ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

11-90-74

ФЕДОРОВ
Андрей Владимирович

УДК 517.968.4,
517.642.6

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВЕКТОРНОГО И СКАЛЯРНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Специальность: 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1990

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований

Научные руководители:
доктор физико-математических наук, профессор — Е.П.ЖИДКОВ

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник — О.И.ЮЛДАШЕВ

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор — В.Л.МАКАРОВ

кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник — Л.А.СЕВОСТЬЯНОВ

Ведущее научно-исследовательское учреждение:
Ереванский физический институт, г.Ереван

Автореферат разослан "___" ___________ 1990г.

Защита диссертации состоится "___"__________ 1990г. в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук — Ивач — З.М.ИВАНЧЕНКО

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность

Необходимость исследования характеристик магнитных полей возникает при проектировании, создании и эксплуатации магнитных систем ускорителей заряженных частиц и других электрофизических установок. Одним из основных методов исследований при этом является численное моделирование с помощью ЭВМ. Оно дает возможность ускорить процесс проектирования, заменить дорогостоящий натурный эксперимент вычислительным, получить изделия более высокого качества, выбрать оптимальную конфигурацию устройства. В то же время, эффективное проведение численного моделирования требует создания новых методов и комплексов программ, позволяющих получать характеристики магнитных полей с требуемой точностью и минимальными затратами ресурсов ЭВМ.

Всё разнообразие постановок задач для численного моделирования стационарных магнитных полей может быть объединено в три большие группы по виду используемых уравнений: дифференциальные, интегральные и комбинированные. В общем случае эти уравнения являются нелинейными. Каждая постановка имеет как свои достоинства, так и свои недостатки. Целесообразность использования того или иного подхода прежде всего определяется особенностями магнитной системы конкретной установки. Диссертация посвящена развитию методов численного решения задачи магнитостатики в интегральной формулировке для векторного потенциала и в комбинированной формулировке для двух скалярных потенциалов. Первая из рассматриваемых формулировок наиболее эффективна для расчета плоскопараллельных и осесимметричных магнитных систем с небольшим объемом ферромагнетика. В этом случае интегральное уравнение содержит вдвое меньшее число неизвестных, чем широко используемые интегральные уравнения относительно векторов поля. Комбинированную постановку предпочтительно использовать для расчета открытых магнитных систем и систем с сильным насыщением ферромагнетика с целью точного учета условия убывания магнитного поля на бесконечности. Этим определяется актуальность вопросов, рассмотренных в диссертации.

Работы, положенные в основу диссертации, выполнены в соответствии с проблемно-тематическим планом научно-исследовательских работ Объединенного института ядерных исследований.

Цель работы

Целью диссертационной работы является разработка методов численного решения задач, возникающих при моделировании магнитных полей электрофизических установок, создание комплексов программ для решения этого класса задач, проведение расчетов характеристик конкретных магнитных систем. При этом возникают вопросы:

1) выбора математической модели, наиболее подходящей для эффективного численного решения задачи,

2) исследования однозначной разрешимости уравнений в выбранной постановке,

3) построения дискретизованных уравнений, исследования разрешимости дискретной задачи и сходимости приближенных решений к точному,

4) построения итерационных методов решения задачи.

Особенностью задач, рассмотренных в диссертации, является необходимость точного учета условия на бесконечности. В связи с этим, в частности, решались вопросы включения граничного интегрального уравнения (ГИУ) в проекционную формулировку задачи в рамках комбинированного подхода, а также построения итерационного метода совместного решения граничного и нелинейного объемного интегральных уравнений в интегральном подходе.

Научная новизна

Разработан проекционный алгоритм численного решения задачи магнитостатики в постановке, использующей дифференциальные уравнения в комбинации с ГИУ, учитывающим условия на бесконечности. Особенностью этого алгоритма является экономичные требования к памяти ЭВМ при его численной реализации. Доказана однозначная разрешимость задачи, а также сходимость приближенных решений, построенных методом Галёркина, к точному.

Для нелинейного интегрального уравнения магнитостатики относительно векторного потенциала исследованы свойства интегрального оператора, доказана однозначная разрешимость уравнения, сходимость метода простой итерации и локальная сходимость ньютоновских процессов. Разработана, использующая данное уравнение, методика решения обратной задачи формирования однородного магнитного поля на инжекторном участке линейного индукционного ускорителя (ЛИУ). Доказана разрешимость системы нелинейных уравнений, возникающей при дискретизации задачи.

Практическая ценность

На основе предложенных в диссертации алгоритмов созданы комплексы программ, предназначенные для проведения расчетов поля плоскопараллельных и осесимметричных магнитных систем. Получены характеристики магнитных полей в случае сильного насыщения ферромагнитного экрана некоторых магнитов синхротрона СПИН ЛВЭ ОИЯИ. Решена задача выбора оптимальной конфигурации ферромагнитных шимм с целью создания однородного магнитного поля на инжекторном участке ЛИУ. Для различных расстояний между ускоряющими секциями получены конфигурации шимм, позволяющие существенно улучшить однородность поля.

Разработанные алгоритмы имеют самостоятельный интерес и могут быть использованы при численном решении задач электрофизики и ускорительной техники, аналогичных рассматриваемым в диссертации.

Апробация работы

Основные результаты диссертационной работы докладывались на X, XI Всесоюзных совещаниях по ускорителям заряженных частиц (Дубна, 1986г., 1988г.), на Всесоюзной конференции по вычислительной физике и математическому моделированию (Волгоград, 1988г., 1989г.), на международной конференции EQUADIFF -7 (Прага, 1989г.), на рабочем совещании "Методы и программы расчета магнитных полей" (Протвино, 1989г.), а также на Ученых советах ОИЯИ и семинарах по вычислительной и прикладной математике ЛВТА ОИЯИ.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 7 работ, в том числе в журнале

"Физика ЭЧАЯ", в трудах совещаний и конференций, в сообщениях ОИЯИ.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения, содержит 3 таблицы, 13 рисунков, список литературы из 155 наименований и изложена на 98 страницах машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении приводится краткий обзор литературы по численным методам и программам для расчета магнитостатических полей. Рассматриваются основные математические постановки этой задачи. Анализируются достоинства и недостатки постановок с точки зрения эффективности их использования при численном моделировании. Отмечается, что решение задач, отличающихся многообразием конфигураций ферромагнитных областей, различными магнитными характеристиками материалов, приводит к необходимости использования и развития различных постановок. Этим, в частности, обуславливается рассмотрение в диссертационной работе комбинированной постановки и интегральной постановки для векторного потенциала. Приводятся также описание структуры диссертации и перечень основных результатов.

Первая глава посвящена решению вопросов однозначной разрешимости задачи в вышеуказанных постановках, исследованию сходимости галеркинских приближений к точному решению, а также исследованию сходимости метода простой итерации и ньютоновских итерационных процессов.

В §I.I приводится вывод интегральных представлений для векторного потенциала и магнитной индукции. Из представления векторного потенциала получаем интегральное уравнение

$$R(\bar{A}) \equiv 4\pi \bar{A}(P) - \mathrm{rot} \int\limits_{\Omega} \frac{\bar{M}(Q)}{R} d\Omega_Q = \int\limits_{\Omega_S} \frac{\bar{J}}{R} d\Omega_Q, P \in \Omega, \quad (I)$$

определенное в области Ω, занятой ферромагнетиком. В уравнении (I) неизвестным является векторный потенциал $\bar{A}$, $\bar{M}$ - вектор намагниченности ферромагнетика, связанный с $\bar{A}$ согласно

$$\bar{M} = \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \mathrm{rot}\, \bar{A},$$

$\bar{J}$ - известный вектор, отличный от нуля в области Ω_S, занятой токовыми обмотками, $\mu = \mu(|\mathrm{rot}\,\bar{A}|)$ - заданная функция магнитной проницаемости ферромагнетика, R - расстояние между точками P и Q.

Из представления вектора магнитной индукции $\bar{B}$ в области, внешней к Ω, получаем комбинированную постановку:

$$\begin{aligned} &\mathrm{rot}\, \bar{H} = 0 \\ &\mathrm{div}\, \bar{B} = 0 \\ &\bar{B} = \mu \bar{H} \end{aligned} \quad (2)$$

$$2\pi\left[\bar{n}(\bar{B}\cdot\bar{n}) + \bar{n}\times(\bar{H}\times\bar{n})\right] = \mathrm{rot} \int\limits_{\Omega_S} \frac{\bar{J}}{R} d\Omega + \mathrm{rot} \int\limits_{\Gamma} \frac{\bar{n}\times\bar{H}}{R} d\Gamma - \mathrm{grad} \int\limits_{\Gamma} \frac{\bar{n}\cdot\bar{B}}{R} d\Gamma,$$

определяемую дифференциальными уравнениями внутри Ω и ГИУ на границе. Здесь $\bar{H}$ - вектор напряженности магнитного поля, через Г обозначена граница области Ω, $\bar{n}$ - вектор внешней к Ω нормали. Для упрощения ГИУ введен дополнительный неизвестный вектор-функция, в результате чего ГИУ будет содержать только один интегральный оператор. Дополнительный вектор является решением некоторой линейной дифференциальной задачи внутри области Ω.

В §I.2 исследуется интегральное уравнение (I). Пусть $R(\bar{A})$ - оператор в левой части (I), $R'(\bar{A})$ - его производная Фреше. Через $H(\mathrm{rot}, \Omega)$ обозначим гильбертово пространство вектор-функций

$$H(\mathrm{rot},\Omega) = \{\bar{u} : \bar{u} \in L_2(\Omega)^3, \mathrm{rot}\,\bar{u} \in L_2(\Omega)^3\}$$

со скалярным произведением

$$(\bar{u},\bar{v})_\alpha = \alpha(\bar{u},\bar{v}) + (\mathrm{rot}\,\bar{u}, \mathrm{rot}\,\bar{v}).$$

Здесь $\alpha = const > 0$, (,) - скалярное произведение в $L_2(\Omega)^3$.

При обычно выполняющихся на практике предположениях о функции магнитной проницаемости μ, установлены следующие свойства операторов $R(\bar{A})$, $R'(\bar{A})$:

I) $R : H(\mathrm{rot},\Omega) \to H(\mathrm{rot},\Omega)$, является сильно монотонным и липшиц-непрерывным при $\alpha \in (0, \alpha^*)$, α^* - некоторая постоянная.

2) $R'(\bar{A}) : H(\mathrm{rot},\Omega) \to H(\mathrm{rot},\Omega)$, непрерывно обратим и удовлетворяет условию Липшица по $\bar{A}$.

На основании этих свойств доказываются теоремы:

Теорема I.

Уравнение (I) однозначно разрешимо в $H(\mathrm{rot}, \Omega)$. Решение может быть получено методом последовательных приближений

$$\bar A_{n+1} = \bar A_n - \tau\left(R(\bar A_n) - \bar A_s\right), \quad \tau \in \left(0, \frac{2\varkappa}{\ell^2}\right),$$

где $\bar A_s = \int_{\Omega_s} \frac{\bar J}{R} d\Omega$, $\varkappa$ – константа сильной монотонности, ℓ – константа Липшица оператора $R(\bar A)$.

Теорема 2

Пусть $\| R(\bar A_0) - \bar A_s \|_1 = \eta$, $\bar A_0, \bar A_s \in H(rot, \Omega)$,

I) итерационный процесс Ньютона

$$\bar A_{n+1} = \bar A_n - \left[R'(\bar A_n)\right]^{-1}\left(R(\bar A_n) - \bar A_s\right), \quad n = 0, 1, \ldots$$

сходится к решению в замкнутом шаре $\bar U_{r'}(\bar A_0)$, $r' = \frac{\eta}{\varkappa}\sum_{k=0}^{\infty} q^{2^k - 1}$,

если $q = \frac{\ell_1 \eta}{2\gamma} < 1$, где ℓ_1 – константа Липшица для $R'(\bar A)$, γ –постоянная.

2) модифицированный итерационный процесс Ньютона

$$\bar A_{n+1} = \bar A_n - \left[R'(\bar A_0)\right]^{-1}\left(R(\bar A_n) - \bar A_s\right), \quad n = 0, 1, \ldots$$

сходится к решению в замкнутом шаре $\bar U_{r'}(\bar A_0)$, $r' = \frac{\varkappa}{\ell_1}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\ell_1\eta}{\varkappa^2}}\right)$,

если $\frac{2\ell_1\eta}{\varkappa} < 1$, $\varkappa$ - определена в Теореме I.

Показано, что для получения начального приближения метода Ньютона может использоваться итерационный процесс, основанный на методе продолжения по непрерывному параметру.

В §I.3 исследуется слабая формулировка задачи в предложенной комбинированной постановке. Постановка получается из (2) введением потенциала $\bar H = \nabla\psi$ и потенциала φ, являющегося решением задачи:

$$\Delta\varphi = 0$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_\Gamma = \bar n \cdot \bar B.$$

Проектируя, полученные таким образом уравнения, на пространство $H_1(\Omega)$, будем иметь:

$$\int_\Omega \mu\nabla\psi\cdot\nabla w\, d\Omega - \int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla w\, d\Omega = 0$$

$$\int_\Omega \mu\nabla\psi\cdot\nabla w\, d\Omega - \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma (\bar n\times\nabla w)\cdot\int_\Gamma \frac{\bar n\times(\nabla\varphi - \nabla\psi)}{R} d\Gamma_Q\, d\Gamma_P = \int_\Omega \bar B_s\cdot\nabla w\, d\Omega, \qquad (3)$$

где $\bar B_s = \int_{\Omega_s} \bar J\times\nabla\frac{1}{R} d\Omega$, $w \in H_1(\Omega)$, неизвестными являются потенциалы ψ, φ.

Показано, что к системе (3) сводится задача решения проекционным методом интегрального уравнения:

$$T(\bar H) = 4\pi\,\bar B(\bar H) - rot\,rot \int_\Omega \frac{\bar M(\bar H)}{R} d\Omega = \bar B_s, \qquad (4)$$

относительно вектора $\bar H$ в подпространстве $G = \{\bar u : \bar u = \nabla w, w \in H_1(\Omega)\}$ пространства $L_2(\Omega)^3$. Исследованы свойства оператора $T(\bar H)$ в левой части (4) и доказаны теоремы:

Теорема3.

Оператор $T: G \to G$ является сильно монотонным и липшиц-непрерывным.

Теорема 4.

Уравнение (4) в проекционной формулировке:

$$\int_\Omega \left(4\pi\bar B - rot\,rot \int_\Omega \frac{\bar M}{R} d\Omega_Q - \bar B_s\right)\cdot\nabla w\, d\Omega_P = 0, \quad \forall w \in G \qquad (5)$$

имеет единственное решение $\bar H \in G$. Галеркинские приближения $\bar H_n$ к $\bar H$ сходятся и имеет место оценка:

$$\|\bar H_n - \bar H\| \le C \inf_{\bar v \in G_n} \|\bar v - \bar H\|,$$

где G_n – конечномерное подпространство в G с нормой, индуцированной из G, С – некоторая постоянная.

Показана также эквивалентность задач (5) и (3) и, тем самым, установлена однозначная разрешимость задачи (3).

Вторая глава посвящена вопросам практической реализации комбинированной постановки для расчета плоскопараллельных магнитных систем. Рассматриваемая прекционная формулировка, получается из (2) введением $\bar B = rot\,\bar A$, $\bar A = (0, 0, u)$ и дополнительного неизвестного v, являющегося решением задачи:

$$\Delta v = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial u}{\partial n}$$

В качестве области Ω выбирается область, охватывающая все источники поля. Тогда, проектируя на $H_1(\Omega)$ получаемые уравнения, придем к задаче нахождения неизвестных функций u и v из системы:

$$\int_\Omega \frac{1}{\mu}\nabla u\cdot\nabla w\, d\Omega - \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla w\, d\Omega = \int_\Omega J w\, d\Omega \qquad w \in H_1(\Omega) \qquad (6)$$

$$\int_\Omega \frac{1}{\mu}\nabla u\cdot\nabla w\, d\Omega + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial\tau}\int_\Gamma \ln\frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial\tau} - \frac{\partial v}{\partial\tau}\right) d\Gamma_Q\, d\Gamma_P = -\int_\Omega J w\, d\Omega,$$

где $\bar\tau$ – вектор касательной к Г, $\nabla u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right\}$, J - ненулевая 2-ая компонента вектора $\bar J$.

В §2.I проводится дискретизация (6) методом конечных элементов. Задача сводится к нахождению потенциала u и дополнительного неизвестного из системы нелинейных уравнений, полученной из (6). При численном решении системы в памяти ЭВМ необходимо хранить одну разреженную матрицу для неизвестных внутри области и одну заполненную матрицу, соответствующую связям неизвестных на границе.

В §2.2 приводятся результаты численных экспериментов, иллюстрирующих работу предложенных алгоритмов. Здесь же приводятся результаты вычислений характеристик магнитных полей некоторых магнитов синхротрона СПИН ЛВЭ ОИЯИ.

В третьей главе предлагается методика численного решения обратной задачи формирования однородного магнитного поля многосекционной системы ЛИУ, приводятся результаты расчетов.

В §3.I строится математическая модель многосекционной магнитной системы. Векторный потенциал магнитного поля находится из интегрального уравнения (I). В выбранной модели имеется два типа ферромагнетиков - с нелинейными магнитными характеристиками и с бесконечной магнитной проницаемостью. В соответствии с этим, используемое уравнение содержит нелинейный объемный интегральный оператор и граничный интегральный оператор.

В §3.2 строится дискретизация нелинейного интегрального уравнения и приводится алгоритм численного решения задачи. Доказана разрешимость дискретизованной нелинейной системы уравнений.

В §3.3 дано краткое описание комплекса программ, разработанного для решения задачи получения оптимальной конфигурации ферромагнитных шимм с целью формирования однородного магнитного поля внутри и в промежутках между ускоряющими секциями ЛИУ. Проводится сравнение результатов расчетов с данными измерений для характерных участков фокусирующей системы. Получены конфигурации шимм для промежутков различной длины, существенно улучшающие однородность поля.

В заключении приводятся основные результаты диссертации:

I. В диссертации исследовано интегральное уравнение магнитостатики для векторного потенциала. Доказана однозначная разрешимость и сходимость метода простой итерации приближенного решения данного уравнения. Доказана локальная сходимость ньютоновских процессов и построен, сходящийся от любого начального приближения, итерационный процесс, основанный на методе продолжения по непрерывному параметру.

2. Исследована комбинированная постановка задачи магнитостатики относительно двух неизвестных скалярных потенциалов. Постановка отличается экономичными требованиями к памяти ЭВМ при её численной

реализации. Доказана однозначная разрешимость задачи в проекционной формулировке, а также сходимость приближенных решений, построенных методом Галеркина, к точному.

3. На основе предложенного метода создан комплекс программ для расчета плоскопараллельных магнитных систем. Для дискретизации задачи использован метод конечных элементов

4. С помощью комплекса проведены расчеты характеристик полей некоторых магнитов синхротрона СПИН ЛВЭ ОИЯИ в случае сильного насыщения ферромагнетика.

5. Разработана, использующая интегральное уравнение относительно векторного потенциала, методика расчета поля многосекционной магнитной системы для решения обратной задачи формирования однородного магнитного поля на инжекторном участке ЛИУ.

6. Создан специализированный комплекс программ и проведено численное моделирование формирования однородного магнитного поля с помощью ферромагнитных шимм в ЛИУ - 30 ЛНФ ОИЯИ. Для различных промежутков между ускоряющими секциями получены конфигурации шимм, существенно улучшающие однородность поля.

Работы, положенные в основу диссертации:

I. Айрян Э.А., Жидков Е.П., Фёдоров А.В., Хоромский Б.Н., Шелаев И.А., Юдин И.П., Юлдашев О.И. Прецизионные расчеты двумерных полей магнитов синхротрона СПИН. Тр. X Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. т.2, с. 316-319, Д9-87-105, Дубна, 1987.

2. Айрян Э.А., Жидков Е.П., Фёдоров А.В., Хоромский Б.Н., Шелаев И.А., Юдин И.П., Юлдашев О.И. Алгоритмы и программы численного моделирования стационарных магнитных полей электрофизических установок. В сб. "Алгоритмы и программы для решения некоторых задач физики", вып.5, с.I-26, KFKI -1987-17/M, Будапешт, 1987.

3. Жидков Е.П., Журавлев В.В., Кладницкий В.С., Матора И.М., Фёдоров А.В., Юлдашев О.И. О формировании однородного магнитного поля на инжекторном участке ЛИУ-30. ОИЯИ, Р9-88-508, Дубна,1988.

4. Жидков Е.П., Фёдоров А.В., Юлдашев О.И. Алгоритм численного моделирования фокусирующей магнитной системы ЛИУ. Тезисы докладов Всесоюзной конференции "Вычислительная физика и математическое моделирование", с.46-47, Изд. УДН, Москва, 1989.

5. Жидков Е.П., Фёдоров А.В., Юлдашев О.И. Исследование интегрального уравнения магнитостатики для векторного потенциала. ОИЯИ, Р11-89- 473, Дубна, 1989.

6. Жидков Е.П., Фёдоров А.В., Юлдашев О.И. Об одном подходе к решению задачи магнитостатики в комбинированной постановке. ОИЯИ, Р11-90-17 , Дубна, 1990.

7. Айрян Э.А., Жидков Е.П., Фёдоров А.В., Хоромский Б.Н., Шелаев И.А., Юдин И.П., Юлдашев О.И. Численные алгоритмы расчета магнитных систем в ускорителях заряженных частиц. ЭЧАЯ, №21, вып.1, 1990.

**Рукопись поступила в издательский отдел
6 февраля 1990 года.**