J \sum_j \left(\vec{\hat{S}}_j \vec{\hat{S}}_{j+1} + \delta\, \hat{S}^z_j \hat{S}^z_{j+1} \right) \qquad (1)$$

Показано, что в случае анизотропии типа "легкой оси" ($\delta>0$) как для $S=1/2$, так и для $S=1$ магнетиков, вакууму модели (1) соответствует собственная функция

$$|\,\psi\,> = \prod_j |0>_j \qquad (2)$$

Поскольку квантовая задача для модели (1) с анизотропией типа "легкая плоскость" ($\delta<0$) не является точно решаемой, то в пределе $S\gg1$ использовано преобразование Холштейна-Примакова

$$\hat{S}^+_j=\sqrt{2s}\sqrt{1-\frac{a^+_j a_j}{2s}}\,a_j,\quad \hat{S}^-_j=\sqrt{2s}\,a^+_j\sqrt{1-\frac{a^+_j a_j}{2s}},\quad \hat{S}^z_j=s-a^+_j a_j \qquad (3)$$

для бозонизации спинового гамильтониана (1). В импульсном представлении выделен конденсат в приближении Боголюбова, для чего совершен поворот в пространстве алгебры SU(1,1) (теоретико-групповой аналог U-V преобразования Боголюбова). В результате получен ограниченный снизу дискретный спектр энергии и боголюбовская дисперсия

$$\omega_k=ka_0^2\sqrt{\tfrac{3}{4}k^2-\Delta} \qquad (4)$$

где $\Delta=2\delta/a_0^2$. Таким образом показано, что вакуум легкоплоскостного магнетика Гейзенберга есть боголюбовский конденсат магнонов.

В §2 в качестве метода математического описания квазиклассического поведения магнетиков с произвольным спином S, построена матрица обобщенных спиновых когерентных состояний (ОСКС) в фундаментальном представлении группы SU(2S+1)

$$|\,\psi\,> = exp\left\{ \sum_i^{2s} \left[\zeta_i \hat{T}^+_i - \bar{\zeta}_i \hat{T}^-_i \right] \right\}|0> =$$

$$= \left(1+\sum_i^{2s} |\psi_i|^2\right)^{1/2} \left\{ |0> + \sum_i^{2s} \psi_i |i> \right\}, \qquad (5)$$

где $\hat{T}^+_i$ и $\hat{T}^-_i$-генераторы фундаментального представления группы SU(2S+1), $|0>=(0,\ldots,0,1)^T$, $|i>=(0,\ldots,0,1,\underbrace{0,\ldots,0}_{i})^T$.

Эти когерентные состояния соответствуют точкам проективного пространства $\mathbb{C}P^2=SU(2S+1)/SU(2S)\otimes U(1)$.

Квантовая система со спином S=1 в фундаментальном представлении описывается SU(3) когерентными состояниями

$$|\,\zeta\,> = (1+|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2)^{-1/2} \left\{ |0> + \zeta_1|1> + \zeta_2|2> \right\} \qquad (6)$$

и живет в четырехмерном пространстве спиновых состояний, а SU(2) ОСКС

$$|\,\psi\,> = \frac{1}{1+|\psi|^2} \left\{ |0> + \sqrt{2}\psi|1> + \psi^2|2> \right\} \qquad (7)$$

описывают поведение системы в SU(2) сечении этого пространства

$$\zeta_1=\sqrt{2}\psi,\qquad \zeta_2=\zeta_1^2/2\ . \qquad (8)$$

Показано, что SU(3) КС учитывают эффект "сокращения длины" классического спина

$$s^2+q^2=1, \qquad (9)$$

где

$$q^2=<\hat{S}^+\hat{S}^z><\hat{S}^z\hat{S}^-> + <\hat{S}^-\hat{S}^z><\hat{S}^z\hat{S}^+> + <\hat{S}^+\hat{S}^+><\hat{S}^-\hat{S}^-> + (1-<\hat{S}^z\hat{S}^z>)^2\ .$$

Построены гамильтоновы уравнения движения для SU(3) КС.

В §3 в качестве инструмента исследования квазиклассического поведения S=1 магнетиков построено когерентное состояние в удобной, физической параметризации действительных функций

$$|\,\Psi\,> = e^{-i\phi\hat{S}^z} e^{-i\theta\hat{S}^y} e^{-i\gamma\hat{S}^{z'}} e^{2ig\hat{Q}^{xy}}|\,u\,>, \qquad (10)$$

где $\hat{Q}^{xy}=\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$-квадрупольный момент, $\hat{S}^i$- операторы спина.

Параметры θ и ϕ определяют ориентацию вектора спина, γ - ротационную динамику квадрупольного момента относительно вектора спина ,параметр g характеризует изменение длины вектора классического спина и квадрупольного момента. В параметризации (10) также имеет место тождество (9), где $s^2=\cos^2 g$, $q^2=\sin^2 g$.На основе когерентого состояния (10) получены гамильтоновы уравнения движения.

Глава II

В §1-2 проводится исследование магнетика Гейзенберга

$$\hat{H} = -J\sum_j \left(\hat{\vec{S}}_j\hat{\vec{S}}_{j+1} + \delta\, \hat{S}^z_j\hat{S}^z_{j+1}\right) \qquad (11)$$

со спином S=1. Получено квазиклассическое описание модели (11) с помощью средних от спиновых операторов

$$H = \int \left\{ \frac{a_0^2}{2}\left(\langle\hat{\vec{S}}\rangle_x\right)^2 - \langle\hat{S}^+\rangle\langle\hat{S}^-\rangle - (1+\delta)(\langle\hat{S}^z\rangle)^2 \right\} dx. \qquad (12)$$

Показано, что основные состояния легкоосного магнетика

$$\zeta_1 = \zeta_2 = 0, \qquad (13)$$

равно и легкоплоскостного

$$\zeta_1 = \sqrt{2}, \quad \zeta_2 = 1, \qquad (14)$$

совпадают с классическими, т.е. лежат в SU(2) сечении четырехмерного спинового фазового пространства. Более того, совпадают также и соответствующие им когерентные состояния $|0\rangle_v = |0\rangle_{su(2)}$.Аналогичные результаты получены и при исследовании классических вакуумов магнетика со спином S=3/2.

При исследовании магнонных спекров выявлено существование дополнительных мод

$$\omega = 4(1+\delta) \qquad (15)$$

в случае легкоосной модели, и

$$\omega^2 = 32 \qquad (16)$$

в случае легкоплоскостной.

Получена система уравнений,описывающая динамику спиновых волн легкоосного S=1 магнетика с обменной анизотропией, которая в малоамплитудном приближении сводится к системе

$$\begin{aligned} &i\dot{\zeta}_1 - \zeta_{1xx} + 2\delta\zeta_1 - 4\bar{\zeta}_1\zeta_2 + 2(1-\delta)|\zeta_1|^2\zeta_1 = 0,\\ &i\dot{\zeta}_2 + 4(1+\delta)\zeta_2 - 2\zeta_1^2 = 0. \end{aligned} \qquad (17)$$

Найдены первые три интеграла движения системы (17). Показано, что модель (11) сохраняет длину классического спина, т.е.

$\partial(\langle\hat{\vec{S}}\rangle)^2/\partial t=0.$

В §3 показано, что в действительной параметризации модель (11) описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} &\sin\theta\,\dot{\phi} = 2\,\delta\,\cos 2g\,\sin\theta\,\cos\theta - a_0^2\Big(\cos 2g\;\theta_{xx} -\\ &\qquad - 4\sin 2g\; g_x\theta_x - \cos 2g\,\sin\theta\,\cos\theta\;\phi_x^2\Big),\\ &\dot{\theta} = a_0^2\,(\cos 2g\,\sin\theta\;\phi_{xx} + 2\cos 2g\,\cos\theta\;\theta_x\phi_x -\\ &\qquad - 4\sin 2g\,\sin\theta\;\phi_x g_x),\\ &\dot{g} = 0,\\ &\dot{\gamma} = 2\cos 2g - a_0^2\Big(2\sin 2g(g_{xx} + 2\,\mathrm{ctg}\theta\; g_x\theta_x) -\\ &\qquad - \cos 2g\;(\mathrm{ctg}\theta\;\theta_{xx} - \phi_x^2 - \theta_x^2 - 4\,g_x^2)\Big), \end{aligned} \qquad (18)$$

которая при $g=0$ совпадает с уравнением Ландау-Лифшица. Найдены классические вакуумы в действительной параметризации. Дополнительные высокочастотные моды колебаний в магнонном спектре совпадают с (15) и (16) в комплексной параметризации.

Проведено численное моделирование системы (17). В §4 излагается методика численных экспериментов, обсуждаются схемы, по которым проводилось численное моделирование системы (17).В §5 исследуется поведение стационарных решений системы (17) вида

$$\eta_1 = \frac{b e^{i\omega t}}{\cosh(\sqrt{2\delta-\omega}\;x)}, \qquad \eta_2 = \frac{\eta_1^2}{2-\omega+2\delta} \qquad (19)$$

вблизи SU(2) сечения. Это поведение определяется следующими характеристическими показателями

$$\lambda_{sup} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\frac{\left\|\zeta_2'(t) - \zeta_1'^2(t)/2\right\|}{\left\|\zeta_2'(0) - \zeta_1'^2(0)/2\right\|}, \qquad (20)$$

$$\lambda_{su(2)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\frac{\int|\zeta_2'(t)-\zeta_1'^2(t)/2|dx}{\int|\zeta_2'(0)-\zeta_1'^2(0)/2|dx}, \qquad (21)$$

где $||.||$ – C-норма, ζ_1' –возмущенное решение системы. Численными и аналитическими методами показано, что линейные волны модели заполняют все четырехмерное спиновое фазовое пространство квантовой системы. Исследование решений (19) системы (17) показывает, что характеристические показатели отрицательны. Таким образом, нелинейные стационарные волны оказываются захваченными SU(2) сечением спинового фазового пространства. В этом смысле SU(2) сечение является двухмерным "классическим аттрактором" в 4-мерном спиновом фазовом пространстве системы.

В §6 проводится исследование "модифицированной" системы уравнений

$$\begin{aligned} &i\dot{\zeta}_1-\zeta_{1xx}+2\delta\zeta_1-4\bar{\zeta}_1\zeta_2+2(1-\delta)|\zeta_1|^2\zeta_1=0,\\ &i\dot{\zeta}_2+4(1+\alpha\delta)\zeta_2-2\zeta_1^2=0, \end{aligned} \qquad (22)$$

которая описывает стационарные солитоны, находящиеся точно в SU(2) сечении, и в этом смысле эффективно учитывающие отброшенные при получении системы (17) члены более высокого порядка точности. Проведенные аналитические и численные исследования стационарных решений системы (22) показывают, что и в этом случае SU(2) сечение является аттрактором в указанном смысле.

Глава III

Проведено исследование легкоосной модели S=1 ферромагнетика Гейзенберга с учетом одноионной анизотропии.

$$\hat{H}=-J\sum_j\left(\hat{\vec{S}}_j\hat{\vec{S}}_{j+1}+\delta\,\hat{S}^z_j\hat{S}^z_j\right). \qquad (23)$$

Получен ее квазиклассический аналог, выражающийся через средние и парные корреляторы от спиновых операторов по SU(3) ОКС

$$H=\int\left\{\frac{a_0^2}{2}\left(\langle\hat{\vec{S}}\rangle_x\right)^2-\langle\hat{S}^+\rangle\langle\hat{S}^-\rangle-(\langle\hat{S}^z\rangle)^2-\delta\langle\hat{S}^z\hat{S}^z\rangle\right\}dx \qquad (24)$$

Показано, что в отличие от модели с обменной анизотропией, для квадрата классического спина имеет место уравнение

$$\frac{\partial(\langle\hat{\vec{S}}\rangle)^2}{\partial t}=4\delta\frac{\bar{\zeta}_1^2\zeta_2-\zeta_1^2\bar{\zeta}_2}{(1+|\zeta_1|^2+|\zeta_1|^2)^2}. \qquad (25)$$

Основные состояния модели (24) совпадают с классическими, т.е. находятся в SU(2) сечении, совпадают также и соответствующие им когерентные состояния. Выявлено существование дополнительной высокочастотной моды ω=4 в магнонном спектре модели (24). Для малоамплитудных волн получена система уравнений

$$\begin{aligned} &i\dot{\zeta}_1-\zeta_{1xx}+2\delta\zeta_1-4\bar{\zeta}_1\zeta_2+2|\zeta_1|^2\zeta_1=0,\\ &i\dot{\zeta}_2+4\zeta_2-2\zeta_1^2=0. \end{aligned} \qquad (26)$$

Найдены три первых интеграла движения системы (26).

В §2 проведено численное исследование стационарных решений

$$\eta_1=\frac{be^{i\omega t}}{\cosh(\sqrt{\delta-\omega}\,x)}, \qquad \eta_2=\frac{\eta_1^2}{2-\omega} \qquad (27)$$

системы (26) и обнаружено, что нелинейные волны оказываются захваченными SU(2) сечением функционального спинового фазового пространства, в отличие от линейных волн, заполняющих все четырехмерное спиновое фазовое пространство. Таким образом, как и в случае обменной анизотропии, для стационарных состояний SU(2) сечение является особого рода классическим аттрактором.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ В РАБОТЕ

1. Построены обобщенные когерентные состояния на группе SU(2S+1), позволяющие провести адекватное полуклассическое описание различных моделей ферромагнетиков с произвольным спином.
2. Проведено исследование квантовых и классических вакуумов

модели магнетика Гейзенберга. Показано, что вакуум легкоплоскостного магнетика Гейзенберга при больших S является боголюбовским конденсатом магнонов.

3. На основе обобщенных спиновых когерентных состояний группы SU(3) проведено исследование ферромагнетика Гейзенберга со спином S=1 как для случая обменной, так и для случая одноионной типов анизотропий. Подтверждено существование дополнительной высокочастотной моды колебаний в магнонном спектре ферромагнетиков со спином S=1. Получены уравнения, описывающие спиновые волны в магнетиках со спином S=1 как для случая обменной, так и для случая одноионной типов анизотропии.

4. Построены когерентные состояния, позволяющие провести исследование S=1 магнетиков в удобной, физической параметризации. На основе этих когерентных состояний получена система уравнений, описывающая динамику спин-квадрупольных волн в магнетике Гейзенберга с обменной анизотропией.

5. Проведено численное исследование систем уравнений, описывающих малоамплитудные, слабонелинейные волны в S=1 легкоосных магнетиках Гейзенберга как с обменной так и с одноионной типами анизотропии. С помощью численных и аналитических методов показано, что нелинейные волны оказываются захваченными "классическим" SU(2) сечением, т.е. последнее представляет собой особого рода классический аттрактор в спиновом фазовом пространстве.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ

1. Kh.O.Abdulloev, M.Aguero, A.V.Makhankov, V.G.Makhankov, Kh.Kh.Muminov. Generalized spin coherent states as a tool to study quasiclassical behaviour of the Heisenberg ferromagnet. In V.Makhankov,V.Fedyanin and O.Pashaev ed. Solitons and Applications. Proceedings of the IV International Workshop, Dubna, 1989, W.S.Singapore, 1990, p.p. 244-265

2. Х.О.Абдуллоев,А.В.Маханьков,Х.Х.Муминов. Вакуум ферромагнетика Гейзенберга как боголюбовский конденсат магнонов. ПрепринтОИЯИ Р17-90-310, Дубна, 1990

3. Х.О.Абдуллоев,А.Т.Максудов,В.Г.Маханьков,Х.Х.Муминов. Нелинейная динамика анизотропного легкоплоскостного магнетика со спином S=1. Препринт ОИЯИ Р17-90-298, Дубна, 1990

4. Х.О.Абдуллоев,А.Т.Максудов,Х.Х.Муминов. Численное решение задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения Шредингера в теории спиновых волн. В сб.:Тезисы докладов XXVI научной конференции факультета физико-математических и естественных наук. М., Изд-во Университета Дружбы Народов, 1990, с.37

5. Х.О.Абдуллоев,Х.Х.Муминов. Обобщенные спиновые когерентные состояния и цепочка Гейзенберга для спина S=1. ДАН Тадж. ССР, т.33,N 10, 1990, с.656-659

6. Х.О.Абдуллоев,Х.Х.Муминов,Ф.Х.Хакимов. Вакуум легкоплоскостной модели Гейзенберга как боголюбовский конденсат магнонов. ДАН Тадж. ССР, т.33, N 6, 1990, с.377-380.

7. Х.О.Абдуллоев,Х.Х.Муминов. Описание магнетика Гейзенберга при пространственном повороте для спина S=1. ДАН Тадж.ССР, т.33,N 9, 1990, с.593-595

8. Kh.O.Abdulloev, V.G.Makhankov,A.T.Maksudov, Kh.Kh.Muminov. On semiclassical behaviour of the S=1 uniaxial Heisenberg magnet. JINR Communication E17-91-219, Dubna, 1991, p.6.

9. Kh.O.Abdulloev, A.T.Maksudov,V.G.Makhankov, Kh.Kh.Muminov. Dynamical equations for spin chain in the SU(2s+1)/SU(2s)⊗U(1) space and S=3/2 easy axis magnet. JINR Communication E17-91-221, Dubna, 1991, p.7.

10.V.G.Makhankov, A.V.Makhankov, Kh.Kh.Muminov, A.T.Maksudov. Nonlinear spin waves and two-dimensional classical attractor. JINR Communication E17-91-220, Dubna, 1991, p.10.

11.Х.О.Абдуллоев,А.Т.Максудов,Х.Х.Муминов. Об одной системе уравнений в теории спиновых волн. ДАН Тадж.ССР, 1991, т.34, N 6 (в печати).

Рукопись поступила в издательский отдел
24 декабря 1991 года.