

Г-443

**ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ**  
**ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ**  
**И АВТОМАТИЗАЦИИ**

11 - 9013

**ГЕТМАНОВ**  
**Борис Сергеевич**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**  
**НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ**  
**В ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ**  
**И РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ КОЛЬЦАХ**

Специальность - 01.04.02 - теоретическая  
и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

(Диссертация написана на русском языке)

Дубна 1975



Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук

В. Г. МАХАНЬКОВ

Официальные оппоненты:  
доктор физико-математических наук

В. Е. ЗАХАРОВ

кандидат физико-математических наук

Э. А. ПЕРЕЛЫШТЕЙН

Ведущее научно-исследовательское учреждение - Харьковский физико-технический институт.

Автореферат разослан "5" августа 1975 года.

Защита диссертации состоится "19" сентября 1975 года в \_\_\_\_\_ часов на заседании Ученого совета Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ, г. Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета  
кандидат физико-математических наук

Т. П. ПУЗЫРИНА

11 - 9013

ГЕТМАНОВ  
Борис Сергеевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ  
В ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ  
И РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ КОЛЬЦАХ

Специальность - 01.04.02 - теоретическая  
и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

(Диссертация написана на русском языке)

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

Математическое моделирование в последние годы становится мощным орудием исследований в плазме и плазмоподобных средах. Как справедливо отмечено в /1/, "вероятно, не существует раздела физики, в котором была бы более очевидна необходимость в численных методах, чем в физике плазмы". Прогресс в этой области связан как с повышением мощности и возможностей ЭВМ, так и с развитием численных методов исследований, что должно привести к более адекватному и точному моделированию.

Сам факт появления термина "численный эксперимент" указывает на промежуточное положение метода математического моделирования между чисто теоретическим (аналитическим) и экспериментальными методами. Однако численный эксперимент обладает по сравнению с традиционным физическим экспериментом такими немаловажными преимуществами, как дешевизна и относительная простота.

Диссертация посвящена исследованию некоторых процессов в турбулентной плазме и релятивистских электронных кольцах — процессов, в которых определяющую роль играют нелинейные взаимодействия. Соответствующие нелинейные уравнения, описывающие эти процессы, как правило, являются интегродифференциальными и многомерными, и попытки их аналитического исследования обычно не выходят за рамки качественных оценок. Поэтому на первый план выступает численное моделирование, которое — это необходимо подчеркнуть — у нас является не самоцелью, а средством получения физических содержательных результатов.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав и заключения.

Одним из важных вопросов теорем турбулентности является проблема спектров турбулентности плазмы.

В первой главе диссертации изучаются спектры слабой ( $\omega_0/nT \ll 1$ ) изотропной ленгмировской турбулентности. Здесь  $\omega_0$  — плотность энергии турбулентных пульсаций,  $nT$  — плотность тепловой энергии плазмы ( $n$  — плотность,  $T$  — характерная температура плазмы). В области волновых чисел  $0 < k < k_{\text{max}}$  ( $k_{\text{max}} = (m_e/m_i)^{1/2} (1 + T_e/T_i)^{-1/2} \omega_{pe}/v_e$ ;  $T_e, T_i$  — электронная и ионная температура соответственно,  $\omega_{pe}$  — плазменная частота,



$v_e$  - тепловая скорость электронов) эволюция спектральной плотности энергии турбулентности  $W_k$  (функции распределения плазмонов) описывается интегродифференциальным уравнением /2/

$$\frac{\partial W_k(t)}{\partial t} = \gamma_k W_k - \nu W_k + R^{(3)}(k) + R^{(4)}(k) \quad (R^{(3)} = \gamma_k^{(3)} W_k) \quad (1)$$

Здесь  $\gamma_k$  - линейный инкремент генерации,  $\nu$  - декремент затухания плазменных колебаний,  $\gamma_k^{(2)} = \int Q(k, k_1) W_{k_1} dk_1$  - нелинейный инкремент перекачек на ионах (обязанный индуцированному рассеянию на ионах плазмы),  $R^{(4)} \sim W_k^3$ , представляющий собой многомерный интеграл с громоздким ядром, отвечает за четырёхплазмонное взаимодействие. Уравнение (2) для изотропной ( $\partial W_k / \partial \theta = 0$ ) функции  $W_k$  изучалось численными методами в /3/ в области  $k_* = \frac{\omega_{pe}}{3v_e} < k < k_*$  ( $v_i$  - температура ионов), в которой вклад члена  $R^{(4)}$  пренебрежимо мал. При этом было показано, что эволюция распределений произвольной формы (волновых пакетов) за счёт индуцированного рассеяния на ионах приводит к перекачке пакетов в области малых  $k$ , и в районе  $k = k_*$  пакеты принимают достаточно стандартную форму, которую можно аппроксимировать "гаусоподобными" распределениями типа  $\alpha \exp[-(k-k_0)^2 / 2\Delta k^2]$ ,  $\alpha k^2 \exp[-(k-k_0)^2 / 2\Delta k^2]$  с полушириной  $\Delta k \sim k_*$ . В области  $k < k_*$  важен учёт четырёхплазмонных взаимодействий, которые, согласно существовавшему мнению /2/, способны "разрасывать" колебания по всей области волновых чисел, препятствуя накоплению их в области  $k \sim 0$ , и обеспечить существование стационарного состояния /2,4/.

В § 1 первой главы численными методами изучается эволюция изотропной спектральной функции  $W_k$  в области  $0 < k < k_*$  (уравнение (1)) в пренебрежении членами, описывающими генерацию и диссипацию с целью выявить в "чистом" виде влияние четырёхплазмонных взаимодействий на эволюцию спектров. В этой области при  $\partial W_k / \partial \theta = 0$  в членах  $R^{(3)}$  и  $R^{(4)}$  можно провести интегрирование по углам, и в безразмерных переменных

$$x = k/k_*; \quad W_{k0} = k_* W_k / W_0; \quad \tau = \gamma t \quad (\gamma = \frac{\sqrt{2\pi}}{96} \frac{W_0}{nT} \omega_{pe})$$

уравнение (1) становится инвариантным относительно всех плазменных параметров, кроме  $W_0/nT$  (при  $T_e = T_i$ ,  $\nu = \gamma_k = 0$ ).

Уравнение (1) в безразмерных переменных (как и все последующие) решалось на ЭМ разностным методом. Область изменения пе-

ременной  $x$  разбивалась на 100 точек; интеграл  $R^{(4)}$  (сводящийся к двумерному за счёт наличия  $\delta$ -функции в ядре) считался по методу Гаусса. Для производной по времени  $\tau$  была выбрана простая явная разностная аппроксимация, ввиду необходимости вычислять большое количество интегралов на каждом слое  $\tau$ . В процессе счёта контролировалось сохранение  $I_1 = \int W_k dx = 1$  (сохранение числа плазмонов),  $I_2 = \int R^{(3)} dx = I_3 = \int R^{(4)} dx = 0$  (следствие антисимметрии подинтегральных выражений); при этом  $I_1$  менялся не более, чем на 1,5%,  $I_2$  и  $I_3$  отличались от нуля не более, чем на  $10^{-8}$  и  $10^{-3}$  соответственно. Начальный пакет выбирался в виде  $W_{k0} = \alpha x^2 \exp[-(x-x_0)^2 / 2\Delta x^2]$  с полушириной  $\Delta x_0 = 1/\sqrt{2}$ , нормой  $\int W_k dx = 1$  и с центром в  $x=1$  ( $k_0 = k_*$ ). Результаты счёта представлены на графиках, отражающих эволюцию спектральной функции и членов  $R^{(3)}(x)$ ,  $R^{(4)}(x)$ .

Основной вывод состоит в том, что четырёхплазмонное рассеяние не может затормозить трансформацию энергии колебаний в область малых  $k$ , и, в частности, обеспечить существование стационарного спектра, так как его влияние на эволюцию спектра аналогично влиянию процесса перекачки на ионах. Для получения стационарного состояния необходим учёт процессов диссипации (и генерации) колебаний.

В § 2 первой главы аналитическими методами рассмотрена модельная задача, которой оказалась решаемой точно и до конца - задача о существовании стационарного состояния слабой изотропной ленгмювской турбулентности в пренебрежении влиянием четырёхплазмонных взаимодействий (такое приближение представляется оправданным в свете результатов § 1, и всегда справедливо в области  $k > k_*$ ), но с учётом в общем виде процессов генерации и затухания колебаний. Задача решается методами, развитыми в работах /5,6/. Исходное уравнение, которому должен удовлетворять стационарный спектр, получается из (1), в котором положено  $\partial_t W_k = 0$ ,  $R^{(4)} = 0$ :

$$\bar{\gamma}_k + \int_0^1 Q(k, k_1) W_{k_1} dk_1 = 0 \quad (2)$$

Здесь  $\bar{\gamma}_k$  описывает в общем виде все возможные процессы генерации и диссипации колебаний. Единственное требование на  $\bar{\gamma}_k$ :

$$\int \bar{\gamma}_k W_k dk = 0$$

В силу наличия в ядре  $\Theta(k, k_*)$  ступенчатых функций  $\Theta(k-k_*)$  уравнение (2) представляет собой уравнение Вольтерра I-го рода. Прямым дифференцированием его можно свести к дифференциальному уравнению, которое, будучи дополненным краевыми условиями, вполне эквивалентно исходному уравнению (2).

Строго показано, что итоговая однородная ( $\bar{y}_k=0$ ) краевая задача не имеет решений кроме тривиального, ввиду несовместимости произвольной линейной комбинации решений однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с граничными условиями (по существу эквивалентными требованию сходимости интегралов в (2)). Неоднородная краевая задача имеет формальное решение:

$$W_x = \frac{2}{17} x^{-3/2} \left[ x^{\sqrt{17}/2} \int x^{(4-\sqrt{17})/2} g(x) dx - 2 \int x^{-1/2} g dx + x^{-\sqrt{17}/2} \int x^{(4+\sqrt{17})/2} g dx \right], \quad (3)$$

где  $g(x)$  есть функция  $\bar{y}(x)$  и её производных. Это решение может удовлетворять уравнению (2), если  $\bar{y}(x)$  (и вместе с ней  $g(x)$  и  $W_x$ ) достаточно быстро спадают при  $x \rightarrow 0$  и  $x \rightarrow \infty$ . Таким образом, показано, что баланс процессов генерации, перекачки на ионах и диссипации колебаний может обеспечить существование стационарного спектра изотропной ленгмювской турбулентности, дающего формулу (3).

В первой главе диссертации рассматриваются изотропные задачи. В реальных условиях турбулентность, генерируемая в результате различных неустойчивостей, является обычно резко анизотропной. Основным механизмом, способным привести к быстрой изотропизации турбулентности, является индуцированное рассеяние на ионах плазмы, которое одновременно приводит к перекачке энергии в область малых волновых чисел. В области  $k < k_*$  скорость последнего процесса весьма велика (интегральная перекачка), поэтому колебания, рождающиеся при  $k < k_*$ , должны рассматриваться как анизотропные в течение всего времени дальнейшей перекачки. Если же неустойчивость приводит к возникновению достаточно коротковолновых колебаний ( $k_* \ll k < k_d = \omega_{pe}/v_e$ ), то при их рассеянии на модах процесс изотропизации может конкурировать с процессом "покраснения" спектра. За время трансформации спектра из области генерации при  $k \sim k_g$  до  $k \sim k_*$  колебания либо успевают изотропизоваться, либо нет. В первом случае спектр можно считать изотропным, во втором случае считать колебания изотропными нельзя.

Представляет значительный интерес выяснить границы изотропного приближения, оценить скорость изотропизации и проверить распространенное мнение [2,7], что в области  $k \gg k_*$  скорость изотропизации значительно превышает скорость перекачки энергии по спектру.

Во второй главе диссертации изучаются анизотропные динамические задачи.

В § I рассматривается проблема скорости изотропизации в "чистом" виде, в § 2-3 - конкретные физические задачи, в которых важен учёт угловой зависимости спектральной функции.

Уравнения, описывающие эволюцию анизотропных распределений турбулентных волн, являются нелинейными трёхмерными интегродифференциальными. Их решение численными методами требует значительных затрат машинного времени (20-50 часов на один вариант на БЭСМ-6 или СДС-6200) и необходимости представлять в удобной и компактной форме полученные результаты, ввиду большого объёма получаемой информации.

Автором разработана стандартная программа решения на ЭВМ таких уравнений, с возможностью надежного продолжения счёта в течение длительного времени и вывода результатов на графопостроитель "Calcomp", для которого одновременно написана программа представления в наглядном виде трёхмерных объектов. Алгоритм решения динамических уравнений идейно близок описанному выше. Трёхмерные интегралы считались повторным интегрированием по методу Симпсона; для предотвращения численных неустойчивостей организована автоматическая подстройка шага по времени; контроль за точностью вычислений осуществлялся проверкой сохранения инвариантных интегралов.

Процесс трансформации энергии ленгмювской турбулентности по углам и волновому числу (в сферических координатах) в области  $k_* \ll k < k_d$  описывается уравнением (I), в котором положено  $\gamma^2 = \nu = R^{(4)} = 0$ . Предполагается, что существует некоторая ось симметрии, от которой отсчитывается ось  $\Theta$ ; тогда спектр можно выбрать не зависящим от угловой переменной  $\Theta$ :  $W_k = W_{k\Theta}$ .

В безразмерных переменных  $\chi = k/k_*$ ;  $W_{k\Theta} = 2\pi k_*^2 \sin \Theta W_{k\Theta}/W_0$ ;  $\tau = \gamma t$  ( $\gamma = \frac{\omega_{pe}}{32 \pi n T} \frac{W_0}{n T}$ ) уравнение становится инвариантным относительно всех плазменных параметров.

Анализ вероятности индуцированного рассеяния на ионах  $U_{K_0}$ , входящей в ядро  $Q(K, \vec{k}_2)$  уравнения (I), показывает, что наиболее вероятным является рассеяние плазмона с изменением модуля его импульса на величину  $\Delta k = 2k_*$  и угла на  $\pi$ . Отсюда можно сделать качественные выводы о характере эволюции различных спектров ленгмюровских волн в результате их индуцированного рассеяния на ионах. В частности, для "игольчатого" спектра (пакета волн, сосредоточенного вблизи  $\Theta = 0$  или  $\Theta = \pi$ ), узкого по  $K$  и  $\Theta$  ( $\Delta K_0 \ll K_*$ ,  $\Delta \Theta_0 \ll 1$ ), предсказано явление нелинейного отражения и запираия в ограниченной области пространства, возникшего вследствие сателлитного характера перекачки по углу и волновому числу, с расстоянием между сателлитами  $\Delta K = 2K_*$ ,  $\Delta \Theta = \pi$ . Для широкого по  $K$  ( $\Delta K_0 > 2K_*$ ) "игольчатого" спектра перекачка должна носить квазиодномерный интегральный характер с медленным уширением по углам. Скорость расплывания пакета по углам, а также эволюция спектра в промежуточном случае  $\Delta K_0 \sim K_*$  могут быть получены только численными методами.

В § I главы второй исследуется численными методами динамика ленгмюровской турбулентности с модельными начальными данными с целью выявить характерные черты эволюции спектров за счёт индуцированного рассеяния на ионах. Начальное распределение задавалось гауссоподобным по обоим переменным  $K$  и  $\Theta$  с тремя вариантами начальных данных:

1)  $\Delta K_0 \ll K_*$ ; 2)  $\Delta K_0 \sim K_*$ ; 3)  $\Delta K_0 \gg K_*$ , при  $K_0 = 10K_*$ ,  $\Theta_0 = 0$ ,  $\Delta \Theta_0 = 0.1$ , т.е. резко анизотропное по углу "игольчатое" распределение. Для того, чтобы количественно охарактеризовать степень анизотропии и скорость изотропизации, введена функция "анизотропия"  $\mu$ :

$$\mu(W_{x\theta}, \tau) = \frac{1}{2W_0} \int |W_{x\theta}(\tau) - \bar{W}_x(\tau)| dx d\theta, \quad (4)$$

где  $W_0(\tau) = \int W_{x\theta} dx d\theta$  - норма функции  $W_{x\theta}$ ,  
а  $\bar{W}_x = \int W_{x\theta} d\theta / \pi$  - усреднённое по углу распределение с той же нормой. Введённая таким образом величина  $\mu$  является интегральной характеристикой равномерности распределения по углу. Разумно считать распределение  $W_{x\theta}$  физически изотропным, если  $\mu(W_{x\theta}) < 0.1$ . Естественно также говорить, что изотропизация

происходит быстрее перекачки по  $K$ , если распределение станет физическим изотропным раньше, чем центр пакета  $K_0$  окажется вблизи  $K = K_*$ . Ясно, что хотя скорость изотропизации может и не зависеть от начальных данных ( $K_0, \Theta_0, \Delta K_0, \Delta \Theta_0$ ), сам факт изотропизации сильно зависит от начальных условий. Задача поэтому состоит во-первых, в оценке скорости изотропизации  $\frac{d\mu}{d\tau} = \frac{d\mu}{dK} \frac{dK}{d\tau}$  ( $dK/d\tau$  - скорость смещения центра пакета), а во-вторых, в нахождении областей начальных данных, при которых происходит, или наоборот, не происходит физическая изотропизация.

Результаты счёта на ЭМ представлены на графиках, отражающих динамику изменения спектральной функции  $W_{x\theta}$ .

Эволюция распределения с  $\Delta K_0 \ll K_*$  близка к полученной выше качественными методами - она происходит через систему сателлитов в пространстве  $(K, \Theta)$  в углах  $0$  и  $\pi$  поочередно, с расстоянием  $2K_*$  между сателлитами и с медленным расплыванием пакета по

$\Theta$ . Время запираия пакета волн оценивается как  $\tau_{30\%} \approx 4$ . В случае  $\Delta K_0 \sim K_*$  происходит смешанная интегрально-сателлитная перекачка, и полного запираия пучка не происходит. Представлены графики эволюции анизотропии  $\mu(W_{x\theta}, \tau)$ , из которых можно определить среднюю скорость изотропизации, которая в обоих случаях оценивается как  $d\mu/dK_0 \approx 1.25 \cdot 10^{-2} (K_*)^{-1}$ ;  $d\mu/d\tau \approx 2 \cdot 10^{-4}$ , т.е. очень мала. Грубая экстраполяция полученных результатов на всю область изменения начальных данных приводит к выводу, что в реальных физических условиях в области  $K > K_*$  существование физически изотропных спектров слабой ленгмюровской турбулентности является весьма проблематичным.

В § 2 второй главы рассматривается конкретная физическая задача - эволюция слабой ленгмюровской турбулентности, возбуждаемой релятивистским электронным пучком, за счёт индуцированного рассеяния на ионах. Эта задача (так же как рассматриваемая ниже задача об эволюции ионно-звуковой турбулентности, возбуждаемой лазерным пучком) представляет значительный интерес в связи с проблемой турбулентного нагрева плазмы до термоядерных температур. Изложены конкретные физические ограничения (отсутствие обратного тока, пучок "монохроматический" и сильно релятивистский, начальный угловой разброс пучка мал), при которых уравнение (I) с  $R^{(4)} = 0$  описывает корректную математическую модель рассматри-

ваемого процесса. Характер зависимости инкремента неустойчивости от угла  $/8,9/$  и индуцированный характер линейной стадии неустойчивости приводит к сильной анизотропии возникающего распределения ленгмюровских колебаний с резким максимумом пакета по углу в  $\Theta \sim \frac{\pi}{2}$ , но с отсутствием колебаний в углах, больших  $\frac{\pi}{2}$ . Численное исследование всего процесса эволюции колебаний показало, что перекачка энергии турбулентности в область малых волновых чисел носит сначала сателлитный, а затем интегральный характер (задача считалась с параметрами, при которых центр начального распределения находится в  $k_0 \approx 6 k_*$ ). В процессе нелинейной эволюции происходит быстрая симметризация распределения по углу (в этом смысле происходит изотропизация), но в целом оно остаётся сильно анизотропным. Функция "анизотропии"  $\mu(t)$  быстро возрастает до значения  $\sim 0,8$  на линейной стадии развития неустойчивости, а затем её амплитуда практически не меняется в течение всей нелинейной стадии эволюции неустойчивости, за время которой пакет сместился в область  $k \sim 0$ . Большой объём энергии турбулентных волн, накапливающихся в области малых волновых чисел, приводит к возникновению сильного нелинейного декремента затухания в области генерации колебаний и практически - к полному срыву неустойчивости (рассматривалось только обычное столкновительное затухание). Таким образом, в данной модели продемонстрировано явление нелинейной стабилизации неустойчивости.

В § 3 главы второй исследуется проблема аномального рассеяния лазерного излучения на ионозвуковых волнах ( $S$ -волнах), возбуждаемых в плазме этим излучением. Эффективность турбулентного нагрева плазмы пучком поперечных электромагнитных волн ( $t$ -волн) за счёт возбуждения ионного звука (процесс  $t \rightarrow t' + S$ ) может быть значительно понижена за счёт аномального рассеяния  $t$ -волн на  $S$ -волнах, если генерируемая  $S$ -турбулентность изотропна. Качественные оценки показали, что при малом, но отличном от нуля угловом разбросе падающего излучения возбуждаемые  $S$ -колебания могут долго оставаться неизотропными. Численное исследование динамики  $S$ -турбулентности за счёт индуцированного рассеяния на ионах, возбуждаемой лазерным излучением и описываемой уравнением, аналогичным уравнению (I) (с инкрементом неустойчивости, полученном в  $/10/$ ), подтвердило качественные оценки. Поведение анизотро-

пии  $\mu(t)$  возбужденного распределения  $S$ -волн в ходе эволюции весьма похоже на поведение анизотропии в задаче, описанной в предыдущем параграфе.

Исследования различных моделей, проведенные во 2-й главе, позволяют сделать принципиальный вывод - резко анизотропные распределения турбулентных волн являются скорее правилом, чем исключением при рассмотрении не слишком длительных процессов (когда колебания ещё не сконденсированы в области  $k \sim 0$ ). В этом смысле, возможно, во многих задачах может оказаться более разумным приближение  $W(\theta) \sim S(\theta - \theta(k))^{1/23}$ , чем традиционное  $\partial W(\theta)/\partial \theta = 0$ .

Третья и четвертая главы диссертации посвящены изучению продольной неустойчивости релятивистских электронных колец (РЭК). Одним из основных препятствий в осуществлении идеи коллективного ускорения ионов с помощью РЭК  $/11/$  является склонность последних к разного рода неустойчивостям  $/12/$ , из которых наиболее опасной является продольная (азимутальная), которая носит гидродинамический характер и проявляется в группировке частиц кольца в сгустки ("банчи") (неустойчивость "отрицательной массы" - НОМ) и когерентном индуцированном синхротронном излучении ("радиационная неустойчивость"). Неустойчивость носит пороговый характер, связанный с разбросом частиц в кольце по энергии (и радиусу, ввиду релятивистской связи частоты вращения и энергии  $\omega = e\hbar/E$ ). При работе в режиме ниже порога неустойчивости эффективность ускорения с помощью РЭК не превышает эффективности, достигнутой на ускорителях обычного типа  $/12/$ . С другой стороны, уравнение для функции распределения частиц является нелинейным, и можно ожидать, что так же, как и в случае процессов в турбулентной плазме нелинейные взаимодействия могут ограничить уровень полей возмущения, замедлить скорость процесса и даже сорвать неустойчивость или привести к нелинейной стабилизации её. В модели тонкого кольца  $/13/$ , которая рассматривается в диссертации, можно ограничиться рассмотрением одномерной задачи - кинетического уравнения

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \dot{w} \frac{\partial \psi}{\partial w} = 0 \quad (5)$$

в фазовом пространстве азимутального угла  $\vartheta$  и соответствующего

обобщенного момента.  $W$  отсчитывается от момента частицы, находящейся на средней орбите в начальный момент времени (частота обращения  $\omega_0 = \beta_0 c / R_0$ , энергия  $E_0 = m c^2 \gamma_0$ ) в магнитном поле  $B_0$  (которое складывается из внешнего поля и среднего поля, создаваемого пучком).

В § 2 третьей главы предложен гамильтониан

$$H = T + V = E_0 \sqrt{1 + 2\omega_0 W/E_0} + 2\pi R_0 e \int \mathcal{E}(y, t) dy. \quad (6)$$

из которого следуют точные уравнения для  $\dot{y}$  и  $\dot{W}$ , если пренебречь связью продольных и поперечных движений (модель тонкого кольца) и при медленном, "квазиadiaбатическом" изменении орбит частиц ( $\mathcal{E}$  - электрическое азимутальное усреднённое поле возмущения). Гамильтониан (6) отличается от используемых в [14, 15] также тем, что ведёт к правильным выражениям для полной энергии кольца и баланса энергии при излучении, существенно используемым при исследовании задачи численными методами.

Исходная бесконечная система уравнения для функции распределения  $\psi_0(W)$  и гармоник возмущения  $\psi_n(W)$  получается из (5) при разложении  $\psi$  и  $\mathcal{E}$  в ряд Фурье:

$$\partial_t \psi_n + \frac{in\omega_0}{\sqrt{1-2\omega_0 W/E_0}} \psi_n + \frac{e^2 c}{2\pi R_0} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} Z_{n-n'} \int_{W_{min}}^{\infty} \psi_{n-n'} dW \cdot 2\omega \psi_m. \quad (7)$$

Здесь  $Z_n = Z_n' + iZ_n''$  - импеданс связи. В § 3 получено выражение для полной энергии кольца

$$E(t) = 2\pi E_0 \int_{W_{min}}^{\infty} \psi_0(W) \sqrt{1+2\omega_0 W/E_0} dW - \frac{e^2 c}{2R_0} \sum_n \frac{Z_n''}{n} \int_{W_{min}}^{\infty} \psi_n dW^2 \quad (8)$$

и выражение для мощности излучения кольца

$$\frac{dE}{dt} = \frac{e^2 c \omega_0}{R_0} \sum_n Z_n' \int_{W_{min}}^{\infty} \psi_n dW \int_{W_{min}}^{\infty} \psi_n \left(1 - \frac{2\omega_0 W}{\omega_0}\right)^{-\frac{1}{2}} dW \quad (W_{min} = \frac{1}{2} \frac{E_0 \beta_0^2}{\omega_0}). \quad (9)$$

При  $Z_n' = 0$  (неустойчивость отрицательной массы) излучение отсутствует, и (9) даёт закон сохранения энергии.

В § 4 получены более точные выражения для линейных инкрементов и порогов неустойчивости, использование которых особенно важно при исследовании неустойчивости в реальных камерах, в которых мнимая часть импеданса знакопеременна.

Полное исследование динамики неустойчивости, описываемой системой нелинейных интегродифференциальных уравнений в частных производных (7), возможно только численными методами, и даже в этом случае представляет собой сложную задачу. Для повышения достоверности результатов численных исследований и облегчения их интерпретации желательно выявить некоторые качественные особенности поведения системы (7) аналитическими средствами; это проделано в § 5 3-й главы. Выявлены тенденции к симметричному расплыванию начального распределения частиц на два ему подобных, а также специфические трудности, возникающие при численном исследовании бессударительного кинетического уравнения и приводящие к осцилляциям на гладкой функции распределения.

В главе четвёртой диссертации динамика продольной неустойчивости, описываемая в модели тонкого кольца системой уравнений (7), изучается численными методами. В пределах применимости модели система (7) конечна и состоит из  $2n_m + 1$  уравнений. Здесь  $n_m \ll R/\tau$  ( $R$  и  $\tau$  - большой и малый радиусы кольца соответственно); при  $n > n_m$  гармоники некогерентны и ими можно пренебречь (рассматривается гидродинамическая неустойчивость).

В § I описывается постановка задачи численного исследования. Начальное распределение  $\psi_0(W)$  выбирается гауссоподобным с полушириной  $\langle W_0 \rangle$  (начальный разброс в пучке); начальные значения  $\psi_{n \neq 0}$  выражены через  $\psi_0$  с помощью линейной теории. Весьма важным оказался удобный выбор безразмерных переменных; в основном использовалась "инвариантная" нормировка, в которой система (7) инвариантна относительно параметра  $\nu/\gamma_0$  ( $\nu = \frac{e^2}{m c^2} \frac{N}{2\pi R_0}$ ,  $N$  - число электронов в кольце), определяющего критический разброс  $\langle W_{кр} \rangle$  (порог неустойчивости) и величины инкрементов. "Инвариантный" блок программы, разработанной для решения на ЭМ динамической системы (7), накапливает промежуточные результаты счёта на магнитную ленту. В любой момент можно задать конкретные физические параметры ( $N, R_0, \gamma_0$  время  $t \leq \tau_{max}$ ), и "физический" блок программы вычислит начальный и критический разбросы по  $W$ , инкременты гармоник, полную энергию кольца и полей возмущений, мощность излучения, физическое время  $t(сек)$  эволюции, разброс по энергиям в момент  $t$  и нарисует графики эволюции соответствующих величин.



Контроль за точностью счёта осуществляется проверкой закона сохранения числа частиц

$$\int_{w_{\min}}^{w_{\max}} \psi_0 dw = N/2\pi \quad (10)$$

и соотношения для мощности излучения (9) (или закона сохранения для НОМ при  $Z_n = 0$ ), которые выполнялись с точностью не хуже  $10^{-5}$ . Разностная схема ( неявная, аппроксимация близка ко второму порядку) была выбрана аналогичной, использовавшейся в /16/. Расчёты велись на ЭВМ СДС-6200.

В § 2 исследуется динамика неустойчивости кольца в свободном пространстве (СП) (для которого импеданс есть регулярная функция  $n \cdot |Z/nZ_0| = n^{2/3}$ ): а) в сильно надкритическом режиме ( $\langle W_0 \rangle = 0,2 \langle W_{кр} \rangle$ ) и б) "околопороговом" ( $\langle W_0 \rangle = 0,52 \langle W_{кр} \rangle$ ).

Рассматривалось 10 гармоник, в соответствии с исходными предположениями, что при  $n > 10$  поля некогерентны.

Результаты счёта представлены на графиках, отражающих эволюцию функции распределения  $\psi_0(w)$ , полей возмущения, энергии поля в кольце, мощности излучения, разброса и производной разброса по  $\tau$ .

В случае а) все 10 гармоник неустойчивы и неустойчивость развивается бурно. На начальной стадии рост гармоник возмущения  $\lambda_n$  и энергии поля  $E(t)$  происходит в прекрасном согласии с результатами линейной теории; затем в игру вступают нелинейные взаимодействия, которые ограничивают дальнейший рост и приводят к осцилляциям со средней амплитудой, на порядок меньшей получаемой из качественных оценок /14/, т.е. к насыщению неустойчивости. Кривая изменения мощности излучения замечательным образом весьма близка к кривой изменения энергии поля. С появлением первого "загиба" на кривой  $E(t)$  начинается стремительное уширение функции распределения  $\psi_0(w, t)$ , через время  $\tau = 4$  в безразмерных единицах ( $\sim 4 \cdot 10^{-8}$  сек при  $N = 5 \cdot 10^{12}$ ) разброс превышает критический, кольцо сильно банчируется и полностью разваливается.

В случае б) только первые 5 гармоник неустойчивы. Эволюция  $E(t)$  и  $\psi_0$  качественно похожа на описанную выше. Процесс развивается значительно медленнее; при  $\tau = 14$  начинается интенсивная нелинейная перекачка в старшие гармоники, находящиеся в подпороговом режиме; однако к этому времени разброс уже достигает

критического, и к  $\tau = 20$  ( $\sim 2 \cdot 10^{-7}$  сек при  $N = 5 \cdot 10^{12}$ ) также наблюдается развал кольца. В обоих случаях отмечался более интенсивный, чем ожидалось, рост  $l$ -й гармоники; в специально поставленном численном эксперименте было обнаружено явление преимущественной нелинейной перекачки энергии в сторону меньших  $n$ , особенно в  $l$ -ю гармонику.

Имея в виду этот факт, можно ожидать возникновения нелинейной стабилизации в режиме, в котором низшие гармоники устойчивы, а неустойчивы высшие. Такой режим может быть осуществлен в реальных экспериментальных условиях - можно так подобрать геометрию камеры /17/, что функция  $|Z_n/nZ_0|$ , определяющая порог неустойчивости, будет в среднем расти с ростом  $n$ . В § 3 главы 4 изучается динамика неустойчивости РЭК в модельной камере (резонаторе), для которой функция  $|Z_n/nZ_0|$  сконструирована путём комбинации результатов экспериментальных данных /17/ и численных расчётов для импеданса.

В этом случае наблюдалась частичная нелинейная стабилизация, выразившаяся в нелинейной перекачке энергии в устойчивые гармоники и в сильном замедлении хода процесса, в целом протекавшего так же, как и в предыдущих случаях. Для  $N = 10^{11}$  время эволюции неустойчивости ( $\sim 0,4 \cdot 10^{-6}$  сек) и величина конечного разброса ( $\sim 1\%$ ) близки к полученным в экспериментах /17/, для больших согласия хуже, что неудивительно, с учетом грубости модели. Подчеркнуто, что изучение развитыми методами более реалистичной модели, являющейся обобщением рассмотренной (большее число гармоник, учёт предсказанного эффекта "движения резонансов) и вполне поддающейся исследованию с помощью более мощной ЭВМ, может привести к существенно лучшему описанию в широкой области параметров и конкретным предсказаниям, важным для экспериментаторов.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах /18-22/ и докладывались на Совещании по программированию и математическим методам решения физических задач (Дубна, 1973), а также на Всесоюзном совещании по ускорителям заряженных частиц (Москва, 1974).

## ЛИТЕРАТУРА :

1. "Вычислительные методы в физике плазмы", Мир, 1974.
2. В.Н.Цытович. "Теория турбулентной плазмы", Атомиздат, 1971.
3. Б.Г.Щинов. Автореферат диссертации, ОИЯИ, Дубна, 1971.
4. V.G. Makhankov et al. Plasma Phys. 12, 191, 1970.
5. P. Arbuzov, A.T. Filippov. Nuovo Cim., 38, 796, 1965.
6. Б.С.Гетманов, А.Т.Филиппов. ТМФ, 8, 3, 1971.
7. В.А.Гудкова, В.А.Липеровский. ПМТФ, 3, II, 1970.
8. Л.И.Рудаков. ЖЭТФ, 59, 2091, 1970.
9. Я.Б.Файнберг, В.Д.Шапиро, В.И.Шевченко. ЖЭТФ, 57, 566, 1965.
10. V.G. Makhankov, A.N. Tsytovich, JINR, P4-6716, Dubna, 1972.
11. В.И.Векслер, В.П.Саранцев и др. "Коллективное линейное ускорение ионов". Материалы конференции по ускорителям, Кембридж, США, 1967.
12. D. Mölle, L.J. Laslett, A.M. Sesler. Report on Dubna Symposium. Preprint LBL-1062, 1972.
13. А.Г.Бонч-Осмоловский, Э.А.Перельштейн. Изв. вузов, Радиофизика, XIII, I081, I089, 1970.
14. А.Г.Бонч-Осмоловский, В.Н.Цытович, Труды ФИАН, 66, I44, 1973.
15. C. Pellegrini, A.M. Sesler. Preprint LBL ERAN-203, 1973.
16. B.G. Shohinov et al. Plasma Phys., 15, 211, 1973.
17. A. Faltens et al. Proc. of Conf. on High Energy Acceler. Stanford, May, 1974.
18. Б.С.Гетманов, В.Г.Маханьков, Б.Г.Щинов. ОИЯИ, P9-6432, Дубна, 1972.
19. Б.С.Гетманов, Е.П.Жидков, В.Г.Маханьков, ОИЯИ, D10-7707, Дубна, 1974.
20. Б.С.Гетманов, В.Г.Маханьков. ОИЯИ, P4-6952, Дубна, 1973.
21. Л.В.Бобылева, Б.С.Гетманов, Е.П.Жидков, В.Г.Маханьков. ОИЯИ, P11-8261, Дубна, 1974; Plasma Phys (in print).
22. Б.С.Гетманов, В.Г.Маханьков, М.Г.Мещеряков. Аннотации докладов, представленных на Всесоюзном совещании по ускорителям заряженных частиц, препринт ЦНИИ-атоминформа, Москва, 1974, стр. 100.
23. В.Е.Захаров и др. Письма ЖЭТФ, 19, 249, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел  
24 июня 1975 года.