ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

11-89-885

Им Ён Сек

УДК 512.643.5

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СПЕКТРА, А ТАКЖЕ СОБСТВЕННЫХ (КОРНЕВЫХ) ВЕКТОРОВ ТРЕХ-, ПЯТИ- И СЕМИДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Специальность: 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1990

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

<u>Научный руководитель:</u>
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник Г.А.Емельяненко

<u>Официальные оппоненты:</u>
доктор физико-математических наук,
профессор В.П.Ильин

кандидат физико-математических наук,
доцент К.П.Ловецкий

<u>Ведущее научно-исследовательское учреждение:</u>
Научно-исследовательский вычислительный центр Московского государственного университета, г. Москва.

Автореферат разослан "____"_________ 1990г.

Защита диссертации состоится "_____"__________ 1990г.
в _____ часов в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук *Иван* З.М.Иванченко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

<u>Актуальность</u>

Многие задачи теоретической и математической физики, вычислительной и прикладной математики, обработки экспериментальных данных, процессов и систем управления и т.д. сводятся к решению алгебраической проблемы собственных значений $(A-\hat{\lambda}E)\hat{U}(\hat{\lambda})=0$ в общем случае с произвольной квадратной матрицей A. Интерес же к задаче нахождения λ - собственных значений и соответствующих им $U(\lambda)$ - собственных, т.е. $(\mathbb{C}-\lambda E)U(\lambda)=0$ и $\overset{(p)}{U}(\lambda)$ - корневых, т.е. $(\mathbb{C}-\lambda E)^p\overset{(p)}{U}(\lambda)=0$, где $p=1,2,\cdots,K$ и K - высота клетки Жордана, векторов трех-, пяти- и семидиагональных матриц $\mathbb{C}$ (I) общего вида

$$\mathbb{C}_3=\begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & \\ & p_3 & q_3 & r_4 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & p_m & q_m \end{bmatrix},\quad \mathbb{C}_5=\begin{bmatrix} q_1 & r_2 & a_3 & & \\ p_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ b_3 & \ddots & \ddots & \ddots & a_m \\ & \ddots & \ddots & \ddots & r_m \\ & & b_m & p_m & q_m \end{bmatrix},\quad \mathbb{C}_7=\begin{bmatrix} q_1 & r_2 & a_3 & f_4 & & \\ p_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ b_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & f_m \\ z_4 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_m \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & r_m \\ & & z_m & b_m & p_m & q_m \end{bmatrix} \qquad (I)$$

произвольной структуры в значительной мере обусловлен [10] следующими обстоятельствами.

Во-первых, нахождение собственных значений и соответствующих им собственных(корневых) векторов матриц A общего вида является сложной задачей, решение которой на ЭВМ значительно упрощается в случае A - трехдиагональных матриц вида $\mathbb{C}_3$ (I).

Во-вторых, замена алгебраической задачи $(A-\hat{\lambda}E)\hat{U}(\hat{\lambda})=0$ задачей $(\mathbb{C}_3-\lambda E)U(\lambda)=0$ привлекательна, в связи с отмеченным выше преимуществом, еще и потому, что в литературе описан ряд методов, позволяющих выполнить устойчивое преобразование подобия при переходе от квадратной матрицы A к трехдиагональной матрице $\mathbb{C}_3$ (I).

В-третьих, трех-, пяти- и семидиагональные матрицы играют и самостоятельную (выделенную) роль при решении многих задач вычислительной математики и математической физики.

В настоящее время имеется большое количество работ (монографий, сборников, обзоров, оригинальных публикаций), в которых либо рассмотрены методы решения указанных задач с матрицами $\mathbb{C}$ вида (I), либо приводятся различные примеры практических задач, к ним приводящих.

Известно [10], что наиболее эффективными(с точки зрения затрат времени и памяти ЭВМ, а также точности получаемых результатов) численными методами решения на ЭВМ алгебраической проблемы собственных значений ($\mathbb{C}_3=\mathbb{C}_3^T$)-вещественных симметричных трехдиагональных матриц $\mathbb{C}_3$(I) являлись метод бисекций и методы обратных(прямых) итераций, а также $QL(QR)$-методы. Если же $\mathbb{C}_3 \neq \mathbb{C}_3^T$, то в процессе итераций в $QL(QR)$-алгоритмах нарушается [IO] трехдиагональный вид исходной матрицы $\mathbb{C}_3$(I). Это приводит к дополнительным затратам памяти и времени счета на ЭВМ и следовательно к неэффективности (в указанном выше смысле) $QL(QR)$-алгоритмов в случае большого порядка матриц $\mathbb{C}_3 \neq \mathbb{C}_3^T$. Методы бисекций и обратных итераций имеют, как известно [IO], некоторое преимущество перед $QL(QR)$- алгоритмами, если число определяемых собственных значений и векторов не более 25% от их общего числа. Если же матрица $\mathbb{C}_3$(I) имеет кратные или очень близкие собственные значения, то эффективность метода обратных итераций снижается, как известно [IO], из-за необходимости учета бо́льшего числа параметров. Метод бисекций (деления отрезка пополам), основанный на анализе последовательностей Штурма, применим, как известно [IO], для матриц $\mathbb{C}_3 = \mathbb{C}_3^T$ и $\mathbb{C}_3$ (I) -матриц Якоби. Кроме того, если у матрицы $\mathbb{C}_3$(I) имеются очень близкие собственные значения, то общее число итераций для вычисления собственных значений такой матрицы на основе метода бисекций больше [IO] чем у $QR(QL)$-методов.

Другой хорошо известный метод вычисления спектра, т.е. всех λ-собственных значений матриц $\mathbb{C}$ (I) общего вида основан на использовании LR - алгоритма. Полезная особенность этого метода заключается в том, что он сохраняет [IO] ленточный вид исходных (в том числе $\mathbb{C}_3$(I)-трехдиагональной) матриц $\mathbb{C}$ (I) и в процессе итераций, если на каждом шаге итерационного процесса существует разложение вида $\overset{(k)}{\mathbb{C}} = \overset{(k)}{L}\,\overset{(k)}{R}$, где $k=1,2,\cdots$; $\overset{(k)}{L}$ -нижняя треугольная и $\overset{(k)}{R}$ -верхняя треугольная (двухдиагональные в случае $\mathbb{C}_3$(I)) матрицы. Необходимым и достаточным условием существования $[\overset{(k)}{\mathbb{C}} = \overset{(k)}{L}\,\overset{(k)}{R} \to \overset{(k)}{R}\,\overset{(k)}{L} = \overset{(k+1)}{\mathbb{C}}, k=1,2\cdots]$- такого итерационного процесса является (как известно [IO]) отличие от нуля всех Δ_1^i-ведущих верхних угловых миноров как у исходных матриц $\mathbb{C}$ (I) так и у порождаемых ими $\overset{(k)}{\mathbb{C}}$ -итерационных матриц. При этом на каждом шаге LR-алгоритма, т.е. при переходе от матриц $\overset{(k)}{\mathbb{C}}$ к $\overset{(k+1)}{\mathbb{C}}$ в случае $\mathbb{C}_3$(I), требуется выполнить $(m-1)$-делений и $2(m-1)$-умножений, а также m-сложений и m-вычитаний. Известно также, что в QR-методе для $\mathbb{C}_3 = \mathbb{C}_3^T$ требуется выполнить помимо сложений и вычитаний еще $3m$-умножений и $3m$-делений. Отметим к тому же, что если у $\mathbb{C}_3$ (I) отличны от нуля все $\{\tau_k \neq 0\}_{k=2}^m$-внедиагональные элементы, то предварительно выполнив диагонально- подобное преобразование $D^{-1}\mathbb{C}_3 D = \tilde{\mathbb{C}}_3$, получим матрицу $\tilde{\mathbb{C}}_3$, у которой $\{\tilde{\tau}_k = 1\}_{k=2}^m$. И LR-алгоритм на каждом шаге будет требовать уже $(m-1)$-делений и $(m-1)$ умножений[x)] помимо указанных выше сложений и вычитаний.

x) Такое же количество делений, умножений и сложений(вычитаний) требуется в лучших из полученных нами методах, но при этом не требуется каких-либо ограничений на элементы матрицы $\mathbb{C}_3$(I).

Однако, появление $(\overset{(k)}{\Delta}{}_1^i = 0)$-точных нулевых верхних ведущих угловых миноров у матриц $\overset{(k)}{\mathbb{C}}, k=1,2,\cdots$ означает теоретически нарушение (прерывание) LR-процесса. Практически же при вычислениях на ЭВМ появление $(\overset{(k)}{\Delta}{}_1^i \approx \varepsilon)$-близких к нулю миноров, где ε-малая константа, обусловленная величиной разрядной сетки ЭВМ, приводит к потере значащих цифр и следовательно к снижению точности $\overset{(k)}{\mathbb{C}} = \overset{(k)}{L}\,\overset{(k)}{R}$ - разложения. И это несмотря на то, что в случае трехдиагональных матриц $\mathbb{C}_3$ (I) рекуррентные процессы (5), (I2) для вычисления $(\overset{(k)}{\Delta}{}_1^i / \overset{(k)}{\Delta}{}_1^{i-1})$-отношений этих миноров (функциями которых по сути являются элементы матриц $\overset{(k)}{L}$ и $\overset{(k)}{R}$) как известно[x)], устойчивы.

Отмеченный выше недостаток LR-метода не носит характер принципиального теоретического ограничения, поскольку возможно преобразование $(\lambda+d)$-сдвиг спектра, позволяющее избежать малых значений указанных миноров у матриц $(\overset{(k)}{\mathbb{C}} + dE)$. Однако остается практически не решенным вопрос о способе оптимального выбора таких d-сдвигов. Поэтому на практике, как известно [IO], при появлении у матриц $\overset{(k)}{\mathbb{C}}, k=1,2,\cdots$ близких к нулю $\overset{(k)}{\Delta}{}_1^i$-миноров используют вместо указанных d-сдвигов перестановки строк(столбцов) матриц $\overset{(k)}{\mathbb{C}}$, что неизбежно приводит к нарушению вида исходных матриц $\mathbb{C}$ (I) в процессе $\overset{(k)}{\mathbb{C}}$ -итераций. Такая замена одного "недостатка" LR-метода другим его "недостатком" явилась в значительной мере следствием стремления обеспечить необходимую точность разложений при расчетах и отказом от ограничений на объем используемой памяти ЭВМ.

В силу медленной сходимости LR-метода (как и QR-метода) при близких собственных значениях, на практике используются модифицированные (ускоренные) LR-методы, т.е.

$$(\overset{(k)}{\mathbb{C}} - \overset{(k)}{W}E) = \overset{(k)}{L}\,\overset{(k)}{R} \to \overset{(k)}{R}\,\overset{(k)}{L} = \overset{(k+1)}{\mathbb{C}}, \qquad (2)$$

либо

$$(\overset{(k)}{\mathbb{C}} - \overset{(k)}{W}E) = \overset{(k)}{L}\,\overset{(k)}{R} \to (\overset{(k)}{R}\,\overset{(k)}{L} + \overset{(k)}{W}E) = \overset{(k+1)}{\mathbb{C}} \qquad (3)$$

При этом оставался, как известно, также не решенным вопрос о способе оптимального выбора $\overset{(k)}{W}$ -итерационных ускоряющих сдвигов.

В качестве $\overset{(k)}{W}$ обычно выбирают [IO] либо линейный, либо квадратичный сдвиги. Известно [IO], что в LR-методе с линейным сдвигом среднее число итераций на одно собственное значение не меньше 5. Сходимость LR-метода со стандартным квадратичным сдвигом быстрее чем с линейным, но, как известно, вычисленные собственные значения могут оказаться комплексными даже для вещественных симметричных $\mathbb{C}_3(I)$-матриц.

Отметим наконец, что LR-метод не используется, как известно, для нахождения собственных векторов матриц $\mathbb{C}_3$ (I), поскольку, во-первых,

x) См., например, §5 гл.2, В.Я.Скоробогатько. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике, М., Наука, I983.

пришлось бы хранить информацию о всех итерационных матрицах L_k, и, во-вторых, существует опасность накопления погрешности при перемножении всех матриц L_k, т.е. при получении $L = (L_N \cdot L_{N-1} \cdots L_1)$, где $G = L\,C\,L^{-1}$ и G -блочно-треугольная (в общем случае) матрица.

Итак, приведенный выше краткий анализ достоинств и недостатков, а также нерешенных проблем, присущих (в том числе и наиболее известным из существующих в настоящее время) методам решения алгебраической задачи собственных значений для матриц вида C (I), обусловили актуальность работ [I÷I0], положенных в основу настоящей диссертации и выполненных в соответствии с проблемно-тематическим планом научно-исследовательских работ ЛВТА ОИЯИ.

Цель работы

Реферируемая диссертационная работа посвящена разработке и систематизации эффективных методов нахождения собственных значений и соответствующих им собственных(корневых) векторов для трех-, пяти- и семидиагональных матриц общего вида произвольной структуры, а также созданию на их основе стандартных программ на ФОРТРАНе для ЭВМ ЕС-I06I(60).

Научная новизна

I. Получено (на основе модификаций $LR(RL)$-алгоритмов, а также применения обобщенной мультипликативной теории[x)] ведущих угловых миноров) множество эффективных методов вычисления всех собственных значений трех-, пяти- и семидиагональных матриц общего вида произвольной структуры и собственных(корневых) векторов указанных выше трехдиагональных матриц. При этом лучшими из полученных нами методов для нахождения собственных значений трехдиагональных матриц являются T_AWd- и T_GWd -методы[3], требующие $(m-1)$-деление и $(m-1)$-умножение в каждой итерации, а также не накладывающие каких-либо ограничений на элементы исходной матрицы.

2. Предложены эффективные универсальные способы выбора ускоряющих сдвигов при поиске всех собственных значений трех-, пяти- и семидиагональных матриц.

Практическая значимость работы

Создана (на основе разработанных алгоритмов) и отлажена система стандартных программ на ФОРТРАНе для ЭВМ ЕС-I06I(60), лучшие из котоных по основным параметрам превосходят известные и широко распространные в настоящее время стандартные программы подобного типа.

x)Г.А.Емельяненко,Т.Т.Рахмонов,Препринт ОИЯИ,PII-89-340,Дубна,I989.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на семинаре по методам вычислительной и прикладной математики ЛВТА ОИЯИ, на семинаре по структуре атомного ядра ЛТФ ОИЯИ, на II Всесоюзной конференции "Вычислительная физика и математическое моделирование" (г. Волгоград, II-I4 сентября I989г.), на семинаре кафедры вычислительной математики Пхеньянского университета (г. Пхеньян, КНДР)

Публикации.

По теме диссертации опубликовано I0 работ [I÷I0], выполненных автором совместно с научным руководителем Г.А.Емельяненко и результаты которых (за исключением методов (и программ) поиска собственных значений блочно-трехдиагональных матриц общего вида и матриц Хессенберга[8, 9]) вошли в диссертацию.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, 5-глав и основных результатов. В последней главе приведены описание системы программ на ФОРТРАНе ЭВМ и результаты расчетов. Объем диссертации - I50стр. машинописного текста (в том числе II таблиц). Список литературы включает I50 наименований.

В диссертации принята трехзначная нумерация (а,б,в) формул, лемм, теорем, замечаний, следствий и представлений, где а-номер главы, б - номер парвграфа, в - номер соответствующих формул, лемм, теорем, замечаний, следствий и представлений в этом параграфе.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обсуждается содержание предмета исследований, обосновывается их актуальность и приводится анализ литературы. Сформулированы также цель, научная новизна и практическая значимость работы. Указаны основные результаты, выносимые на защиту.

В первой главе, состоящей из трех параграфов, разработаны[I,2](на основе модификации $LR(RL)$-методов с использованием мультипликативной теории ведущих угловых миноров, а также свойств матрично-факторизованных представлений[x)] этих (и им обратных) матриц) методы вычисления полного спектра вещественных трехдиагональных матриц общего вида $\mathfrak{C}_3$ (I) со всеми различными

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_m| \tag{4}$$

вещественными собственными значениями, у которых (и их итерационных матриц) все ведущие угловые миноры отличны от нуля. В § I.I построено [I,2] на основе LR-метода множество (теоремы I.I.I, I.I.2) из пяти алгоритмов для вычисления полного спектра $\mathfrak{C}_3$-трехдиагональных матриц общего вида (I), у которых (и их итерационных матриц) все верхние ведущие угловые миноры отличны от нуля. Четыре из указанных методов основаны (соответственно каждый) на одной из следующих итерационных последовательностей

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} = 1 - \overset{(k)}{\gamma}_i \overset{(k)}{\Lambda}{}_i^{-1} \;;\; \overset{(k)}{\Lambda}_1 = \overset{(k)}{\Lambda}_2 = 1 \;;\; i = 2,3,\dots,m\\
&\overset{(k)}{\tau}_i = \overset{(k)}{\gamma}_i/(1 - \overset{(k)}{\tau}_{i-1}) \;;\; \overset{(k)}{\tau}_1 = 0 \;;\; i = 2,3,\dots,m\\
&\overset{(k)}{T}_i = (\overset{(k)}{P}_i z_i)/(\overset{(k)}{q}_{i-1} - \overset{(k)}{T}_{i-1}) \;;\; \overset{(k)}{T}_1 = 0 \;;\; i = 2,3,\dots,m\\
&\overset{(k)}{L}_i = \overset{(k)}{q}_i - \overset{(k)}{P}_i z_i / \overset{(k)}{L}_{i-1} \;;\; \overset{(k)}{L}_1 = \overset{(k)}{q}_1 \;;\; i = 2,3,\dots,m
\end{aligned}\right\} , \tag{5}$$

давших формально название методу. Здесь и всюду далее

$$\overset{(k)}{\gamma}_i = \overset{(k)}{P}_i z_i / (\overset{(k)}{q}_{i-1} \cdot \overset{(k)}{q}_i) \;;\; \overset{(k)}{\gamma}_1 = 0 \;;\; i = 2,3,\dots,m , \tag{6}$$

а также $\{\overset{(1)}{q}_i = q_i + d\}_{i=1}^m$, $\{q_1, q_i, z_i, \overset{(1)}{P}_i = P_i\}_{i=2}^m$ – элементы исходной матрицы $\mathfrak{C}_3$ (I) и d –некоторое вещественное число такое, что $\{\overset{(1)}{q}_i \neq 0\}_{i=1}^m$. Пятый метод основан на использовании комбинации последовательностей $\{\overset{(k)}{T}_i\}$ и $\{\overset{(k)}{L}_i\}$. При этом лучшим из построенных [I,2] в § I.I пяти методов является следующий

<u>$T_\Lambda d$ -метод</u>

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(k+1)}{q}_i = (\overset{(k)}{q}_i - \overset{(k)}{T}_i) + \overset{(k)}{T}_{i+1} \;;\; \overset{(k)}{T}_{m+1} = 0 \;;\; i = 1,2,\dots,m\\
&\overset{(k+1)}{T}_i = [(\overset{(k)}{q}_i - \overset{(k)}{T}_i)\cdot \overset{(k)}{T}_i]/(\overset{(k+1)}{q}_{i-1} - \overset{(k+1)}{T}_{i-1}) \;;\; \overset{(k+1)}{T}_1 = 0 \;;\; i = 2,3,\dots,m\\
&\lambda_i = \lim_{k\to\infty} \overset{(k+1)}{q}_i - d \;;\; i = 1,2,\dots,m
\end{aligned}\right\} , \tag{7}$$

где $\overset{(1)}{T}_i = (\overset{(1)}{P}_i z_i)/(\overset{(1)}{q}_{i-1} - \overset{(1)}{T}_{i-1}) \;;\; \overset{(1)}{T}_1 = 0 \;;\; i = 2,3,\dots,m \;;\; K = 1,2,\dots ,$ (8)

который требует, как видно, $(m-1)$ –делений, $(m-1)$ –умножений, m – сложений и m –вычитаний на каждой итерации, а также не накладывает никаких условий на элементы исходной матрицы. В $T_\Lambda d$ –методе собственные значения определяются с абсолютной погрешностью не хуже чем $\{|\Delta\lambda_i| < m\cdot\varepsilon\}_{i=1}^m$, а в остальных методах – $\{|\Delta\lambda_i| < M\cdot\varepsilon\}_{i=1}^m$, где m –порядок исходной матрицы, $M = \max_i(z_i)/\min_i(\lambda_i)$ и ε –константа, опре-

x) Г.А.Емельяненко,Т.Т.Рахмонов. Препринт ОИЯИ,PII-87-533,Дубна, 1987; PII-88-599,Дубна,1988.

деляемая разрядной сеткой ЭВМ. В следствии I.I.I отмечено, что скорость сходимости алгоритмов, полученных в теореме I.I.2, определяется с учетом равенств

$$\overset{(k+1)}{T}_i = \Big[\prod_{n=1}^{K}\Big(\frac{\overset{(n)}{L}_i(d)}{\overset{(n+1)}{L}_{i-1}(d)}\Big)\Big]\cdot \overset{(1)}{T}_i \;;\; \Big(\overset{(k+1)}{P}_i = \Big[\prod_{n=1}^{K}\Big(\frac{\overset{(n)}{L}_i(d)}{\overset{(n)}{L}_{i-1}(d)}\Big)\Big]\cdot \overset{(1)}{P}_i\Big) ;\; i = 2,3,\dots,m. \tag{9}$$

Из леммы I.I.6 следует, что для любого i из интервала $2 \le i \le m$ соотношения

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(k)}{\Lambda}_i = 0 \to [\,\overset{(k)}{\Lambda}_{i-1} = \overset{(k)}{\gamma}_i \;;\; \overset{(k)}{\Lambda}_{i+2} = 1,\ \overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} = \infty \;;\; \overset{(k)}{\Lambda}_i\cdot\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} = -\overset{(k)}{\gamma}_i\,]\\
&\overset{(k)}{\tau}_{i-1} = 1 \to [\,\overset{(k)}{\tau}_i = \infty,\ \overset{(k)}{\tau}_{i+2} = \overset{(k)}{\gamma}_{i+2},\ \overset{(k)}{\tau}_{i+1} = 0 \;;\; \overset{(k)}{\tau}_i\cdot\overset{(k)}{\tau}_{i+1} = -\overset{(k)}{\gamma}_{i+1}\,]\\
&\overset{(k)}{T}_{i-1} = \overset{(k)}{q}_{i-1} \to [\,\overset{(k)}{T}_i = \infty,\ \overset{(k)}{T}_{i+1} = 0,\ \overset{(k)}{T}_{i+2} = \overset{(k)}{P}_{i+2} z_{i+2}\overset{(k)}{q}{}_{i+1}^{-1} \;;\; \overset{(k)}{T}_{i+1}\overset{(k)}{T}_i = -\overset{(k)}{P}_{i+1} z_{i+1}\,]
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

является достаточными, а

$$\overset{(k)}{L}_{i-1} = 0 \to [\,\overset{(k)}{L}_i = \infty,\ \overset{(k)}{L}_{i-2} = \overset{(k)}{P}_{i-1} z_{i-1}\overset{(k)}{q}{}_{i-1}^{-1},\ \overset{(k)}{L}_{i+1} = \overset{(k)}{q}_{i+1} \;;\; \overset{(k)}{L}_i\cdot\overset{(k)}{L}_{i-1} = -\overset{(k)}{P}_i z_i\,] \tag{11}$$

необходимыми и достаточными условиями обращения в нуль $(i-1)$ –верхнего ведущего углового минора итерационной матрицы $\overset{(k)}{\mathfrak{C}}$. Эти соотношения можно охарактеризовать как доопределения и они играют важную роль в обеспечении корректности вычислений. В § I.2 построено [2] (на основе RL –метода) множество (теорема I.2.I) также из пяти методов для вычисления полного спектра трехдиагональных матриц. Этот результат получен также при условии, что все $\overset{(1)}{\Delta}{}_m^{j}$ –нижние ведущие угловые миноры матриц $\overset{(1)}{\mathfrak{C}}_3$ (и их итерационных матриц $\overset{(k)}{\mathfrak{C}}$, $K = 2,3,\dots$) отличны от нуля. В этих методах соответственно использованы следующие последовательности

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(k)}{G}_{j-1} = 1 - \overset{(k)}{\gamma}_{j+1}\cdot\overset{(k)}{G}{}_j^{-1} \;;\; \overset{(k)}{G}_m = \overset{(k)}{G}_{m-1} = 1 \;;\; j = m-1,\dots,1\\
&\overset{(k)}{S}_{j-1} = \overset{(k)}{\gamma}_j/(1 - \overset{(k)}{S}_j) \;;\; \overset{(k)}{S}_m = 0 \;;\; j = m, m-1,\dots,2\\
&\overset{(k)}{F}_{j-1} = (\overset{(k)}{P}_j z_j)/(\overset{(k)}{q}_j - \overset{(k)}{F}_j) \;;\; \overset{(k)}{F}_m = 0 \;;\; j = m, m-1,\dots,2\\
&\overset{(k)}{L}_{j-1} = \overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{P}_j z_j / \overset{(k)}{L}_j \;;\; \overset{(k)}{L}_m = \overset{(k)}{q}_m \;;\; j = m, m-1,\dots,2
\end{aligned}\right\} . \tag{12}$$

При этом лучшим из построенных [2] в § I.2 методов является

<u>$T_G d$ -метод</u>

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(k+1)}{q}_j = (\overset{(k)}{q}_j - \overset{(k)}{F}_j) + \overset{(k)}{F}_{j-1} \;;\; \overset{(k)}{F}_0 = 0 \;;\; j = m, m-1,\dots,1\\
&\overset{(k+1)}{F}_{j-1} = [(\overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{F}_{j-1})\cdot\overset{(k)}{F}_{j-1}]/(\overset{(k+1)}{q}_j - \overset{(k+1)}{F}_j) \;;\; \overset{(k+1)}{F}_m = 0 \;;\; j = m, m-1,\dots,2\\
&\tilde{\lambda}_j = \lim_{k\to\infty} \overset{(k+1)}{q}_j - d \;;\; j = m, m-1,\dots,1
\end{aligned}\right\} , \tag{13}$$

где $\overset{(1)}{F}_{j-1} = (\overset{(1)}{P}_j z_j)/(\overset{(1)}{q}_j - \overset{(1)}{F}_j) \;;\; \overset{(1)}{F}_m = 0 \;;\; j = m, m-1,\dots,2 ,$ (14)

в котором также требуются $(m-1)$ –делений, $(m-1)$ –умножений, m –сложений и m –вычитаний на каждой итерации, а также не накладывается никаких ограничений на элементы исходной матрицы $\mathfrak{C}_3$ (I). Собственные значения в $T_G d$ -алгоритме определяются с абсолютной погрешностью не хуже чем $\{|\Delta\lambda_i| < m\cdot\varepsilon\}_{i=1}^{m}$, а в остальных методах § I.2 – не хуже чем $\{|\Delta\lambda_i| < M\cdot\varepsilon\}_{i=1}^{m}$. В лемме I.2.I отмечены достаточные и необходимые и достаточные условия обращения в нуль нижних ведущих угловых миноров итерационной матрицы $\overset{(\infty)}{\mathfrak{C}}$. Эти условия можно также охарактеризовать как доопределения и они играют важную роль в обеспечении корректности вычислений. В § I.3 доказаны[2] лемма I.3.I и теорема I.3.I. В лемме I.3.I показано, что равенства

$$\overset{(\infty)}{\tilde{L}}_1 = 0 \;; \quad \overset{(\infty)}{L}_i + \overset{(\infty)}{\tilde{L}}_i = \overset{(\infty)}{q}_i \;; \quad 2 \le i \le m-1 \;; \quad \overset{(\infty)}{L}_m = 0, \qquad (I5)$$

где $\{\overset{(\infty)}{L}_i\}$ и $\{\overset{(\infty)}{\tilde{L}}_i\}$ есть $(5)_{4)}$ и $(I2)_{4)}$, являются необходимыми и достаточными условиями вырожденности матриц $\overset{(\infty)}{\mathfrak{C}}$, у которых все ведущие угловые миноры отличны от нуля. В теореме I.3.I[2] получено множество из четырех методов вычисления собственных значений трехдиагональных матриц, у которых (и их итерационных матриц) все ведущие угловые миноры обоих типов отличны от нуля. При этом использована информация о диагональных элементах $B = \mathfrak{C}_3^{-1}$ -матриц обратных к $\mathfrak{C}_3$(I).

<u>Во второй главе</u>, которая состоит из трех параграфов, рассмотрены проблемы повышения скорости сходимости, снятия ограничений на ненулевые ведущие угловые миноры и на различие всех собственных значений в спектре трехдиагональных матриц. Решена также проблема оптимального выбора ускоряющих сдвигов. В § 2.I выполнены модификации (теоремы 2.I.I и 2.I.2)[3] методов, полученных в первой главе, на основе стратегий ускорения (2) и (3). После такой модификации, например, $T_\lambda d$ – и $T_G d$ –методы становятся уже $T_\lambda Wd$ – и $T_G Wd$ –методами соответственно. При этом учтена тройная роль сдвигов в $LR(RL)$–методах. А именно, с помощью специальным образом подобранных сдвигов достигается ускорение сходимости, решаются проблемы нулевых миноров и сохранения трехдиагонального вида исходной матрицы и в процессе итераций. Итак, в § 2.I получено множество ускоренных методов вычисления полного спектра трехдиагональных матриц общего вида, которые имеют различные собственные значения. В § 2.2 предложены эффективные способы (теорема 2.2.I)[3] выбора $\overset{(k)}{W}$ -ускоряющих сдвигов

$$\overset{(k)}{W}_j = \overset{(k)}{q}_j - \overset{(k)}{p}_j r_j / \overset{(k)}{q}_{j-1} \;; \quad j = m, m-1, \cdots, 2 \;; \quad K = 1, 2, \cdots \qquad (I6)$$

для модифицированных LR-методов и

$$\overset{(k)}{W}_j = \overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{p}_j r_j / \overset{(k)}{q}_j \;; \quad j = 2, 3, \cdots, m \;; \quad K = 1, 2, \cdots \qquad (I7)$$

для модифицированных RL -методов, полученных в § 2.I . При этом в следствии 2.2.2 отмечено, что для $T_\lambda Wd$ -метода $\overset{(k)}{W}$ -ускоряющие сдвиги выбираются в виде

$$\overset{(k+1)}{W}_j = \overset{(k+1)}{q}_j - (\overset{(k)}{q}_j - \overset{(k)}{W}_j - \overset{(k)}{T}_j)\cdot\overset{(k)}{T}_j\cdot\overset{(k+1)}{q}{}_{j-1}^{-1} \;; \quad \overset{(1)}{W}_j = 0 \;; \quad j = m, \cdots, 2 \;; \quad K = 1, 2, \cdots \qquad (I8)$$

а для $T_G Wd$ -метода $\tilde{W}_j$ выбираются в виде

$$\overset{(k+1)}{\tilde{W}}_j = \overset{(k+1)}{q}_{j-1} - (\overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{\tilde{W}}_j - \overset{(k)}{F}_{j-1})\cdot\overset{(k)}{F}_{j-1}\cdot\overset{(k+1)}{q}{}_j^{-1} \;; \quad \overset{(1)}{\tilde{W}}_j = 0 \;; \quad j = 2, \cdots, m \;; \quad K = 1, 2, \cdots \qquad (I9)$$

При этом показано, что использование стратегии (2) приводит к кубическому ускорению сходимости модифицированных алгоритмов, а стратегии (3)– к квадратическому ускорению. В § 2.3 получены (теорема 2.3.I)[6] на основе анализа свойств сходимости LR-алгоритма эффективные способы вычисления полного спектра вещественных трехдиагональных матриц общего вида при наличии у них кратных или (и) комплексных собственных значений.

<u>Третья глава</u> состоит из двух параграфов. В этой главе рассмотрены методы[4] вычисления собственных(корневых) векторов трехдиагональных матриц $\mathfrak{C}_3(1)$ –общего вида произвольной структуры. В § 3.I приведены методы (теорема 3.I.I)[4] отыскания собственных векторов при заданных собственных значениях трехдиагональных матриц общего вида, у которых все внедиагональные элементы отличны от нуля. При этом не накладывается никаких ограничений на ведущие угловые миноры $(\mathfrak{C}_3 - \lambda E)$–матрицы. Из множества полученных[4] в этом параграфе точных алгебраических представлений для собственных векторов $(U'(\lambda) = \{U'_i(\lambda)\}_{i=1}^{m})$, где $U(\lambda) = \|U'(\lambda)\|^{-1} U'(\lambda)$, имеем (в случае вещественных собственных значений) рекуррентные представления (следствие 3.I.2)[4] вида

I. Рекуррентный метод, основанный на нижних ведущих угловых минорах.

2. Рекуррентный метод, основанный на верхних ведущих угловых минорах.

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Если } U'_{i-1}(\lambda) \neq 0 \text{ и } 0 < |\tilde{L}_i(\lambda)| < \infty, \\
\text{то } \; -\dfrac{p_i}{\tilde{L}_i(\lambda)}\, U'_{i-1}(\lambda). \\
\text{Если } U'_{i-1}(\lambda) = 0 \text{ либо } \tilde{L}_i(\lambda) = 0, \\
\text{то } \; -\dfrac{p_{i-1}}{r_i}\, U'_{i-2}(\lambda). \\
\text{Если } \tilde{L}_i(\lambda) = \infty, \text{ то} \\
0, \text{ где } U'_1(\lambda) = 1 \;; \; i = 2, 3, \cdots, m
\end{array}\right\} = U'_i(\lambda) = \left\{\begin{array}{l}
\text{Если } U'_{i+1}(\lambda) \neq 0 \text{ и } 0 < |L_i(\lambda)| < \infty, \\
\text{то } \; -\dfrac{r_{i+1}}{L_i(\lambda)}\, U'_{i+1}(\lambda). \\
\text{Если } U'_{i+1}(\lambda) = 0 \text{ либо } L_i(\lambda) = 0, \\
\text{то } \; -\dfrac{r_{i+2}}{p_{i+1}}\, U'_{i+2}(\lambda). \\
\text{Если } L_i(\lambda) = \infty, \text{ то} \\
0, \text{ где } U'_m(\lambda) = 1 \;; \; i = m-1, \cdots, 1
\end{array}\right. \qquad (20)$$

Здесь:
$$\left.\begin{array}{l}
\tilde{L}_{i-1}(\lambda) = q_{i-1}(\lambda) - p_i r_i / \tilde{L}_i(\lambda) \;; \quad \tilde{L}_m(\lambda) = q_m(\lambda) \;; \quad i = m, m-1, \cdots, 2 \\
L_i(\lambda) = q_i(\lambda) - p_i r_i / L_{i-1}(\lambda) \;; \quad L_1(\lambda) = q_1(\lambda) \;; \quad i = 2, 3, \cdots, m \\
\{ q_n(\lambda) = (q_n - \lambda) \}_{n=1}^{m}
\end{array}\right\} \qquad (2I)$$

В этом же параграфе приводится метод вычислений собственных векторов для таких матриц и при наличии у них комплексных собственных значений. Наличие нулевых внедиагональных элементов у трехдиагональных матриц $\mathcal{C}_3(\mathrm{I})$ общего вида существенным образом влияет на структуру пространства собственных векторов таких матриц. В § 3.2 получен обобщенный метод (теорема 3.2.I)[4] вычисления собственных(корневых) векторов вещественных трехдиагональных матриц общего вида произвольной структуры. Доказательство теоремы 3.2.I существенным образом опирается на разбиение исходной матрицы на несвязанные трехдиагональные подматрицы и связанные блоки, а также на анализ структуры пространства их собственных векторов на основе леммы 3.2.I ([4]) и следствия 3.2.I [4].

<u>Четвертая глава</u> состоит также из двух параграфов. В этой главе рассмотрены способы выбора ускоряющих сдвигов (как обобщение полученных методов для трехдиагональных матриц) при поиске всех собственных значений пяти- и семидиагональных матриц общего вида $\mathcal{C}_5(\mathrm{I})$ и $\mathcal{C}_7(\mathrm{I})$, а также методы вычисления их кратных и комплексных собственных значений на основе LR-метода. В § 4.I доказаны теоремы 4.I.I[8] и 4.I.2[8]. В теореме 4.I.I предложен следующий способ выбора ускоряющих сдвигов при поиске всех собственных значений пятидиагональных матриц $\mathcal{C}_5(\mathrm{I})$

$$
{}_5\overset{(k)}{W}_j = \begin{cases} 0, \text{ если } |\overset{(k)}{p}_j| \geq 1 \\ \overset{(k)}{q}_j - (\overset{(k)}{b}_j \cdot a_j) \cdot \overset{(k)}{q}{}^{-1}_{j-1}, & \text{если } |\overset{(k)}{p}_j| < 1 \text{ и } 1 > |\overset{(k)}{b}_j| > \varepsilon \\ \overset{(k)}{q}_j - (\overset{(k)}{p}_j \overset{(k)}{z}_j) \cdot \overset{(k)}{q}{}^{-1}_{j-1}, & \text{если } |\overset{(k)}{p}_j| < 1 \text{ и } |\overset{(k)}{b}_j| \leq \varepsilon \end{cases} \tag{22}
$$

и доказана при этом кубическая (квадратическая) сходимость соответственно для стратегии (2) и (3) LR-метода. В теореме 4.I.2 показано, что если в LR-методе для вычисления собственных значений семидиагональных матриц $\mathcal{C}_7(\mathrm{I})$ выбирать ${}_7\overset{(k)}{W}_j$-ускоряющие сдвиги для любого $j = m, m-1, \ldots, 2$ и $k = 1, 2, \ldots$ в виде

$$
{}_7\overset{(k)}{W}_j = \begin{cases} 0, \text{ если } |\overset{(k)}{p}_j| \geq 1, \ |\overset{(k)}{b}_j| \geq 1 \text{ и } |\overset{(k)}{z}_j| \geq 1 \\ \overset{(k)}{q}_j - \overset{(k)}{z}_j \cdot f_j \cdot \overset{(k)}{q}{}^{-1}_{j-1}, & \text{если } |\overset{(k)}{p}_j| < 1, \ |\overset{(k)}{b}_j| < 1 \text{ и } \varepsilon < |\overset{(k)}{z}_j| < 1 \\ \overset{(k)}{q}_j - \overset{(k)}{b}_j \cdot \overset{(k)}{a}_j \cdot \overset{(k)}{q}{}^{-1}_{j-1}, & \text{если } |\overset{(k)}{p}_j| < 1, \ |\overset{(k)}{z}_j| \leq \varepsilon \text{ и } \varepsilon < |\overset{(k)}{b}_j| < 1 \\ \overset{(k)}{q}_j - \overset{(k)}{p}_j \cdot \overset{(k)}{z}_j \cdot \overset{(k)}{q}{}^{-1}_{j-1}, & \text{если } |\overset{(k)}{z}_j| < \varepsilon, \ |\overset{(k)}{b}_j| \leq \varepsilon \text{ и } \varepsilon < |\overset{(k)}{p}_j| < 1, \end{cases} \tag{23}
$$

то в ускоренном LR-методе можно также достичь квадратического (кубического) ускорения сходимости. Способы (22) и (23) выбора ускоряющих сдвигов в LR-алгоритме сохраняют как вещественность, так и ленточный вид исходной $\mathcal{C}_5(\mathrm{I})$ и $\mathcal{C}_7(\mathrm{I})$-матриц и в процессе итераций. В § 4.2 получены также эффективные способы (теорема 4.2.I)[8] вычисления

полного спектра вещественных пяти- и семидиагональных матриц общего вида и при наличии у них кратных или (и) комплексных собственных значений.

<u>Пятая глава</u>, в которой приведены[5,7,9] описание системы программ на ФОРТРАНе для ЭВМ ЕС-I06I(60) и результаты расчетов, состоит из трех параграфов. В § 5.I приведено описание системы стандартных подпрограмм на ФОРТРАНе для вычисления собственных значений вещественных трех-, пяти- и семидиагональных матриц, а также собственных(корневых) векторов вещественных трехдиагональных матриц общего вида произвольной структуры. Все подпрограммы реализованы в арифметике с двойной точностью. В подпрограммах для вычисления собственных значений трехдиагональных матриц $\mathcal{C}_3(\mathrm{I})$ использованы алгоритмы, полученные в § 2.I и § 2.3, и ускоряющие сдвиги (I6)÷(I9). Кроме того в описываемых подпрограммах для анализа характера спектра трехдиагональных <u>подматриц</u> порядка не выше 4, появляющихся на диагонали итерационных матриц $\overset{(k)}{\mathcal{C}}$, использованы необходимые и достаточные условия, полученные в леммах 5,6 из [6]. Также в этих подпрограммах начальный d-сдвиг и d-сдвиги для снятия появления нулевых или близких к нулю ведущих угловых миноров в матрицах $\overset{(k)}{\mathcal{C}}$ выбираются следующим образом. Если в соответствующих методах (программах) появляются равенства $\{(\overset{(k)}{\Lambda}_{i+1} \simeq 0, \overset{(k)}{L}_i \simeq 0), (\overset{(k)}{G}_{i-1} \simeq 0, \overset{(k)}{L}_i \simeq 0), (\overset{(k)}{\tau}_i \simeq 1, \overset{(k)}{S}_i \simeq 1), (\overset{(k)}{T}_i \simeq \overset{(k)}{q}_i, \overset{(k)}{F}_i \simeq \overset{(k)}{q}_i)\}$ при любых i и k для матриц $\overset{(k)}{\mathcal{C}}$, то при данном k итерационным образом в $\overset{(k)}{\mathcal{C}}$ добавляется единичная матрица до тех пор пока у матрицы $\overset{(k)}{\mathcal{C}}$ (при всех i) не окажется отмеченных выше равенств (см. IOс. [5]).

В подпрограммах для нахождения собственных(корневых) векторов трехдиагональных матриц использованы алгоритмы, полученные в следствиях 3.I.2 и 3.I.3 и в теореме 3.2.I диссертации.

В подпрограммах для одновременного вычисления собственных значений и соответствующих им собственных(корневых) векторов трехдиагональных матриц $\mathcal{C}_3(\mathrm{I})$ использованы указанные выше подпрограммы. Кроме этого в этих подпрограммах для вычисления присоединенных векторов использована также информация о геометрической кратности кратного собственного значения. Такая информация имеется в подпрограмме для вычисления собственных значений на основе результатов теоремы 2.3.I, лемм 2.3.2 и 3.2.I и следствия 3.2.I, а также лемм 5 и 6 из [6]. В подпрограммах для вычисления собственных значений пяти- и семидиагональных матриц использован известный основной LR-алгоритм, отмеченный в § 4.I диссертации, и ускоряющие сдвиги (22) и (23), а также результаты теоремы 4.2.I диссертации и лемм 3÷4 в [8]. В отмеченных выше подпрограммах для вычисления собственных значений трех-, пяти- и семидиагональных матриц не требуется дополнительной памяти ЭВМ кроме массивов для хранения элементов исходных матриц. В § 5.2 приведены[5,8,9] примеры тестовых расчетов и таблицы сравнения результатов вычислений с результатами основных известных уже стандартных программ.

Для тестовых расчетов использованы различные симметричные матрицы, у некоторых из которых известны точные формулы для вычисления собственных значений и собственных векторов. Некоторые из тестовых симметричных матриц имеют приблизительно одинаковые собственные значения. Некоторые из несимметричных тестовых матриц имеют вещественные либо комплексные кратные собственные значение. Порядки тестовых матриц выбирались в диапазоне от 3 до 500.

Известные стандартные подпрограммы, в которых реализованы $QL(QR)$-алгоритмы, методы бисекции и обратных итераций и т.д. и с результатами счета которых велось сравнение, выбирались из библиотеки "Дубна". Результаты анализа тестовых расчетов и таблиц вынесены в основные результаты.

В § 5.3 приведен пример семества положительно определеных трехдиагональных матриц, для которых итерационный процесс LR-алгоритма без использования сдвигов и перестановок не осуществим, т.е. прерывается.

В заключении к диссертации формулируются результаты представленных исследований.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

I. Построено (на основе модификации $LR(RL)$-алгоритмов) множество корректных ускоренных методов вычисления полного спектра трехдиагональных матриц, все собственные значения которых различны. При этом лучшими из построенных являются ($T_\Lambda Wd$-, $T_G Wd$)-методы, у которых требуется $(m-1)$-деление и $(m-1)$ -умножение на каждой итерации, а также не накладывается никаких ограничений на элементы исходной матрицы.

2. Получены эффективные универсальные способы выбора ускоряющих сдвигов при поиске всех собственных значений на основе LR-метода, сохраняющие вещественность и трехдиагональный вид исходной матрицы и в процессе итераций.

3. Получены эффективные способы вычисления полного спектра вещественных трехдиагональных матриц общего вида при наличии у них кратных или (и) комплексных собственных значений.

4. Получено множество точных мультипликативных и рекуррентных представлений для компонент собственных векторов без ограничений на поведение ведущих угловых миноров трехдиагональной матрицы $(\mathbb{C}-\lambda E)$.

5. Получен обобщенный метод вычисления собственных(корневых) векторов вещественных трехдиагональных матриц общего вида произвольной структуры.

6. Получены эффективные способы выбора ускоряющих сдвигов при поиске всех собственных значений на основе LR-метода, сохраняющих пяти- и семидиагональный вид исходной вещественной матрицы и в процессе итераций.

7. Получены эффективные способы вычисления полного спектра вещественных пяти- и семидиагональных матриц общего вида при наличии у них кратных или (и) комплексных собственных значений.

8. Получены необходимое и достаточное условия вырожденности трехдиагональных матриц общего вида $\mathbb{C}_3^{(k)}$ (I), ведущие угловые миноры которых (порядка менее m) отличны от нуля.

9. Создана система стандартных подпрограмм на ФОРТРАНе для ЭВМ ЕС-IO6I(60) вычисления собственных значений вещественных трех-, пяти- и семидиагональных матриц, а также собственных(корневых) векторов вещественных трехдиагональных матриц общего вида произвольной структуры. При этом лучшие из созданных подпрограмм характеризуются следующими основными показателями:

а) Время вычисления всех собственных значений с использованием новых подпрограмм в среднем более чем в 2 раза меньше чем с использованием подобных известных стандартных подпрограмм из библиотеки "Дубна".

в) Для сравнения полных затрат времени на вычисления имеет место соотношение $(\hat{t}_{\lambda,u(\lambda)}/t_{\lambda,u(\lambda)}) = K \approx 1+\frac{m}{8}$, где $t_{\lambda,u(\lambda)}$ и $\hat{t}_{\lambda,u(\lambda)}$ - полное время вычисления всех собственных значений и собственных векторов в наших и соответственно в $QL(QR)$-алгоритмах.

с) Среднее число итераций на одно собственное значение в новых методах не превосходит 4.

d) Невязка $\Delta=(\mathbb{C}-\lambda E)\,U(\lambda)$ и $|\Delta S| = |\Sigma\hat{\lambda}_i - tr\,\mathbb{C}|$, вычисленные по результатам новых подпрограмм, как для симметричных матриц так и матриц, которые имеют кратные собственные значения, лучше чем у подобных известных стандартных подпрограмм.

ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

I. Г.А.Емельяненко,Им Ён Сек. О компактных модификациях метода Бауэра для нахождения собственных значений трехдиагональных матриц. Препринт ОИЯИ, РII-88-45I, Дубна, 1988.

2. Г.А.Емельяненко,Им Ён Сек. Стратегия смещений и множества корректных методов вычисления собственных значений трехдиагональных мат-

риц общего вида. Препринт ОИЯИ, Р11-88-452, Дубна, 1988.
3. Г.А.Емельяненко,Им Ён Сек. О множествах корректных ускоренных методов вычисления полного спектра трехдиагональных матриц общего вида. Препринт ОИЯИ, Р11-88-453, Дубна, 1988.
4. Г.А.Емельяненко,Им Ён Сек. О методах нахождения собственных векторов вещественных трехдиагональных матриц. Препринт ОИЯИ, Р11-88-736, Дубна, 1988.
5. Г.А.Емельяненко,Им Ён Сек. О системах программ на ФОРТРАНе ЭВМ ЕС-1061(60) для вычисления всех корневых векторов любых вещественных трехдиагональных матриц, а также полного спектра таких матриц простой структуры. Препринт ОИЯИ, Р11-88-787, Дубна, 1988.
6. Г.А.Емельяненко,Им Ён Сек. Методы вычисления полного спектра вещественных трехдиагональных матриц общего вида произвольной структуры. Препринт ОИЯИ, Р11-88-920, Дубна, 1988.
7. Г.А.Емельяненко,Им Ён Сек. О системе программ на ФОРТРАНе ЭВМ ЕС-1061(60) для вычисления собственных значений и корневых векторов вещественных трехдиагональных матриц общего вида произвольной структуры. Препринт ОИЯИ, Р11-88-921, Дубна, 1988.
8. Г.А.Емельяненко,Им Ён Сек. О методах поиска всех собственных значений блочно-трехдиагональных, а также пяти- и семидиагональных матриц. Препринт ОИЯИ, Р11-89-543, Дубна, 1989.
9. Г.А.Емельяненко,Им Ён Сек. Об эффективных методах и стандартных программах на ФОРТРАНе ЭВМ ЕС-1061(60) для вычисления всех собственных значений пяти- и семидиагональных матриц, а также матриц Хессенберга. Препринт ОИЯИ, Р11-89-544, Дубна, 1989.
10. Г.А.Емельяненко,Им Ён Сек. Краткий обзор, анализ проблем и систематизация методов нахождения собственных значений и собственных векторов трех-, пяти-, семидиагональных и хессенберговых матриц. Деп. пуб. ОИЯИ, Б1-11-89-574, Дубна, 1989.

**Рукопись поступила в издательский отдел
29 декабря 1989 года.**