ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

11-91-113

ХОРОМСКИЙ
Борис Николаевич

УДК 519.632.4;
519.642.4;
519.622

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ В ЗАДАЧАХ МАГНИТОСТАТИКИ И ФИЗИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Специальность: 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна 1991

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Дмитриев Владимир Иванович

доктор физико-математических наук,
профессор Макаров Владимир Леонидович

доктор физико-математических наук,
профессор Фаворский Антон Павлович

Ведущее научно-исследовательское учреждение:

Московский инженерно-физический институт.

Автореферат разослан "____" ____________ 1991 г.

Защита диссертации состоится "____" ___________ 1991 г. в ______ часов на заседании Специализированного совета Д.047.01.04 при Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ, г.Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь
специализированного совета,
кандидат физико-математических наук Ив З.М.Иванченко

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ПРОБЛЕМЫ

При численном моделировании широкого круга задач, возникающих в физике элементарных частиц и теории ядра, а также при создании современных электрофизических установок, предъявляются все более высокие требования к результатам численного эксперимента и, как следствие, к необходимым для получения требуемого результата вычислительным ресурсам. При этом прогресс вычислительной техники (в частности, переход к мультипроцессорным вычислительным системам) не только не снижает ценности экономичных вычислительных алгоритмов, но делает доступным решение все более сложных физических и прикладных задач, стимулируя развитие численных методов. В свою очередь, значительное многообразие математических постановок задач и их качественное усложнение (например, переход от линейных проблем к нелинейным, увеличение размерности задачи по пространственным переменным, высокие требования к точности вычислений, использование нетрадиционных постановок задач, расчеты в широком диапазоне физических параметров с учетом сложных геометрических особенностей) требуют достаточно универсальных и гибких подходов при создании экономичных алгоритмов их численного моделирования.

В настоящее время имеется огромный банк методов вычислений и математической физики, в развитие которых значительный вклад внесли Г.И.Марчук, А.А.Самарский, С.Л.Соболев, А.Н.Тихонов и их ученики. При решении больших задач в рассматриваемой предметной области, как правило, возникает множество возможных вариантов вычислительных схем (которые могут отличаться по своим характеристикам на порядок и более), в силу многообразия способов представления исходного уравнения, как многоуровневой проблемы. При этом на каждом алгоритмическом уровне решается согласованный набор сравнительно простых подзадач, для которых используются методы, максимально учитывающие особенности и специфику последних. Возникает сложная задача оптимизации таких вычислительных процессов, т.е. построения алгоритмов, наиболее близких к оптимальным по тем или иным критериям: суммарная вычислительная работа, необходимая память ЭВМ, достижение предельных характеристик исследуемой системы, возможности для распараллеливания вычислений и т.п. Задача построения таких алгоритмов особенно актуальна при расчетах трехмерных, квазилинейных уравнений в неограниченных областях, которые, как правило, требуют многие часы счетного времени на современных ЭВМ.

Работы, положенные в основу реферируемой диссертации, выполнены в соответствии с проблемно-тематическим планом научно-исследовательских работ ОИЯИ.

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЙ.

Основная часть работы посвящена созданию близких к оптимальным численных методов решения нелинейного стационарного уравнения Максвелла в постановке скалярного потенциала. Требуется решить трехмерную краевую задачу для квазилинейного эллиптического уравнения во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ с заданной асимптотикой неизвестной функции на бесконечности. Практические требования к относительной точности расчетов составляют 10^{-3}-10^{-4}, что приводит, в общем случае, к решению дискретных квазилинейных эллиптических уравнений с нелокальными краевыми условиями и числом неизвестных порядка $O(m^3)$, где m изменяется в пределах $50 \le m \le 100$.

На первом этапе ставится задача преобразования сформулированной проблемы к последовательному решению трех независимых (и более простых) уравнений (в рамках некоторого итерационного процесса): внутренняя краевая задача Дирихле для квазилинейного эллиптического оператора, граничное интегральное уравнение (ГИУ) теории потенциала, нелинейное граничное уравнение метода декомпозиции области (МДО). Разработка эффективных алгоритмов метода декомпозиции области и метода граничных элементов (в случае специальных поверхностей) для решения перечисленных задач была одной из основных целей диссертации.

Отметим, что метод декомпозиции области , восходящий к алгоритму альтернирования Г.А.Шварца, в последние годы получил значительное развитие (Дж.Брембл, О.Видлунд, М.Дрыя, Ю.А.Кузнецов, А.М.Мацокин, С.В.Непомнящих и др.) в связи с интересом к параллельным вычислениям. Существует также множество подходов к проблеме решения линейных сеточных эллиптических краевых задач с сильно меняющимися коэффициентами (А.А.Самарский, О.Аксельсон, Н.С.Бахвалов, В.П.Ильин, И.Е.Капорин, Б.Келлог, Г.М.Кобельков, Е.С.Николаев, и др.). В диссертации предложены экономичные методы декомпозиции области для класса нелинейных уравнений с разрывными коэффициентами. Метод ГИУ в комбинации с дифференциальными уравнениями приводит к эффективным численным алгоритмам

(К.Бреббия, В.Л.Вендланд, Е.П.Жидков, Ж.Неделек, Д.Д.Шо и др.), поскольку таким образом удается сочетать достоинства дифференциальной и интегральной постановок. Преимущества комбинированного подхода проявляются при использовании разработанных в диссертации быстрых методов решения ГИУ на специальных поверхностях. Итерационные процессы решения уравнений МДО в значительной степени опираются на аппарат операторов Пуанкаре-Стеклова. Идея использования канонических граничных операторов восходит еще к работам Ж.Адамара, Д.Гильберта, А.Пуанкаре и В.А.Стеклова и в настоящее время здесь достигнуто значительное продвижение (В.И.Агошков, В.Л.Вендланд, М.Костабель , В.И.Лебедев, К.Фенг и др.). В диссертации изучается класс операторов Пуанкаре-Стеклова в нелинейном случае, а также в случае границ с самопересечениями.

Другим кругом проблем, поставленных в реферируемой работе, были задачи на собственные значения для квазипотенциальных уравнений на полуоси, возникающих в теории элементарных частиц. Использовались уравнения, полученные в работах А.А.Логунова, А.Н.Тавхелидзе, В.Г.Кадышевского, Н.Б.Скачкова и др. Практическими требованиями, определяющими жесткие критерии к вычислительным характеристикам алгоритмов, были высокая точность расчетов и необходимость многократного обращения к используемому программному модулю (до 100 и более раз) в рамках одной серии по фитированию заданных экспериментальных данных.

Одним из наиболее эффективных принципов при оптимизации процесса решения сложных вычислительных проблем является многосеточная организация расчетов. Исследования в этой области, начиная с работ Л.Ф.Ричардсона, привели к созданию класса эффективных многосеточных алгоритмов (Г.И.Марчук, Н.С.Бахвалов, Дж.Брембл, В.Перейра, У.Троттенберг, Р.П.Федоренко, В.Хакбуш, В.В.Шайдуров и др.). В диссертации предложены некоторые специальные многосеточные алгоритмы для упомянутого круга задач.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА И ЗНАЧИМОСТЬ РАБОТЫ

В представленной диссертации разработан эффективный подход к численному анализу трехмерных краевых задач магнитостатики и некоторых спектральных задач на основе использования концепции многоуровневой декомпозиции области определения оператора и многосеточной организации расчетов. Этот подход опирается на целый ряд новых результатов в теории численных методов, среди которых выделим следующие:

- Разработка теории линейных и нелинейных операторов Пуанкаре-Стеклова для специальных постановок эллиптических краевых задач, используя которую удалось:

а) свести нелинейную краевую задачу в комбинированной постановке к эквивалентному граничному уравнению метода декомпозиции области (МДО);

б) постоить эффективные итерационные методы решения уравнения МДО с числом итераций, не зависящим от размерности дискретизованной задачи.

- Разработка экономичного алгоритма решения ГИУ теории потенциала (для внешних краевых задач,) на специальных поверхностях, требующего асимптотически такого же числа операций, как известные оптимальные методы решения внутренней сеточной задачи в области, ограниченной той же самой поверхностью (Алгоритм легко распараллеливается и позволяет эффективно решать трехмерные ГИУ, используя аппроксимации с плотной матрицей порядка 10^3-10^4. Например, решение ГИУ с матрицей жесткости порядка 4608 требует около 20 мин. счетного времени ЭВМ ЕС-1061).

- Метод аппроксимации нелинейности для квазилинейных эллиптических краевых задач, включающий разработку легко векторизуемого алгоритма клеточной декомпозиции области для решения возникающих интегро-дифференциальных уравнений. (При этом скорость сходимости итерационного метода с переобуславливанием не зависит от скачков коэффициентов уравнения, числа подобластей и слабо зависит от размерности дискретной задачи в подобластях. В частности, для решения трехмерной нелинейной задачи на сетке размерности 112x112x96 в рассмотренной постановке потребуется порядка 32-40 мин. счетного времени ЭВМ ЕС-1066).

- Разработка теории близких и эквивалентных по спектру переобуславливающих операторов для класса 2-D и 3-D линейных эллиптических краевых задач с сильно меняющимися коэффициентами;

- Метод повышения точности приближенных решений задачи на собственные значения для квазипотенциальных интегральных уравнений на полуоси $[0,\infty)$ путем экстраполяции по параметру r^{-1}, $r>0$ где $[0,r)$- отрезок дискретизации задачи; метод экстраполяции по Ричардсону для уточнения сеточных решений уравнения Пуассона с помощью поворота системы координат.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ПОЛЕЗНОСТЬ РАБОТЫ

Разработанные в диссертации численные алгоритмы были реализованы в виде модульных комплексов программ BIEGMZ и BIESMZ (решение трехмерных ГИУ на специальных поверхностях), CDD3 (метод клеточной декомпозиции области для 3-D эллиптических уравнений с сильно меняющимися коэффициентами в неполно-нелинейной постановке), GRIDS и МОК 31 (двумерные и трехмерные задачи магнитостатики в дифференциальной и комбинированной постановках), MSBIE (решение ГИУ в (r,z) - геометрии для многосекционной структуры), QPE (квазипотенциальные интегральные уравнения).

Эти программы были использованы для численного моделирования полей проектируемых или действующих электрофизических установок ОИЯИ (трехмерные и двумерные поля сверхпроводящей магнитной системы установки СПИН (ЛВЭ), аксиально-симметричные поля установки КРИОН (ЛВЭ), двумерные расчеты дипольных и квадрупольных магнитов НУКЛОТРОНа (ЛВЭ), трехмерные поля магнита спектрометра низкой энергии (совместный проект эксперимента ОИЯИ, ИФВЭ (Серпухов), ИЯИ АН СССР (Троицк)), а также для описания экспериментальных данных для спектра масс и ширин лептонных распадов возбужденных состояний систем типа J/Ψ- и Υ- мезонов (совместно с ЛТФ ОИЯИ).

Упомянутые расчеты проводились в рамках совместных научных программ с участием ЛВТА ОИЯИ и перечисленных лабораторий Института.

К числу практически полезных можно также отнести результаты численных экспериментов ,иллюстрирующих реальные вычислительные характеристики обсуждаемых в диссертации алгоритмов и позволяющих провести сравнение этих алгоритмов с другими известными подходами. Кроме того, большая часть программных модулей может быть использована при решении более широкого класса уравнений.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ

Основные результаты диссертации опубликованы в 52 научных работах, включающих 2 обзора в SJNAMM и 2 обзора в ЭЧАЯ, по теме данной работы защищены 4 кандидатских диссертации (под научным руководством соискателя).

Результаты докладывались на научных семинарах ЛВТА и ЛВЭ ОИЯИ, ЕрФИ(Ереван), ОВМ АН СССР(Москва), КГУ(Киев), Института Суперкомпьютеров и Прикладной Математики Научного Центра IBM(Хайдельберг), Математического института А (Университет Штутгарта) и др., а также на многих международных научных конференциях, в том числе:

- Международном конгрессе математиков (Варшава, '83)
- Международных совещаниях по математическому моделированию и ускорителям (Дубна '84, '86, '88)
- Международных конференциях по численным методам и приложениям (София '84, '88)
- Международной конференции "Современные проблемы численного анализа" (Москва '86)
- Всесоюзного симпозиума "Современные проблемы математической физики (Тбилиси '87)
- Всесоюзной конференции "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики" (Новосибирск '87)
- Советско-Чехословацкое совещание по численным методам и приложениям (Братислава '88)
- Международной конференции по дифференциальным уравнениям и их приложениям EQUADIFF-7 (Прага '89)
- Международных конференциях по методу граничных элементов BEM-IX, BEM-X, BEM-XI, BEM-XII, (Штутгарт(ФРГ) '87, Саутгемптон (Англия) '88, Кэмбридж (США) '89, Саппоро (Япония) '90 (poster pr.), соответственно)
- IV Международном симпозиуме по методу декомпозиции области (Москва '90)
- Международном коллоквиуме по методу граничных элементов (Штутгарт(ФРГ) '90).

СТРУКТУРА ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и приложения, содержит 300 страниц машинописного текста, 35 рисунков, 38 таблиц, список литературы из 334 наименований.

Главы I-III посвящены разработке методов решения квазилинейных эллиптических краевых задач в неограниченной области. В главе IV рассмотрена проблема собственных значений для квазипотенциальных уравнений, в главе V изучаются численные алгоритмы на последовательности сеток. Глава VI посвящена описанию комплексов программ и результатов практических расчетов.

II. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

ВВЕДЕНИЕ к реферируемой диссертации содержит обзор литературы по методам решения математических задач, рассмотренных в работе. Обсуждается статус основных результатов, полученных в диссертации, обосновывается возможность эффективной реализации комбинированных методов в задачах магнитостатики. Приводятся основные вычислительные характеристики программ для ЭВМ, реализующих предложенные в диссертации алгоритмы.

В *ГЛАВЕ* I "Комбинированные методы для квазилинейных эллиптических уравнений в неограниченной области" содержится постановка краевых задач магнитостатики, возникающих при решении стационарного уравнения Максвелла. Приводятся результаты по комбинированным методам решения возникающих квазилинейных эллиптических уравнений в неограниченной области.

Рассматривается система стационарных уравнений Максвелла

$$\mathrm{rot}\ \overline{\mathbb{H}} = \overline{\mathbb{J}}(x), \qquad \mathrm{div}\ \overline{\mathbb{B}} = 0,$$
$$\overline{\mathbb{B}} = \mu(|\overline{\mathbb{H}}|)\overline{\mathbb{H}}, \qquad \lim_{|x|\Rightarrow\infty}|\overline{\mathbb{H}}(x)| = 0, \quad x\in\mathbb{R}^3,$$

где $\overline{\mathbb{B}}(x)$ и $\overline{\mathbb{H}}(x)$ - трехкомпонентные вектор-функции индукции и напряженности магнитного поля, $\overline{\mathbb{J}}(x)$-заданный вектор объемной плотности тока, $\mu(|\overline{\mathbb{H}}|)$- заданная нелинейная функция магнитной проницаемости ферромагнетика, расположенного в ограниченной области $\Omega_\mu\subset\mathbb{R}^3$, с границей $\Gamma_\mu = \partial\Omega_\mu$.

Используем два скалярных потенциала $u_i(x)\colon \mathbb{R}^3\Rightarrow\mathbb{R}^1$, $i=1,2$, заданных по формуле

$$\overline{\mathbb{H}}(x) = \begin{cases} \nabla u_1(x), & x\in\Omega_\mu \\ \nabla u_2(x) + \overline{\mathbb{H}}_0, & x\in\Omega_0 = \Omega\setminus\Omega_\mu, \end{cases}$$

где Ω - ограниченная область, содержащая $\Omega_\mu\subset\Omega$, а $\overline{\mathbb{H}}_0$- свободное поле от источника $\overline{\mathbb{J}}$. Для отыскания функций u_i, $i=1,2$ приходим к краевой задаче.

Задача N. Найти функцию $u(x)\in\mathbb{C}^2(\Omega_\mu)\cup\mathbb{C}^2(\Omega_0)$, такую, что

$$-\mathrm{div}\ (\mu_N(x,|\nabla u|)\cdot\nabla u) = 0,$$
$$[u]_{\Gamma_\mu} = 0;\ \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\Gamma_\mu} = \Psi\in\mathbb{L}_2(\Gamma_\mu), \tag{1}$$
$$(\mathbb{E}+\mathbb{K})\ u(x) = \mathbb{L}\frac{\partial u}{\partial n}(x), \quad x\in\Gamma = \partial\Omega.$$

здесь через $[\cdot]$ обозначаем скачок функции на соотвествующей границе, $\partial u/\partial n$ – конормальная производная, $\mathbb{K}$ и $\mathbb{L}$ – интегральные операторы теории потенциала

$$\mathbb{K}u = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_s} r^{-1}(s,x)\ u(s)\ ds, \quad x\in\Gamma \tag{1'}$$

$$\mathbb{L}v = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma r^{-1}(s,x)\ v(s)\ ds, \quad x\in\Gamma$$

функция μ_N имеет вид

$$\mu_N(x, |\nabla u|) = \begin{cases} \mu(|\nabla u|), & x \in \Omega_\mu \\ 1, & x \in \Omega_0 . \end{cases}$$

Функции Ψ и $\mu(t)$, $t \in [0,\infty)$ – заданы, причем

$$|\mu(t)\cdot t - \mu(r)\cdot r| \ge m(t-r), \quad t\ge r,\ m>0 \tag{μ1}$$

$$|\mu(t)\cdot t - \mu(r)\cdot r| \le M|t-r|. \tag{μ2}$$

Для обобщенной (слабой) формулировки Задачи N используем следующие пространства:

$$\mathbb{V} = \{\ \bar{u} \in \mathbb{H}^1(\Omega):\ (u,g_0)_{L_2(\Gamma)} = 0\ \},\quad u=\gamma_\Gamma \bar{u}\ ,$$

$$\mathbb{X} = \{\ u \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma):\ (u,g_0)_{L_2(\Gamma)} = 0\ \},$$

где g_0 – плотность потенциала Робена на Γ, а γ_Γ – оператор следа на Γ. Пусть заданы функция $\Psi \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_\mu)$, некоторый симметрический положительно определенный оператор $\mathbb{G}_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{X}\Rightarrow\mathbb{X}^*)$, и неотрицательное число $\beta\ge 0$. Рассматривается

<u>Задача C.</u> Найти функцию $\bar{u} \in \mathbb{V}$, такую, что выполнено

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \mu_N(x, |\nabla\bar{u}|) \frac{\partial\bar{u}}{\partial x_i} \frac{\partial\bar{\eta}}{\partial x_i}\, dx + \beta(\mathbb{G}_1 u, \eta)_\Gamma = \int_{\Gamma_\mu} \Psi\cdot\eta\ ds\ , \tag{2}$$

$$u = \gamma_\Gamma \bar{u},$$

для всех $\bar{\eta} \in \mathbb{V}$.

При решении уравнения (1) полагаем $\mathbb{G}_1 = \mathbb{L}^{-1}(\mathbb{E}+\mathbb{K})$, $\beta=1$. Аналогично формулируются задачи Дирихле $(\mathcal{D})$ и Неймана $(\mathcal{N}e)$ в области Ω. Для Задачи $(\mathcal{D})$ имеем $\mathbb{V}=\mathring{\mathbb{H}}^1(\Omega)$, а для Задачи $(\mathcal{N}e)$ полагаем $\mathbb{V}=\mathbb{H}^1(\Omega)$.

Далее, для удобства изложения, приведем здесь также результаты главы III, касающиеся неполно-нелинейной (IN) постановки (для Задачи C), предложенной в диссертации. Пусть область нелинейности Ω_μ есть объединение конечного числа подобластей $\Omega_\mu = \bigcup_{i=1} \Omega_i$ с липшицевыми границами. Рассмотрим следующую задачу в неполно-нелинейной формулировке.

<u>Задача IN</u>. Найти функцию $\bar{u}_{IN} \in \mathbb{V}$, такую, что выполнено

$$\sum_{i=0}^{p} \mu_i(\bar{u}_{IN}) \int_\Omega (\nabla\bar{u}_{IN}, \nabla\bar{\eta})\, dx - \int_{\Gamma_\mu} \Psi\cdot\eta\ ds + \beta(\mathbb{G}_1 u_{IN}, \eta)_\Gamma = 0, \tag{3}$$

для всех $\bar{\eta} \in \mathbb{V}$, где $u_{IN} = \gamma_\Gamma \bar{u}_{IN}$, а функционалы $\mu_i: \mathbb{H}^1(\Omega) \Rightarrow \mathbb{R}$ определяются формулами

$$\mu_i(u) = \begin{cases} \mu(\sigma_i), & x \in \Omega_i, \\ 1, & x \in \Omega_0, \end{cases}$$

$$\sigma_i(u) = \left(\frac{1}{mes\ \Omega_i} \int_{\Omega_i} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}, \quad i=1,\dots,p.$$

Сформулируем результаты глав I, III об однозначной разрешимости Задач C и IN и приведем оценку разности их решений.

<u>Теорема 1</u>. Пусть функция $\mu(t)$, $t \in [0,\infty)$ удовлетворяет условиям $(\mu1)$, $(\mu2)$. Тогда для $\forall\ \psi \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_\mu)$, $(\psi,1)_{\Gamma_\mu} = 0$ Задачи C и IN, а также соответствующие им Задачи $(\mathcal{D})$ и $(\mathcal{N}e)$, имеют единственное обобщенное решение в пространстве $\mathbb{V}$. Пусть для решения $\bar{u}^D_{IN}$ Задачи Дирихле имеем $\bar{u}^D_{IN} \in \mathbb{C}^2(\Omega_i)$, $i\le p$, тогда выполнена оценка

$$\| \bar{u}^D - \bar{u}^D_{IN} \|_{\mathbb{H}^1(\Omega_\mu)} \le const\ (\bar{u}^D_{IN})\cdot d\ , \quad d=\max_{i\le i}(diam\ \Omega_i). \quad \blacksquare$$

Отметим, что в диссертации приводятся также оценки для разности решений Задач C и IN при более слабых предположениях относительно их гладкости.

Достоинства IN-формулировки заключаются в следующем:

1. Аппроксимация нелинейности производится на "грубой" сетке, определяющей разбиение исходной области $\Omega = \bigcup_{i=0}^{p} \Omega_i$, независимо от аппроксимации решения по пространственным переменным (с шагом h).
2. IN-формулировка удобна для использования метода декомпозиции области.
3. В случае $d \approx h$ имеем автоматически локальную аппроксимацию нелинейности в рамках некоторой сквозной схемы.

Для каждой из Задач C и IN определим нелинейный оператор Пуанкаре-Стеклова $\mathbb{S}_\Omega \in (\mathbb{X}^* \Rightarrow \mathbb{X})$ согласно формуле

$$(S_\Omega v,\eta) = (\gamma_\Gamma \bar u,\eta), \qquad \forall\ \eta \in \mathbb{X}^*,$$

где $\bar u$-решение задачи Неймана (C и IN) с заданной нормальной производной $v = \left.\frac{\partial \bar u}{\partial u}\right|_\Gamma$.

Теорема 2. При условиях ($\mu 1$), ($\mu 2$) существует оператор Пуанкаре-Стеклова $S_\Omega : \mathbb{X}^* \Rightarrow \mathbb{X}$ для каждой из Задач C и IN, который является сильно монотонным, непрерывным и обладает обратным $S_\Omega^{-1}: \mathbb{X} \Rightarrow \mathbb{X}^*$, который является липшиц-непрерывным и сильно монотонным. При дополнительном условии

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\,\mu(t)\cdot t\right| \le \mathbb{M}, \qquad t \in [0,\infty)$$

оператор S_Ω^{-1} является потенциальным и имеет положительно определенную и симметричную производную Гато $[S_\Omega^{-1}]'(v)$, $v \in \mathbb{X}$ ■

Отметим, что ранее нелинейные операторы Пуанкаре-Стеклова рассматривались С.Б.Кузнецовым.

Для линейного оператора Пуанкаре-Стеклова $S_E^{-1} = \mathbb{L}^{-1}(\mathbb{E}+\mathbb{K})$, определяемого внешней краевой задачей для лапласиана при условии $|u(x)| = O(|x|^{-\alpha})$, $\alpha \ge 2$, справедлива

Теорема 3. Оператор $S_E : \mathbb{X}^* \Rightarrow \mathbb{X}$ симметричен, положительно определен, непрерывен и обладает непрерывным обратным оператором $S_E^{-1} : \mathbb{X} \Rightarrow \mathbb{X}^*$, который является симметричным и положительно определенным. Нормы

$$\| v \|^2_{S_E} = (S_E v, v) \quad \text{и} \quad \| u \|^2_{S_E^{-1}} = (S_E^{-1} u, u), \qquad v \in \mathbb{X}^*,\ u \in \mathbb{X}$$

эквивалентны нормам $\|\cdot\|_{\mathbb{X}^*}$ и $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$, соответственно ■

Используя построенные операторы S_E^{-1} и S_Ω^{-1}, Задачи C и IN преобразуются к граничным уравнениям метода декомпозиции области, определенным лишь на границе $\Gamma = \partial\Omega$:

Лемма 1. Каждая из Задач C или IN эквивалентна нелинейному граничному уравнению

$$\Phi_\Gamma u \equiv S_\Omega^{-1} u + S_E^{-1} u = 0, \qquad u \in \mathbb{X} \tag{4}$$

относительно следа u неизвестной функции на границе Γ, где $S_E = \mathbb{L}^{-1}(\mathbb{E}+\mathbb{K})$, а оператор S_Ω^{-1} построен для Задачи C или IN, соответственно ■

Основные характеристики построенных итерационных методов решения уравнения (4) устанавливает следующая

Теорема 4. Пусть константы M_0, $m_0 > 0$ определены из неравенств

$$(\Phi_\Gamma u - \Phi_\Gamma v,\ u - v) \ge m_0\left(S_E^{-1}(u-v), u-v\right)$$

$$\|\Phi_\Gamma u - \Phi_\Gamma v\|^2_{\mathbb{X}^*} \le M_0^2\left(S_E^{-1}(u-v), u-v\right)$$

для всех $u, v \in \mathbb{X}$. Тогда стационарный метод Ричардсона

$$u_{n+1} = ((1-\tau)\mathbb{E} - \tau\cdot S_E S_\Omega^{-1})\cdot u_n, \qquad n = 0,1,\ldots \tag{5}$$

сходится со скоростью

$$\| u_n - u \|_{\mathbb{X}} \le \frac{\tau q^n}{1-q}\ \| \Phi_\Gamma u_0 \|_{\mathbb{X}^*}, \quad \text{при} \quad \tau \in (0, 2M_0^{-1})$$

от любого $u_0 \in \mathbb{X}$, где $q = max\{1-\tau m_0, 1-\tau M_0\}$. Если функция $t \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\,(\mu(t)\cdot t)$ - непрерывно дифференцируема, то метод Ньютона

$$\frac{du}{d\tau} = -\left[\Phi'_\Gamma(u(\tau))\right]^{-1}\cdot\Phi(u(\tau)), \quad u(0) = u_0, \quad 0 \le \tau < \infty$$

сходится к решению $u \in \mathbb{X}$ для $\forall\ u_0 \in \mathbb{X}$ ■

Отметим, что аналогичные утверждения о сходимости рассмотренных итерационных процессов справедливы также для уравнений, возникающих при дискретизации задачи (4) по методу Галеркина

$$\Phi_h u_h = 0, \qquad \Phi_h = I_h^* \Phi_\Gamma I_h \in (\mathbb{X}_h \Rightarrow \mathbb{X}_h^*), \tag{6}$$

где $\mathbb{X}_h \subset \mathbb{X}$ - некоторое конечно-мерное подпространство в $\mathbb{X}$, $I_h \in (\mathbb{X}_h \Rightarrow \mathbb{X})$ - оператор вложения. Существенно то, что скорость сходимости итераций не зависит от размерности $dim\ (\mathbb{X}_h)$ дискретной задачи. Для решения u_h уравнения (6) справедлива оценка погрешности

$$\| u_h - u \|_{\mathbb{X}} \le \frac{3M_0}{m_0}\ \inf_{v \in \mathbb{X}_h} \| v - u \|_{\mathbb{X}}. \tag{7}$$

В главе I также установлены следствия общей оценки (7) (при дополнительных предположениях на гладкость решения $u \in \mathbb{X}$ и поверхности Γ) для пространства $\mathbb{X}_h$ кусочно-линейных элементов.

Реализация процесса (5) включает два трудоемких этапа:

I. Вычисление элемента $v = S_\Omega^{-1} u_n$, что эквивалентно решению задачи Дирихле (2) или (3) в области Ω.

II. Вычисление элемента $u_{n+1/2} = S_E v$. На этом этапе решается ГИУ вида $(\mathbb{E}+\mathbb{K})u_{n+1/2} = \mathbb{L}v$ на границе Γ.

В связи с этим обстоятельством две следующие главы посвящены разработке быстрых методов решения задач на этапах I, II.

ГЛАВА II посвящена разработке экономичных методов решения ГИУ на специальных поверхностях и вычисления сеточного оператора Пуанкаре-Стеклова (в настоящем тексте п.1-4).

п.1. Дискретизация интегральных операторов $\mathbb{K}$ и $\mathbb{L}$, определенных согласно (1′) на границе Г параллелепипеда с квадратом в основании, осуществляется на основе кусочно-постоянной интерполяции и коллокации на равномерной сетке (размерности $p{\times}p{\times}q$). Для возникающей алгебраической системы

$$(\mathbb{E} + \mathbb{K}_h)u_h = \mathbb{L}_h v \equiv f \; ; \qquad u_h \in \mathbb{R}^N, \; N=2p^2+4pq \tag{8}$$

изучается структура матриц жесткости $\mathbb{K}_h$ и $\mathbb{L}_h$. Показано, что существует такое разбиение $\mathbb{K}_h$ (или $\mathbb{L}_h$) на блоки, что каждый блок является двухуровневой блочно-теплицевой матрицей с точностью до простейшего оператора перестановки. На этом свойстве основано эффективное умножение матрицы $\mathbb{K}_h$ (или $\mathbb{L}_h$) на вектор. Дополнительные оптимизации возможны, когда вектор u_h имеет симметрии.

Свойства матрицы $\mathbb{K}_h$ позволили построить экономичный попеременно-треугольный метод решения уравнения (8):

Теорема 5. Матрица $\mathbb{K}_h$ неотрицательна, $\mathbb{K}_h \geq 0$, $\mathbb{K}_h u_1 = u_1$, где $u_1=(1,\dots,1)^T$, и неразложима. При любом $N \geq 6$, где $N=2p^2+4pq$ – размерность задачи (8), существует $\Delta>0$, такое, что

$$Re\; \sigma(\mathbb{E} + \mathbb{K}_h) \geq \Delta.$$

При этом итерационный процесс

$$\begin{aligned} &\mathbb{B}_\tau(u_{n+1} - u_n) = -2\tau\Big((\mathbb{E} + \mathbb{K}_h) - f\Big), \\ &\mathbb{B}_\tau = (\mathbb{E} + \tau\mathbb{K}_1)\cdot(\mathbb{E} + \tau\,\mathbb{K}_2), \qquad \mathbb{K}_h = \mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2 \end{aligned} \tag{9}$$

осуществим по крайней мере для $0<\tau<1$ и существует $\tau_0>0$, такое, что

$$\sup_{\tau\in(0,\tau_0)} \rho\Big(\mathbb{E} - 2\tau\mathbb{B}_\tau^{-1}(\mathbb{E} + \mathbb{K}_h)\Big) < 1,$$

где $\mathbb{K}_1$ и $\mathbb{K}_2$ верхняя и нижняя блочно-треугольные матрицы, имеющие легко обратимые блочные диагонали ■

Отметим, что процесс (9) реализуется за $O(p^3 lnp + p^2 q lnq)$ арифметических действий с использованием массива порядка $O(p^2q)$. В главе II приведены также основные вычислительные характеристики соответствующих комплексов программ для ЭВМ, составленных как для общего случая, так и для случая пространственных симметрий решения.

п.2. Далее в этой главе рассмотрены ГИУ для многосекционной структуры в *(r,z)*- геометрии, т.е. в случае, когда многосвязная граница Г состоит из большого числа одинаковых компонентов связности $\Gamma = \bigcup_{l=1}^{L} \Gamma_l$, получающихся одна из другой сдвигом вдоль оси *OZ*. При этом могут сдвигаться также некоторые фиксированные группы (секции) таких элементов. Рассмотрена однородная внешняя краевая задача Неймана в неограниченной области с границей Г для компоненты $u=\mathbb{A}_\theta$ векторного потенциала

$$\overline{\mathbb{A}} = (\mathbb{A}_r, \mathbb{A}_z, \mathbb{A}_\theta)^T \;, \quad \overline{\mathbb{H}} = rot\,\overline{\mathbb{A}}; \quad \mathbb{A}_\theta \to 0, \quad z^2+r^2 \to \infty \;,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}u + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r\cdot u)\right) = I_0 \;.$$

Соответствующее ГИУ принимает вид

$$u(x_0) + \frac{1}{\alpha(x_0)}\int_\Gamma \mathbb{K}(x_0,x)\cdot u(x)\; d\Gamma = \Phi(I_0), \quad x=(r,z) \tag{10}$$

где

$$\mathbb{K} = -\frac{\partial}{\partial n_x}\left[\frac{r}{2}\int_0^{2}\Big[(z-z_0)^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0 cos\theta\Big]^{-1/2}\cdot cos\theta\cdot d\theta\right].$$

Используется аппроксимация, приводящая уравнение (10) к СЛАУ вида

$$(\mathbb{E} + \mathbb{B}_h)u_h = F_h \tag{11}$$

с многоуровневой блочно-теплицевой матрицей $\mathbb{B}_h$.

При таком подходе достигается экономия в *p* раз как по необходимой памяти ЭВМ, так и по быстродействию, где *p* – число элементов (или секций). Для решения уравнения (11) создан специализированный комплекс программ.

п.3. Рассмотрим быстрый метод вычисления сеточного аналога оператора Пуанкаре-Стеклова. Для решения разностного уравнения Лапласа

$$\Delta_h u_h = 0 \;, \qquad u_h\big|_\Gamma = g \tag{12}$$

на сеточном прямоугольнике (или параллелепипеде) Π_h, с равномерной $N_1\times N_2$ – сеткой, требуется найти сеточный аналог нормальной производной функции u_h на границе $\Gamma=\partial\Pi_h$. Для этого достаточно построить метод вычисления функции u_h на сеточном слое, ближайшем к границе Г, когда функция *g* отлична от нуля лишь на двух противоположных сторонах (или гранях) Γ_1 и Γ_3 прямо-

угольника Π_h. Пусть $N_1=N_2=N=2^m$. Алгоритм состоит из двух шагов:
I. Вычисление функции u_h на $2n$, $n\geq 1$ сеточных слоях, параллельных Γ_1 и Γ_3, с помощью FFT.
II. Пересчет решения по явной схеме согласно (12) в точки оставшихся приграничных слоев за $p = \frac{N}{2n} -1$ шагов.

Алгоритм реализуется за

$$Q_2 = 2N^2\cdot(p+1)^{-1}\cdot m + 6Np + O(mN)$$

операций в двумерном случае, и за

$$Q_3 = 4N^3\cdot(p+1)^{-1}\cdot m + 10N^2 p + O(N^2 m)$$

операций в трехмерном случае. Поскольку алгоритм относится к числу неустойчивых, то получены ограничения сверху на величину p в зависимости от необходимой точности расчетов и машинной точности. Этот подход особенно эффективен для сеточных областей небольшой размерности ($N\leq 32$ в двумерных задачах, и $N\leq 16$ – в трехмерных), что характерно для алгоритмов МДО.

п.4. Рассмотрим интегро-разностный метод решения ГИУ первого рода

$$\mathbb{L}v \equiv \int_\Gamma \ln r^{-1}(x,s)v(s)ds = f, \qquad \Gamma = \partial\Omega \tag{13}$$

с оператором $\mathbb{L}= \mathbb{L}^*>0$ (некорректная задача), которое возникает при решении краевой задачи Неймана для лапласиана в области $\Omega\in\mathbb{R}^2$. Основная идея предлагаемого алгоритма состоит в одновременном использовании ГИУ первого рода (13) и дифференциальной постановки задачи в некоторой узкой приграничной полосе $\Omega_1\subset\Omega$, $\partial\Omega_1=\Gamma\cup\Gamma_1$, ибо в дифференциальном подходе не возникает проблем с подавлением быстроосциллирующей компоненты погрешности, а простые итерации для уравнения (13) быстро сходятся на гладкой компоненте решения $v(s)$. Один шаг итерационного процесса сводится к решению следующих двух задач:

а) Выполнить k итераций по формулам

$$\frac{v_{n+1}-v_n}{\tau} = -\mathbb{L}v_n + f \qquad , 0<\mathbb{L}\leq\Lambda_0\mathbb{E},\ \tau>0 , \quad n=0,1,\dots,k . \tag{14}$$

б) Найти гармоническую в полосе Ω_1 функцию ψ, заданную на $\partial\Omega_1$:

$$\Delta\psi(x) = 0, \qquad x\in\Omega_1$$

$$\psi(x)= \begin{cases} g(x), & x\in\Gamma \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\Gamma \left(g(s)\frac{\partial}{\partial n}\ln r^{-1} - v_k(s)\ln r^{-1}\right)ds, & x\in\Gamma_1,\ s\in\Gamma. \end{cases} \tag{15}$$

Положим $\sigma = \inf\limits_{x\in\Gamma,\, y\in\Gamma_1} |x-y|$, l – длина контура Γ.

<u>Теорема 6.</u> Пусть число k удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{2\pi}\, c(\Omega,\sigma)\, \frac{l^{1/2}}{\tau(k+1)} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^k = q < 1,$$

где константа c зависит лишь от σ и формы области Ω. Тогда k итераций по формулам (14) плюс решение задачи (15) дает приближение $v_k^1 = \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_\Gamma$, для которого справедлива оценка

$$\| v(s) - v_k^1(s)\|_{L_2(\Gamma)} \leq q\cdot\|v(s) - v_0\|_{L_2}, \qquad q<1 \ ■$$

Далее показано, что при дискретизации уравнения (13) по методу коллокации для кусочно-линейных на Γ базисных функций с равномерным шагом $h=1/n$, использование последовательности сеток приводит к итерационному алгоритму, требующему для уменьшения невязки в задаче (13) в $O(h^{2})$ раз порядка $O(h^{-2})$ арифметических действий, т.е. к оптимальному алгоритму.

Например, для прямоугольника Ω, приграничной полосы Ω_1 шириной $2h$ и последовательности из трех сеток на Γ размерностью 26, 56 и 116 для решения задачи (13) с точностью $\varepsilon = 0.75h^2$ требуется $k_\Gamma= 5$ глобальных итераций на всех сетках при $k\leq 5$. Число k_Γ слабо зависит от выбора параметра $\tau\in\left[\Lambda_0^{-1}, 3/2\Lambda_0^{-1}\right]$. Результаты справедливы и для внешней краевой задачи.

ГЛАВА III посвящена методам разделения области в случае пересекающихся разрезов для линейных и неполно-нелинейных эллиптических уравнений. Свойства операторов Пуанкаре-Стеклова, порождаемых задачей IN, сформулированы при изложении результатов главы I. Поэтому далее рассмотрим лишь результаты , относящиеся к проблеме эффективного вычисления элемента $v = S_\Omega^{-1}u_n$, что сводится к решению задачи IN с однородными условиями Дирихле на Γ.

Для декомпозиции области $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{P}\Omega_i$ клеточного типа, в предположении, что $\Omega_\mu = \bigcup\limits_{i=p_1}^{p}\Omega_i$, $1\le p_1<p$, рассмотрим вспомогательную линейную краевую задачу с кусочно-постоянными коэффициентами:

<u>Задача PWC.</u> Найти функцию $u_\Omega \in \mathring{\mathbb{H}}^1(\Omega)$, такую, что

$$\sum_{i=1}^{p}\mu_i\int_{\Omega_i}(\nabla u_\Omega,\nabla\eta)\,dx = \int_{\Gamma_\mu}\psi\cdot\eta\;ds, \qquad \forall\;\eta\in\mathring{\mathbb{H}}^1(\Omega).$$

Здесь $\bar\mu=(\mu_1,\dots,\mu_p)^T$, $\mu_i>0$, $i=1,p$- заданный вектор. Обозначим через $\mathbb{A}(\bar\mu)$ оператор в пространстве $\mathring{\mathbb{H}}^1(\Omega)$, порождаемый задачей PWC. Для решения задачи IN используем итерационный процесс с переобуславливателем $\mathbb{A}(\bar\mu)$, для которого справедлива

<u>Теорема 7.</u> Если в условиях Теоремы 4 формально заменить операторы Φ_Γ на $\mathbb{A}_{IN}$ и $\mathbb{S}_E$ на $\mathbb{A}(\bar\mu)$, то для итерационного процесса

$$\mathbb{A}(\bar\mu)\cdot\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau} = -\,\mathbb{A}_{IN}u_n, \qquad u_n\in\mathring{\mathbb{H}}^1(\Omega),\ n=0,1,\dots$$

справедливы результаты Теоремы 4 ∎

Согласно Теореме 7 для эффективного решения задачи IN достаточно построить быстрые алгоритмы обращения оператора $\mathbb{A}(\bar\mu)$. Оставшаяся часть главы III посвящена решению этой проблемы.

Пусть параллелепипед Π $(\equiv\Omega)$ разбит на подобласти Ω_i тремя группами из n_k, $k=\overline{1,3}$ плоскостей, параллельных координатным плоскостям. Используем обозначения $i=(i_1,i_2,i_3)$, $1\le i_k\le n_k$, $k=\overline{1,3}$, $|i|=i_1+i_2+i_3$, $M = n_1\cdot n_2\cdot n_3$ для индексов и $\Gamma_i=\partial\Omega_i$, $\Gamma_0=\partial\Omega$, $\Gamma=\left(\bigcup\limits_i\Gamma_i\right)\backslash\Gamma_0$ для границ подобластей. Пусть γ_Γ оператор следа на внутренних границах Γ для функций из $\mathring{\mathbb{H}}^1(\Omega)$. Определим пространство функций на Γ

$$\mathbb{V}_\Gamma = \{u_\Gamma=\gamma_\Gamma\bar u,\quad \bar u\in\mathring{\mathbb{H}}^1(\Omega)\},$$

$$\|\,u_\Gamma\,\|^2_{\mathbb{V}_\Gamma} = \sum_i\|\,\gamma_{\Gamma_i}u_\Gamma\|^2_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)}.$$

Используя операторы Пуанкаре-Стеклова $\mathbb{S}_i^{-1}=\mathbb{L}^{-1}(\mathbb{E}-\mathbb{K})|_{\Gamma_i}$, определяем граничный оператор на $\mathbb{V}_\Gamma$

$$\mathbb{A}_\Gamma = \underset{|i|\text{-четное}}{\oplus}\mu_i\mathbb{S}_i^{-1} + \mathbb{T}^*\cdot(\underset{|i|\text{-нечетное}}{\oplus}\mu_i\mathbb{S}_i^{-1})\cdot\mathbb{T} \qquad (16)$$

где $\mathbb{T}$: $\mathbb{V}_\Gamma\Rightarrow\mathbb{V}_\Gamma$ - оператор перестановки. После этого Задача PWC

сводится к эквивалентному граничному уравнению МДО:

<u>Задача EDD.</u> Найти функцию $u_\Gamma\in\mathbb{V}_\Gamma$, такую, что выполнено

$$(\mathbb{A}_\Gamma u_\Gamma,\eta)_{L_2(\Gamma)} = (\psi,\eta), \qquad \forall\;\eta\in\mathbb{V}_\Gamma.$$

Свойства оператора $\mathbb{A}_\Gamma$, заданного согласно (16), определяет

<u>Лемма 2.</u> Справедливы соотношения

$$(\mathbb{A}_\Gamma u,v) = (u,\mathbb{A}_\Gamma v), \qquad (\mathbb{A}_\Gamma u,u)\ge\gamma\|u\|^2, \qquad \gamma>0,\ \forall\;u,v\in\mathbb{V}_\Gamma.$$

При этом квадратичная форма

$$\|u\|^2_{\mathbb{V}_\Gamma} = (\mathbb{A}_\Gamma u,u)$$

определяет эквивалентную норму в пространстве $\mathbb{V}_\Gamma$ ∎

Для аппроксимации задачи EDD используем метод Галеркина

$$(\mathbb{A}_\Gamma u_h,\eta) = (\psi,\eta), \qquad \forall\;\eta\in\mathbb{V}_h \qquad (17)$$

для семейства подпространств $\mathbb{V}_h=\underset{i}{\oplus}\mathbb{V}_{i,h}\subset\mathbb{V}_\Gamma$, где $\mathbb{V}_{i,h}$- пространства серендиповых билинейных элементов, определяемых для некоторого регулярного разбиения Γ_i. Здесь $u_h\in\mathbb{V}_h$- искомая функция.

Уравнение (17) решаем обобщенным методом сопряженных градиентов (PCG) с переобуславливающим оператором (матрицей) $\mathbb{B}$. Главной проблемой является построение симметричного, положительно определенного оператора $\mathbb{B}$, удовлетворяющего свойствам:

1) Для $\forall\;u\in\mathbb{V}_h$ выполнены неравенства

$$c_1(\mathbb{B}u,u)\le(\mathbb{A}_\Gamma u,u)\le c_2(\mathbb{B}u,u),$$

где c_2/c_1- "слабо" зависит от $n_V=dim\;\mathbb{V}_h$;

2) $\mathbb{B}$- легко обратимый оператор по сравнению с оператором $\mathbb{A}_\Gamma$ на $\mathbb{V}_h$.

Построены семейства переобуславливающих операторов $\mathbb{B}_n$ для задач в $\mathbb{R}^n$, $n=2,3$, удовлетворяющие всем перечисленным свойствам. Например, для трехмерного случая, оператор $\mathbb{B}_3$ строится с помощью расщепления исходного пространства

$$\mathbb{V}_h=\mathbb{V}_1\oplus\mathbb{V}_2\oplus\mathbb{V}_3; \qquad u=u_1+u_2+u_3\in\mathbb{V}_h,\ u_i\in\mathbb{V}_i,\ i=\overline{1,3}$$

в прямую сумму трех компонент, где подпространство $\mathbb{V}_1$ используется для глобального переноса информации между подструктурами, а $\mathbb{V}_2$ и $\mathbb{V}_3$ связаны с неизвестными на ребрах и на гранях подобластей соответственно. Построим оператор

$$diag\;\mathbb{A}_3 = \underset{|i|=2l}{\oplus}\mu_i\left(\underset{k=1}{\overset{6}{\oplus}}\mathbb{S}_i^{kk}\right) + \mathbb{T}^*\cdot\left(\underset{|i|=2l+1}{\oplus}\mu_i\left(\underset{k=1}{\overset{6}{\oplus}}\mathbb{S}_i^{kk}\right)\right)\cdot\mathbb{T},$$

где $l\in\mathbb{N}$, а $\mathbb{S}_i^{kk}$ - диагональные блоки операторов $\mathbb{S}_i^{-1}$. Оператор $\mathbb{B}_3$ определяется согласно формуле

$$(\mathbb{B}_3 u, v) = \left(\mathbb{A}_\Gamma(u_1+u_2),\ v_1+v_2\right) + \left(diag\ \mathbb{A}_3 u_3,\ v_3\right), \quad \forall\ u, v \in \mathbb{V}_h.$$

Аналогичная конструкция используется в двумерном случае. Доказана

Теорема 8. Для чисел обусловленности переобусловленных операторов справедливы оценки

$$cond(\mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{A}_\Gamma) = O\left(1 + \ln^2 H/h\right),$$

$$cond(\mathbb{B}_3^{-1}\mathbb{A}_\Gamma) = O\left(H/h(1 + \ln^2 H/h)\right),$$

где h - шаг дискретизации, а H - максимальный размер подобласти ■ Отметим, что $N=H/h$ есть число неизвестных по одной переменной в подобласти.

Доказательство Теоремы 8 опирается на полученные в диссертации общие оценки чисел обусловленности $cond(\mathbb{B}_k^{-1}\mathbb{A}_\Gamma)$, $k=2,3$ на классе подпространств $\mathbb{V}_2$, $\mathbb{V}_3$ общего вида.

В заключение главы III представлены разработки аналогичных алгоритмов решения задачи EDD для конечно-разностных аппроксимаций операторов Пуанкаре-Стеклова в подобластях Ω_i. Создан комплекс программ CDD3 для решения трехмерных эллиптических задач с сильно меняющимися коэффициентами в ступенчатых областях. Приводятся сравнения эффективности созданнного комплекса с другими известными алгоритмами.

Кроме того построено семейство переобуславливающих операторов $\overline{\mathbb{B}}_k$, $k=2,3$ эквивалентных по спектру оператору $\mathbb{A}_\Gamma$ на классе подпространств $\mathbb{V}_h \subset \mathbb{V}_\Gamma$, при аппроксимации по методу Галеркина.

Оценивая эффективность разработанных в главе III алгоритмов вычисления элемента $v=\mathbb{S}_\Omega^{-1} u_n$, приходим к выводу, что эта проблема, в своей наиболее трудоемкой части (задача EDD) требует для уменьшения невязки в $\varepsilon=O(N^{-q})$, $q>0$ раз порядка $Q=O(m \cdot M \cdot N^k \ln^4 N)$ арифметических действий, где M -общее число подобластей,

$$m = \begin{cases} 1, & \text{2-D случай} \\ N^{1/2}, & \text{3-D случай,} \end{cases} \qquad k = \begin{cases} 1, & \text{2-D случай} \\ 2, & \text{3-D случай,} \end{cases}$$

а действие сеточного оператора Пуанкаре-Стеклова в подструктурах вычисляем используя метод Бахвалова-Орехова частичного решения разностной задачи Дирихле для лапласиана.

В *ГЛАВЕ* IV рассматривается проблема собственных значений для гиперсингулярных квазипотенциальных интегральных уравнений.

В квантовой теории поля для описания двухчастичных кварковых

систем ($q\bar{q}$, e^+e^-, $\mu^+\mu^-$ и т.д., где q-кварки, e-электрон, μ- μ-мезон) используется квазипотенциальный подход. Для потенциала, описывающего взаимодействие кварка и антикварка, квазипотенциальное уравнение (КПУ) в импульсном пространстве (в центрально-симметричном случае) принимает вид:

$$\mathbb{A}\ \psi \equiv v(p)\psi(p) + \beta^3 \frac{d^2}{dp^2} \mathbb{L}\psi + \alpha \cdot \mathbb{L}\psi = \mu \cdot \psi(p), \qquad (18)$$

где

$$\psi \in \mathbb{X} = \{\psi \in \mathbb{L}_2(-\infty,\infty):\ \psi(p) = -\psi(-p)\},$$

$$\mathbb{L}\psi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln|p-x|\,\psi(x)\,dx,$$

$v(p) \ge 0$ - заданная функция, $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$ - фиксированные константы. Здесь ψ -волновая функция относительного движения, μ-энергия связанной системы.

Рассмотрим случай $v(p)=p^2$. Используем следующие обозначения

$$\mathbb{R} = \frac{d^2}{dp^2}\mathbb{L} \qquad \mathbb{A}_1 = p^2\mathbb{E} + \beta^3\mathbb{R},$$

$$\mathbb{D} = \frac{d}{dp}, \qquad \mathbb{D}^{-1} := \int_{-\infty}^{p} (\cdot)\,dx, \qquad \mathbb{K} = \mathbb{D} \cdot \mathbb{L}.$$

Доказана следующая

Лемма 3. Оператор $\mathbb{T}_1 = \mathbb{A}_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{X} \to \mathbb{X})$ - вполне непрерывен, $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_1^* \ge c_1\mathbb{E}$, $c_1 > 0$ и, кроме того, $\mathbb{L} = \mathbb{L}^*$ а оператор $\mathbb{L} \cdot \mathbb{T}_1$ ограничен в $\mathbb{X}$. Для $\forall\ \beta > 0\ \exists\ \alpha_0(\beta)$, такое, что при $\alpha < \alpha_0(\beta)$ оператор $\mathbb{A} = \mathbb{A}^*$ имеет вполне непрерывный обратный $\mathbb{T} = \mathbb{A}^{-1}$. Решения задачи

$$\mathbb{A}_1 z_m = \chi_m z_m, \qquad \|z_m\| = 1;\ m = 1, 2, \ldots,$$

удовлетворяют оценкам

$$\|\mathbb{D}^{-1} z_m\|^2 \le c\ |\chi_m|^{1/3}, \qquad \|\mathbb{D} z_m\|^2 \le c\ |\chi_m|^2,$$

$$\|\mathbb{L} z_m\|^2 \le c\ |\chi_m|^{1/3}, \qquad \chi_m = O(m^{2/3}), \qquad m \to \infty \quad ■$$

Далее рассматривается проекционный метод решения уравнения

$$\psi = \mu \cdot \mathbb{T} \cdot \psi, \qquad \alpha < \alpha_0(\beta),$$

где $0 < \mu_1 \le \mu_2 \le \ldots$ - искомые собственные числа (СЧ), а ψ_k, $k=1,2\ldots$ - собственные функции (СФ). Пусть $\mathbb{H}_n \subset \mathbb{X}$ есть подпространство кусочно-линейных базисных функций $\eta_i(x)$, образуемых равномерным разбиением отрезка $[0,r]$, $r>0$ с шагом $h=r/n$. Определим проектор

$$\mathbb{P}_n\psi = \sum_{i=1}^{n} a_i(\psi)\cdot\eta_i(x) \ , \qquad a_i \in \mathbb{R}^1,$$

так что

$$\| \psi-\mathbb{P}_n\psi \|_X^2 \Rightarrow \min_{a_i} .$$

Рассмотрим задачу об отыскании первых $M<n$ собственных чисел $0<\mu_{1,n}\le\mu_{2,n}\le\ldots\mu_{M,n}$ и СФ уравнения

$$\psi = \mu\cdot\mathbb{P}_n\cdot\mathbb{T}\psi \ , \qquad \psi \in \mathbb{H}_n . \qquad (19)$$

Справедлива следующая

Лемма 4. Имеет место оценка $\| \mathbb{P}^{(n)}\mathbb{T}\| \le c(h^{1/2}+ r^{-1/2})$ при $n\Rightarrow\infty$ ∎

Используя леммы 3,4, доказана

Теорема 9. Пусть для СФ $\psi_k(x) \in \mathbb{X}$, $k\le M$ выполнено $\mathbb{D}\psi \in \mathbb{X}$, $x^2\psi(x)\in \mathbb{X}$. Тогда справедливы оценки

$$\|\psi_{k,n}- \psi_k\|_X \le a_1 h + a_2 r^{-2}, \ | \mu_{k,n}- \mu_k| \le f_1 h^2 + f_2 r^{-4},$$

где константы a_1, a_2, f_1, f_2 не зависят от h и r ∎

После некоторых упрощений, уравнение (19) сводится к частичной проблеме собственных значений

$$\mathbb{A}_n u_\xi = \lambda_\xi u_\xi, \qquad u_\xi=(u_1,\ldots,u_n)^T, \ \xi=(h,r),$$

где $\mathbb{A}_n= \mathbb{D}_n+ \mathbb{T}_L+ \mathbb{H}_L+ \mathbb{T}_R+ \mathbb{H}_R$, $\mathbb{D}_n=diag(v_1,\ldots,v_n)$, $\mathbb{T}_L=\mathbb{T}_L^*$, $\mathbb{T}_R=\mathbb{T}_R^*$ – -теплицевы, $\mathbb{H}_L=\mathbb{H}_L^*$, $\mathbb{H}_R=\mathbb{H}_R^*$ – ганкелевы матрицы. Для отыскания M максимальных СЗ этой задачи используем метод итерирования подпространства. Эффективность алгоритма обеспечивается быстрым умножением матрицы $\mathbb{A}_n$ на вектор (за $O(n\ln n)$ операций), формированием начальных приближений для итераций на последовательности сеток с учетом асимптотического представления погрешности по степеням параметров дискретизации, экстраполяцией по Ричардсону относительно параметров h и r. Этот алгоритм реализован в виде комплекса программ QPE.

Приведем некоторые характеристики комплекса на примере расчета КПУ с кулоновским потенциалом ($\beta=0$, $\alpha=1$, $v=p^2$), имеющим аналитическое решение. При расчете $M=4$ собственных чисел с точностью $\varepsilon=10^{-4}$ на последовательности из 7 сеток размерностью $n_i= 2^{3+i}$, $i=\overline{1,7}$ (здесь $n_7= 1024$) многосеточный алгоритм работает в 5-6 раз быстрее, чем при расчете лишь на последней сетке.

Кроме того, если точность решений на последней сетке при $r=12,5$ и $r=15,0$ составляла $1.9\cdot10^{-5}$ и $2.7\cdot10^{-5}$, соотвественно, то после экстраполяции по h и r согласно разложению

$$\lambda - \lambda_\xi = \sum_{i=1}^{N_o} d_i h^{1+i} + \sum_{i=1}^{L_o} \frac{\nu_i(h)}{r^{\alpha_o+s\cdot i}} + O\cdot\left(h^{1+N_o} + r^{-\alpha_o-sL_o}\right)$$

составляла ~ $4.0\cdot10^{-8}$.

При описании экспериментальных данных (энергий M_i, $i=\overline{1,4}$ и ширин Γ_1) для J/ψ-и Y-частиц проводилась минимизация функционала

$$\sum_{i=1}^{4} \left(M_i- M_{i,\text{эксп}}\right)^2\Delta M_i^{-2} + \frac{\left(\Gamma_1- \Gamma_{1,\text{эксп}}\right)^2}{\Delta\Gamma_1^{\ 2}}\cdot \varepsilon \ \Rightarrow inf$$

по свободным параметрам задачи. Такая минимизация требует, как правило, более 100 обращений к программе QPE. Во всех рассмотренных случаях получено "хорошее" описание для энергий, и несколько худшее для ширин, что позволило уточнить статус физической модели. В *главе IV* также разработаны методы решения КПУ с нелинейным вхождением спектрального параметра μ.

Г Л АВА V посвящена вычислительным алгоритмам на последовательности сеток. Получены общие условия, гарантирующие разложение погрешности по степеням параметра дискретизации для приближенного решения нелинейного операторного уравнения в банаховом пространстве. Установлены следствия для сильно монотонных операторов и для задачи на собственные значения в гильбертовом пространстве.

Проведены вычислительные эксперименты для широкого класса эллиптических краевых задач, ГИУ теории потенциала и нелинейных сингулярных ИУ типа Чу-Лоу , иллюстрирующие высокую практическую эффективность экстраполяций типа Ричардсона в этих задачах при повышении точности разностных схем. Предложен метод повышения точности разностных решений для двух- и трехмерного уравнения Пуассона и бигармонического уравнения с помощью поворота системы координат. Пусть на некоторой сеточной области с квадратной сеткой W_h с шагом h задано сеточное уравнение Пуассона

$$\Delta_h u_h = f(x), \qquad x \in W_h$$

для стандартной схемы "крест". В силу инвариантности лапласиана относительно поворота системы координат, можно рассмотреть семейство сеточных операторов Δ_{τ_k} на W_h , где $\tau_k=\sqrt{1 + k^2}$,

$k=1,2,\ldots$, определенных на шаблоне, повернутом относительно исходного на угол $\varphi_k=\pm\mathrm{arctg}\ k$. Построены линейные комбинации функции u_h и решений u_{τ_k} задач вида $\Delta_{\tau_k} u_{\tau_k} = f(x)$, $x \in W_h$, приближающие точное решение $u^*(x)$ исходного уравнения $\Delta u^* = f$ с погрешностью $O(h^4)$ и $O(h^6 \ln h)$. Например, для случая $\varphi_1 = \pi/4$, $\tau_1 \equiv \tau \equiv \sqrt{2}h$ справедлива

Теорема 10. Пусть в прямоугольнике Π функции $u^*(x) \in \mathbb{C}^6(\overline{\Pi})$ и $f(x) = \Delta u^*$ удовлетворяют условиям

$$f(x) = 0,\ x \in \Gamma=\partial\Pi,\ ;\quad \frac{\partial^4 u^*}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u^*}{\partial x_2^4} = 0 \quad \text{в угловых точках.}$$

Тогда справедливы формулы

$$\frac{2u_h + u_\tau}{3} + \frac{h^2}{12} f(x) = u^*(x) + O(h^4), \quad x \in W_h$$

$$\frac{1}{45}\Big[\, 32\, u_{h/2} - 2u_h + 16u_{\tau/2} - u_\tau \Big] + \frac{h^2}{60} f(x) = u^*(x) + O(h^6 \ln h^{-1}), \quad x \in W_h \ \blacksquare$$

Отметим, что краевая задача для оператора Δ_τ расщепляется на две независимые подзадачи, что существенно облегчает ее решение. Аналогичные формулы для уточнения решений получены для лапласиана на кубической сетке и для бигармонического оператора.

Далее рассмотрена проблема разложения погрешности по степеням r^{-1} в задаче на собственные значения

$$\Phi(z) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbb{A}x - \lambda x \\ (x,x) - 1 \end{Bmatrix} = 0\ ,\ \mathbb{A}=\mathbb{A}^* \in \mathcal{L}(\mathbb{X} \Rightarrow \mathbb{X}),\ z=(x,\lambda), \qquad (20)$$

где параметр $r>0$ определяет уравнение для приближенного решения z_r

$$\Phi_r(z_r) = \begin{Bmatrix} \mathbb{A}_r x_r - \lambda_r \mathbb{P}_r x_r \\ (\mathbb{P}_r x_r, \mathbb{P}_r x_r) - 1 \end{Bmatrix} = 0\ ,\quad \mathbb{A}_r = \mathbb{P}_r \mathbb{A}\, \mathbb{P}_r\ , \qquad (21)$$

$$\mathbb{P}_r x(t) = \begin{cases} x(t)\ , & t \le r \\ 0, & t > r\ . \end{cases}$$

Справедлива следующая

Теорема 11. Пусть λ есть однократное, изолированное СЗ задачи (20), выполнены соотношения

$$\|\Phi'(z)^{-1}(\mathbb{E}-\mathbb{P}_r)\| \Rightarrow 0, \qquad r \Rightarrow 0$$

$$\|\mathbb{A}_r - \mathbb{A}\| \Rightarrow 0\ ,\ r \Rightarrow \infty\ ; \qquad \|\Phi_r(\mathbb{P}_r z)\| \Rightarrow 0, \quad r \Rightarrow \infty$$

и погрешность аппроксимации для оператора Φ_r, определенного в (21), на точном решении разлагается в ряд по степеням r^{-1}. Тогда справедливо представление

$$z_r - \mathbb{P}_r z = \mathbb{P}_r \Bigg(\sum_{k=1}^{N} c_k(z)\ r^{m_1 - k m_0} \Bigg) + \Omega_r\ ,\ \|\Omega_r\| = O\left(r^{-Nm_0+m_1}\right),$$

где числа c_k не зависят от r $\blacksquare$

Далее установлено, что условия теоремы 11 выполнены для оператора $\mathbb{A}_1$ из *главы* IV.

В заключение *главы* V обсуждается статус многосеточных итерационных процессов для эллиптических краевых задач, ГИУ первого и второго рода. С помощью численных экспериментов анализируется эффективность многосеточного итерационного алгоритма для сеточного уравнения Пуассона, основанного на разложении погрешности по степеням шага дискретизации. В целом результаты этой главы иллюстрируют большие возможности для оптимизации алгоритмов при организации вычислений на последовательности сеток.

ГЛАВА VI посвящена описанию модульных комплексов программ для решения задач магнитостатики, созданных на основе разработанных алгоритмов. Представлены результаты расчетов магнитных полей для ряда электрофизических установок в ускорительной физике.

Следует отметить, что при решении трехмерных краевых задач магнитостатики характерно не только формальное возрастание на порядок размерности дискретных алгебраических систем, но и принципиальное качественное и логическое усложнение алгоритмов, ухудшение их асимптотических вычислительных характеристик, значительное усложнение геометрии границ разрыва коэффициентов и правых частей.

На наш взгляд, предложенная в диссертации концепция построения вычислительных алгоритмов для квазилинейных эллиптических уравнений в комбинированной постановке, основанная на многоуровневой декомпозиции области и многосеточной организации расчетов, является одной из наиболее перспективных при решении этого класса задач и сочетает достоинства различных подходов.

К такому выводу приводит проведенный в диссертации подробный теоретический анализ всех основных этапов вычислительного процесса, на каждом из которых используются либо оптимальные, либо близкие к оптимальным методы. Это подтверждается также вычислительными экспериментами по решению задач предельной вычислительной сложности (например, с числом неизвестных $\sim 1.3\cdot 10^5$ и $\sim 5.0\cdot 10^3$ для разреженных и плотных матриц, соответственно) на ЭВМ ЕС-1061 и ЕС-1066. К числу важных качественных характеристик разработанных алгоритмов и программ можно отнести следующие: независимость скорости сходимости итераций от разброса коэффициентов уравнения и от числа подобластей, определяющих декомпозицию; "слабая" зависимость скорости сходимости от числа неизвестных в подструктурах; независимость скорости сходимости внешних (альтернирующих) итераций от шага дискретизации и характера нелинейности; симметричные постановки задач на всех основных уровнях; требуемая память порядка $O(N^3)$, где N - общее число неизвестных по одной переменной; возможность вычислений на последовательности сеток; глубокий естественный параллелизм.

Среди двумерных задач отметим расчеты аксиально-симметричного поля установки КРИОН (ЛВЭ), поля многосекционной магнитной ускорительной системы ЛИУ-30 (ЛНФ), а также дипольного и квадрупольного магнитов установки СПИН (ЛВЭ). Расчеты трехмерных полей как дипольного магнита спектрометра (ИЯИ АН СССР), так и магнита установки СПИН характерны тем, что в каждом из этих случаев область ферромагнетика Ω_μ имела ступенчатую конфигурацию, поэтому использовалась декомпозиция области $\Omega \supset \Omega_\mu$ на параллелепипеды. Проблема вычисления поля от свободных источников решалась на основе создания банка данных для стандартных элементов токовых обмоток. Расчеты указанных задач включали решение ГИУ на поверхности параллелепипеда на сеточных областях размерностей (16x16x64) и (32x32x32). В первом случае число "граничных" неизвестных, определяющее порядок плотной матрицы для ГИУ, есть N_3= 4608, а во втором N_3= 6144. Например, для задачи на сетке (16x16x64) уменьшение невязки в ε раз, где $10^{-4}\le\varepsilon\le10^{-3}$, требует 15 мин.$\le t \le$ 22 мин. времени ЭВМ ЕС-1061. Решение аналогичной задачи методом Гаусса потребовало бы по нашим оценкам более 200 часов на этой же ЭВМ. Решение внутренней нелинейной сеточной задачи методом декомпозиции области (программа CDD3) на последовательности сеток (12x14x14) $\Rightarrow$ (24x28x28) $\Rightarrow$ (48x56x56) с относительной точностью $\varepsilon=10^{-4}$ составляет на ЭВМ ЕС-1066 около 8-10 мин. Указанная точность в рабочей области магнита достигается при числе "нелинейных переменных" равном 48 (число подобластей в Ω_μ). Отметим, что расчет задачи на сетке (96x112x112) составит на той же ЭВМ около 40 мин. Общее число неизвестных на сеточной области в этом случае превосходит 10^6.

В *ЗАКЛЮЧЕНИИ* кратко сформулированы основные результаты. В *ПРИЛОЖЕНИИ* приведены рисунки, графики и таблицы,

иллюстрирующие результаты решения тестовых и прикладных задач.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Исследованы функциональные свойства нелинейного и линейного граничных операторов Пуанкаре-Стеклова, порождаемых квазилинейным эллиптическим оператором на липшицевой области и лапласианом в неограниченной области пространства двух (2-D) или трех (3-D) пространственных измерений.
2. Доказано, что квазилинейное эллиптическое уравнение в $\mathbb{R}^n$, $n=2,3$ с краевым условием на бесконечности сводится при помощи операторов Пуанкаре-Стеклова к нелинейному граничному уравнению метода декомпозиции области (МДО), определенному на вспомогательной поверхности Г, содержащей область нелинейности. Получены условия существования и единственности решения построенного уравнения, а также оценки погрешности при дискретизации последнего по методу Галеркина.
3. Доказана сходимость стационарных и ньютоновских итерационных методов решения граничного уравнения МДО, сводящихся к последовательному решению нелинейной внутренней эллиптической краевой задачи Дирихле и граничного интегрального уравнения (ГИУ) на поверхности Г.
4. Разработаны экономичные итерационные методы решения ГИУ теории потенциала на поверхности параллелепипеда (или цилиндра), требующие $O(N_0^3 \ln^2 N_0)$ арифметических действий, где N_0- размерность дискретизованной задачи по одной переменной.
5. Построен интегро-разностный метод решения ГИУ первого рода в двумерном случае, оптимальный по асимптотике числа арифметических действий, а также экономичный алгоритм решения ГИУ в (r,z)-геометрии на границе многосекционной структуры. Предложен быстрый метод вычисления сеточного оператора Пуанкаре-Стеклова для специальных поверхностей.
6. Предложена неполно-нелинейная формулировка для квазилинейных эллиптических уравнений в $\mathbb{R}^n$, $n=2,3$, сводящаяся к усреднению нелинейной зависимости в пределах фиксированного числа подобластей. Доказана сильная монотоность, липшиц-непрерывность и потенциальность построенного интегро-дифференциального оператора, получена оценка погрешности по отношению к исходной модели. Построены нелинейные уравнения на внутренних границах разрезов, определяющих декомпозицию области нелинейности, предложены эффек-

тивные итерационные методы их решения.

7. Построено семейство легко обратимых переобуславливающих операторов для конечно-элементных 2-D и 3-D эллиптических систем на основе декомпозиции области пересекающимися разрезами. Доказано, что число обусловленности переобусловленного оператора слабо зависит от размерности N пространства базисных функций в подобласти ($O(1+ln^2N)$ и $O(N^{1/3}(1+ln^2N))$ для 2-D и 3-D случаев, соотвественно) и не зависит от числа подобластей и разброса коэффициентов уравнения. Предложена конструкция эквивалентных по спектру переобуславливающих операторов, основанная на одновременном топологическом преобразовании подобластей в некоторые канонические фигуры.

8. Разработан экономичный метод клеточной декомпозиции области для решения конечно-разностных эллиптических задач в ступенчатых областях пространства $\mathbb{R}^n$, $n=2,3$, основанный на использовании обобщенного метода сопряженных градиентов с переобуславливателем, аналогичным случаю конечно-элементных уравнений (см. п.7).

9. Разработан и реализован в виде комплекса программ эффективный алгоритм решения частичной проблемы на собственные значения для гиперсингулярного квазипотенциального интегрального уравнения на полуоси $[0,\infty)$. Исследованы функциональные свойства интегро-дифференциальных операторов, получены оценки погрешности приближенных решений при дискретизации по методу Галеркина для кусочно-линейных элементов. Установлены условия разложимости погрешности в ряд по степеням r^{-1}, где $[0,r]$- интервал дискретизации задачи. Результаты численных расчетов спектров масс и ширин лептонных распадов для J/ψ - и Y-мезонов хорошо согласуются с экспериментальными данными и позволили уточнить статус физической модели.

10. а) Получены условия разложения погрешности по степеням шага дискретизации при аппроксимации уравнений с сильно монотонным оператором , а также в задаче на собственные значения для самосопряженного оператора. Предложен и обоснован метод повышения точности сеточных решений уравнения Пуассона, основанный на экстраполяции с помощью поворота системы координат.

б) Установлены разложения погрешности по степеням шага дискретизации в задаче на собственные значения с интегро-дифференциальным оператором, для класса интегральных уравнений второго рода, а также для нелинейных сингулярных интегральных уравнений типа Чу-Лоу. Проведены численные эксперименты, иллюстрирующие высокую практическую эффективность экстраполяций по Ричардсону в

перечисленных задачах, а также для эллиптических краевых задач.

11. На основе разработанных алгоритмов созданы комплексы специализированных программ для решения ГИУ на поверхности параллелепипеда и на границе многосекционной структуры в (r,z) -геометрии, для решения 2-D и 3-D линейных и неполно-нелиненых сеточных эллиптических уравнений методом декомпозиции области, а также для расчетов нелинейных двумерных и пространственных задач магнитостатики в комбинированной постановке.

12. Проведены расчеты аксиально-симметричного поля магнитной системы установки КРИОН (ЛВЭ ОИЯИ), трехмерного поля спектрометрического магнита низкой энергии Московской мезонной фабрики (ИЯИ АН СССР), а также ряда других двумерных и пространственных магнитных полей электрофизических установок ОИЯИ.

<u>ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ</u>

1. Жидков Е.П., Нгуен М., Хоромский Б.Н. Повышение точности приближенных решений нелинейного сингулярного интегрального уравнения типа Чу-Лоу. -ЖВМ и МФ, т.21, №4, 1981, стр.962-969.

2. Жидков Е.П., Нгуен М., Хоромский Б.Н. Уточнение приближенных решений нелинейных операторных уравнений. Препринт ОИЯИ , Р5-12979, Дубна, 1979, 11 стр.

3. Нгуен М., Хоромский Б.Н., Ямалеев Р.М. Уточнение разностных решений задачи на собственные значения для интегро-дифференциальных уравнений.Дифф.Уравнения, т.16, №7, 1980, стр.1293-1302.

4. Жидков Е.П., Нгуен М., Хоромский Б.Н. Уточнение приближенных решений и численное определение верхней границы константы связи системы уравнений $\pi\pi$-рассеяния. Препринт ОИЯИ,Р5-80-259, Дубна, 1980, 11 стр.

5. Жидков Е.П., Нгуен М., Хоромский Б.Н. Некоторые методы приближенного решения уравнений типа Лоу.- в сб. Алгоритмы и программы для решения некоторых задач физики. ОИЯИ-ЦИФИ (Будапешт) в.3, 1979, 26 стр.

6. Айрян Э.А., Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Асимптотика решений разностной задачи для уравнения Пуассона в ступенчатых областях. Препринт ОИЯИ, Р5-80-617, 20 стр.

7. Хоромский Б.Н. Метод повышения точности разностных решений краевых задач с оператором, инвариантным относительно поворота системы координат. Препринт ОИЯИ, Р5-80-736, 15 стр.

8. E.A.Ayrjan, B.N.Khoromskij, E.P.Zhidkov. Fast relaxation method for solving the difference problem for the Poisson equation on a sequence of grids. Comp.Phys.Commun. 29(1983), pp.125-130.

9. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Об оптимизации итерационных процессов на последовательности сеток. Препринт ОИЯИ, 5-81-783, Дубна, 1981, 6 стр.

10. Хоромский Б.Н. Интегро-разностный метод решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа. ЖВМ и МФ, т.24, №1, 1984, стр.53-64.

11. Айрян Э.А., Жидков Е.П., Федоров А.В., Хоромский Б.Н., Шелаев И.А., Юдин И.П., Юлдашев О.И. Алгоритмы и программы численного моделирования стационарных магнитных полей электрофизических установок.-В сб.:Алгоритмы и программы для решения некоторых задач физики. ОИЯИ-ЦИФИ (Будапешт), в.5, 1987, стр.2-26.

12. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Методы повышения точности приближенных решений задач математической физики. В сб.: Алгоритмы и программы для решения некоторых задач физики. ОИЯИ-ЦИФИ (Будапешт) в.4, 1983, стр. 2-27.

13. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Юлдашев О.И. Решение краевых задач для уравнения Лапласа методом граничных интегральных уравнений. Препринт ОИЯИ, Р11-82-659, 19 стр.

14. Жидков Е.П., Карташев С.В., Овсянников В.П., Полякова Р.В., Хоромский Б.Н. Численное моделирование сверхпроводящей магнитной фокусирующей системы. Сообщение ОИЯИ, Р11-88-225, Дубна, 1988, 7 стр.

15. Айрян Э.А., Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Юлдашев О.И. Метод альтернирования для одного класса эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами в бесконечной области. Препринт ОИЯИ Р11-82-871, Дубна, 1982, 14 стр.

16. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Итерационный метод решения краевых задач для одного класса эллиптических уравнений. Препринт ОИЯИ, Р11-83-329, Дубна, 1983, 10 стр.

17. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. О структуре матриц в методе граничных интегральных уравнений для оператора Лапласа. Препринт ОИЯИ, Р11-83-596, Дубна, 1983, 8 стр.

18. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Решение граничных интегральных уравнений для оператора Лапласа методом неполного обращения. Препринт ОИЯИ, Р11-83-596, Дубна, 1983, 10 стр.

19. Айрян Э.А., Хоромский Б.Н., Юдин И.П., Юлдашев О.И. Программа решения квазилинейного уравнения дивергентного типа в областях ступенчатой конфигурации.Препринт ОИЯИ, 11-84-802, Дубна, 1984, 7стр.

20. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Многосеточный алгоритм решения частичной проблемы на собственные значения для класса матриц типа теплицевых. Препринт ОИЯИ, Р11-84-802, Дубна, 1984, 7 стр.

21. Егоров А.В., Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Блочные итерационные процессы численного решения граничных интегральных уравнений для оператора Лапласа на поверхности параллелепипеда. Препринт ОИЯИ,Р11-84-795, Дубна, 1984, 9 стр.

22. Егоров А.В., Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Альтернирующие процессы численного решения краевых задач магнитостатики в случае трех пространственных переменных. Препринт ОИЯИ Р11-85-371, Дубна, 1985, 16 стр.

23. Жидков Е.П., Сидоров А.В., Скачков Н.Б., Хоромский Б.Н. Численное исследование интегрального квазипотенциального уравнения для связанных состояний. Препринт ОИЯИ, Р11-85-465, Дубна, 1985, 15 стр.

24. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Юлдашев О.И. Численное решение осесимметричных краевых задач методом граничных интегральных уравнений. В сб.:V Международное совещание по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. ОИЯИ, Д10, 11-84-818, Дубна, 1984, 4стр.

25. Жидков Е.П., Матора И.М., Саввин В.А., Хоромский Б.Н., Юлдашев О.И. Расчет стационарного магнитного поля многосекционной системы линейного индукционного ускорителя. Журнал технической физики, т.57, в.3, 1987 г., стр.483-492.

26. Zhidkov E.P., Khoromsky B.N. Boundary integral equations on special surfaces and their applications. Sov.J.Numer.Anal.Math. Modelling, North Holland, Antwerpen,1988, v.2, №6, pp.463-488. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Граничные интегральные уравнения на специальных поверхностях и их приложения. Препринт ОВМ АН СССР , №137, Москва, 1986, 39 стр.

27. Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н. Экономичный численный метод учета краевого условия на бесконечности при решении пространственных задач магнитостатики на основе скалярного потенциала. 1 Общий случай. Сообщение ОИЯИ, Р11-86-230, 20 стр. 11 Учет пространственных симметрий. Модельные расчеты. Сообщение ОИЯИ, Р11-86-333, 20 стр.

28. Айрян Э.А., Жидков Е.П., Полякова Р.В., Хоромский Б.Н., Шелаев И.А., Юдин И.П., Юлдашев О.И. Численное моделирование на последовательности сеток двумерных полей магнитов синхротрона СПИН. Сообщение ОИЯИ, Р11-86-80, Дубна, 1986, 14 стр.

29. Жидков Е.П., Никонов Э.А., Хоромский Б.Н. Асимптотическое представление решений спектральной задачи для интегродифференциального оператора на полуоси. Труды всесоюзного симпозиума "Современные проблемы математической физики", Тбилиси, апрель 1987г., т.1, Изд-во Тбилисского университета, Тбилиси-1987, стр. 239-246.

30. Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н. К теории комбинированных методов в нелинейных задачах магнитостатики. Сообщение ОИЯИ, Р11-87-501, Дубна, 1987, 19 стр.

31. Жидков Е.П., Сидоров А.В., Скачков Н.Б., Хоромский Б.Н. Численное решение квазипотенциального уравнения с нелинейным вхождением спектрального параметра. Сообщение ОИЯИ Р11-87-261, Дубна, 1987, 8 стр.

32. Жидков Е.П., ..., Хоромский Б.Н. и др. Расчеты магнитных полей с использованием комбинированной постановки. В кн. Труды Одиннадцатого Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, октябрь, 1988 -

ОИЯИ, Д9-89-52, Дубна, 1989, т.1, стр. 354-360.

33. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Численные алгоритмы на последовательности сеток и их приложения в задачах магнитостатики и теоретической физики. В сб."Физика элементарных частиц и атомного ядра". 1988, том 19, вып. 3, стр.622-668.

34. Жидков Е.П., Никонов Э.А., Хоромский Б.Н. Численное решение спектральных задач, содержащих интегро-дифференциальный оператор с ядром вида $\partial^2 ln|s-t|\partial s dt$. В сб. Труды Университета дружбы народов. М.:Изд-во УДН, 1989,с.15.

35. Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н., Юдин И.П. Численное моделирование пространственного распределения краевого поля синхротронного дипольного магнита. Математическое моделирование т.2, №5, 1990, стр.8-17.

36. Zhidkov E.P., Nikonov E.G., Sidorov A.V., Skachkov N.B., Khoromskij B.N. Numerical solution of integral equations, describing mass spectrum of vector mesons. Preprint JINR, E11-88-494, Dubna, 1988, 4p.

37. Хоромский Б.Н. Краевые задачи магнитостатики в неполно-нелинейной постановке и методы их решения. Исследование нелинейной проблемы. Сообщение ОИЯИ, Р11-88-480, Дубна, 1988, 21 стр.

38. Хоромский Б.Н. Краевые задачи магнитостатики в неполно-нелинейной постановке и методы их решения. Построение переобуславливателей. Сообщение ОИЯИ, Р11-88-784, Дубна, 1988, 29 стр.

39. Khoromskij B.N., Mazurkevich G.E., Zhidkov E.P. Iterative methods of domain decomposition with cross-points for the solution of discrete elliptic problems. Preprint JINR, E5-89-174, Dubna,1989, 23p.

40. Khoromskij B.N. Quasi-linear elliptic equations in the incomplete nonlinear formulation and methods for their preconditioning. Preprint JINR, E5-89-598, Dubna, 1989,18 pp.

41. Gregus M., Khoromskij B.N., Mazurkevich G.E., Zhidkov E.P. On approximation of nonlinear boundary integral equations for the combined method. In.: Boundary Element Methods XI, 1989, Springer-Verlag, vol.2, (ed. Brebbia C.A.), Proc.BEM 11 Conf., held in Cambridge, USA, August, 1989.

42. Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н. Комбинированные методы для квазилинейных эллиптических уравнений в неограниченной области. In Proc. of International Conference on Numerical Methods and Applications,held in Sofia, Bulgaria, August, 1988 pp.197-206.

43. Жидков Е.П., Никонов Э.А., Хоромский Б.Н. Решение проблемы собственных значений для одного класса гиперсингулярных квазипотенциальных уравнений. Математическое моделирование,т.1, №11, 1989, стр.77-91.

44. Жидков Е.П., Никонов Э.А., Хоромский Б.Н. Асимптотические оценки погрешности аппроксимации методом Галеркина для одного

класса квазипотенциальных уравнений. ЖВМ и МФ, т.30, №6 1990, стр.826-836.

45. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Некоторые экономичные алгоритмы с использованием матриц типа теплицевых. В кн.: Вычислительные процессы и системы, т.6, Москва, Наука, 1988, стр.134-144.

46. Khoromskij B.N., Mazurkevich G.E., Zhidkov E.P. Domain decomposition method for magnetostatic nonlinear problems in combined formulation. Sov.J.Numer.Anal.Math.Modelling. Vol.5,, №2, 1990, pp.111-136.

47. Айрян Э.А., Жидков Е.П., Федоров А.В., Хоромский Б.Н., Шелаев И.А., Юдин И.П., Юлдашев О.И. Использование метода граничных интегральных уравнений для расчета распределения двумерного поля "открытых" магнитных систем ускорителей. В сб.: Интегральные уравнения в прикладном моделировании. Тезисы докладов 2-ой Республиканской научно-технической конференции - Киев: Институт электродинимики АН УССР, 1986, ч.1, стр. 55-56.

48. Айрян Э.А., Жидков Е.П., Федоров А.В., Хоромский Б.Н., Шелаев И.А., Юдин И.П., Юлдашев О.И. Прецизионные расчеты двумерных полей магнитов синхротрона СПИН. Труды Десятого Всесоюзного Совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, ОИЯИ, Д9-87-109, 1987, т.11, стр.316-319.

49. Айрян Э.А., Жидков Е.П., Федоров А.В., Хоромский Б.Н., Шелаев И.А., Юдин И.П., Юлдашев О.И. Численные алгоритмы расчета магнитных систем ускорителей заряженных частиц. В сб.: "Физика элементарных частиц и атомного ядра". М.:Атомиздат 1990, том 21, вып.1, стр.251-307.

50. Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н. Об одном быстром методе решения сеточного уравнения Лапласа в прямоугольных областях. Препринт ОИЯИ, Е11-89-811, Дубна, 1989, 10 стр.

51. Khoromskij B.N. A preconditioning technique for the solution of 3-D elliptic problems by substructuring with cross-lines. Preprint JINR, E11-90-181, Dubna, 1990, 37 pp.

52. Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н., Юдин И.П. Численное моделирование пространственного распределения поля дипольного магнита спектрометра. Препринт ОИЯИ, Р11-90-141, Дубна, 1990, 12 стр.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 марта 1991 года.