

93730

K-471

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

УДК 519.642.6

11-89-71

КРАВЦОВ

Владимир Дмитриевич

**МЕТОД ОБЪЕМНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ МАГНИТОСТАТИКИ**

Специальность: 01.01.07 – вычислительная математика

**Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Дубна 1989

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединённого института ядерных исследований.

Научные руководители:

доктор физико-математических наук,
профессор

Е. П. ЖИДКОВ

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник

П. Г. АКШИШИН

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук

Н. И. ДОЙНИКОВ

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник

Н. Б. ЗЯБРЕВ

Ведущее научно-исследовательское учреждение:

Московский инженерно-физический институт, г. Москва.

Автореферат разослан 20 мая 1989 г.

Защита диссертации состоится 20 апр 1989 г. в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Учёный секретарь Совета

кандидат физико-математических наук

Иванченко

З. М. Иванченко

Актуальность

При проектировании и эксплуатации различных физических установок часто возникает необходимость определения магнито-статических полей. До появления ЭВМ решение задач магнитостатики было крайне затруднено вследствие сложной трёхмерной конфигурации полей и необходимости учёта эффекта насыщения ферромагнетика. Применение аналитических методов, даже в случае линейных задач, позволяло проводить лишь оценочные расчёты. Вследствие этого численное моделирование является очень важным, а часто и единственно возможным способом воссоздания картины поля. Физическое моделирование, как правило, очень долгий и дорогостоящий путь, а в случае магнитных систем со сверхпроводящей обмоткой экспериментальное маломасштабное моделирование и вовсе невозможно из-за ограничений на максимальную плотность тока и других проблем. В этих случаях численный эксперимент является единственным способом исследования.

Существует три основных типа постановок задачи магнитостатики: дифференциальный, интегральный и смешанный. Они отличаются видом уравнений, используемых для описания магнито-статического поля. Каждый метод имеет как свои достоинства, так и свои недостатки. Вопрос о выборе того или иного метода надо решать, исходя из геометрии магнита, формы токовых обмоток, степени локализации поля и характера его распределения.

Диссертация посвящена изучению второго типа методов - методов, использующих интегральную постановку. При решении объёмных интегральных уравнений как в двумерном, так и в трёхмерном виде возникает много теоретических и практических проблем. Весьма трудоёмким является процесс вычисления матричных коэффициентов систем дискретизованных уравнений. Дискретизованный оператор вырожден, что при больших значениях магнитной проницаемости приводит к численной неустойчивости задачи.

Несмотря на то, что наиболее полную картину поля может дать только решение трёхмерной задачи, двумерное приближение, ввиду особенностей конфигурации большинства магнитных систем, продолжает играть заметную роль в проектировании электрофизи-

ческих установок. Это приводит к необходимости дальнейшего развития алгоритмов решения двумерных задач магнитостатики. Всё это определяет актуальность исследования поставленных проблем.

Работы, положенные в основу диссертации, выполнены в соответствии с Проблемно-тематическим планом научно-исследовательских работ Объединённого института ядерных исследований в Дубне.

Цель работы

Целью диссертационной работы является разработка и теоретическое обоснование численных методов решения задач магнитостатики, что включает:

- выбор дискретизации исходного уравнения,
- теоретическое исследование свойств дискретизованных задач,
- разработка методов и алгоритмов, необходимых для реализации предлагаемых дискретизаций,
- разработка итерационных процессов для решения систем нелинейных дискретизованных уравнений,
- создание комплексов программ, реализующих разработанные методы,
- применение комплексов программ при проектировании конкретных электрофизических систем.

Научная новизна

Исследованы свойства дискретизованных задач магнитостатики в двумерном и осесимметричном случаях в рамках интегральной постановки. Предложена дискретизация двумерных интегральных уравнений магнитостатики с кусочно-линейной аппроксимацией намагниченности. Доказана теорема о существовании у двумерного дискретизованного оператора собственных векторов с нулевыми собственными значениями. С учётом вырожденности дискретизованного оператора модернизирован итерационный процесс для решения нелинейных систем дискретизованных уравнений, рассмотренный ранее. Разработана методика вычисления коэффициентов матриц, входящих в дискретизованные двумерные и осесимметричные уравнения, и в связи с этим сформулирован метод вычисления производных от эллиптических интегралов по параметрам. Разработан алгоритм оптимизации распределения двумерных и осесимметричных магнитостатических полей за счёт варьирования токовых обмоток. Предложен параллельный алгоритм решения трёхмерной задачи магнитостатики на основе метода объёмных интегральных уравнений.

Практическая ценность

Методы и алгоритмы, развитые в диссертации, применялись при проектировании различных электрофизических установок.

Комплекс программ расчёта двумерных полей применялся при проектировании фокусирующей системы второго направления медленного вывода пучка синхрофазотрона ЛВЭ ОИЯИ. Для повышения интенсивности выводимого пучка необходимо было создать линейно растущее поле с помощью ферромагнитных шимм, форму которых позволили определить проведённые исследования. Проведён двумерный расчёт септум-магнитов Ламбертсона в системе вывода пучка нуклотрона ЛВЭ, а также двумерный расчёт дипольных магнитов ускорительно-накопительной электронной системы Ереванского физического института.

Алгоритм решения трёхмерной задачи магнитостатики, включающий в себя параллельные вычисления на матричном процессоре ЕС-2706, был использован для расчёта дипольного магнита нуклотрона ЛВЭ.

Сравнение результатов некоторых расчётов с экспериментальными данными и с расчётами, использующими другие методы, позволяет сделать вывод об эффективности применения метода интегральных уравнений для расчёта магнитных систем.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались на семинарах по вычислительной и прикладной математике ЛВТА ОИЯИ, на конференции "Ломоносовские чтения" (МГУ, 1987 г.), на конференции по расчётам магнитных полей COMRIMAG (Грац, Австрия, 1987 г.), на XI Всесоюзном совещании по ускорителям заряженных частиц (Дубна, 1988 г.), на конференции факультета физико-математических наук Университета дружбы народов (Москва, 1987 и 1988 гг.).

Публикации

Основное содержание диссертации опубликовано в семи печатных работах.

Структура и объём работы

Диссертация изложена на 76 страницах машинописного текста и

состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы из 91 наименования, шести таблиц и семнадцати рисунков.

Содержание диссертации

Во введении даётся краткий обзор литературы по вопросам математического моделирования нелинейных магнитостатических систем; приводится круг изучаемых проблем. Пусть Ω - область, занимаемая ферромагнетиком, - разбита на объединение попарно непересекающихся подобластей $\{\Omega_i\}$. Кусочно-постоянная дискретизация интегрального уравнения магнитостатики будет иметь вид

$$\frac{\vec{B}_i}{\mu(\vec{B}_i)} = \mu_0 \vec{H}^s(\vec{a}_i) + \sum_{j=1}^N \left[\frac{\nabla_{\vec{a}_j}}{4\pi} \int_{\Omega_j} (\vec{B}_j (1 - \frac{1}{\mu(\vec{B}_j)}), \nabla_{\vec{a}_j} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}_j|}) dV_{\vec{x}} \right] \Big|_{\vec{a} = \vec{a}_i} \quad (1)$$

в трёхмерном случае. В двумерном случае эта система уравнений редуцируется следующим образом:

$$\frac{\vec{B}_i}{\mu(\vec{B}_i)} = \mu_0 \vec{H}^s(\vec{a}_i) - \sum_{j=1}^N \left[\frac{\nabla_{\vec{a}_j}}{2\pi} \int_{\Omega_j} (\vec{B}_j (1 - \frac{1}{\mu(\vec{B}_j)}), \nabla_{\vec{a}_j} \ln|\vec{x} - \vec{a}_j|) dS_{\vec{x}} \right] \Big|_{\vec{a} = \vec{a}_i} \quad (2)$$

Для осесимметричного случая предложена следующая аппроксимация намагниченности. Вектор \vec{M} (M_1, M_2) представляется в виде

$$M_1 = \frac{\gamma}{\tau} M_2^i, \\ M_2 = M_2^i,$$

где M_1^i и M_2^i постоянны в каждом Ω_i . Это обеспечивает непрерывность \vec{M} при $\tau = 0$. Дискретизация осесимметричного уравнения имеет вид

$$\frac{B_i}{\mu(\vec{B}_i)} = \mu_0 H^s(\vec{a}_i) - \frac{\nabla_{\vec{a}_j}}{4\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_j} (M_1^j \frac{\partial}{\partial x} F_1(\vec{a}, \vec{x}) + M_2^j F_2(\vec{a}, \vec{x})) \vec{x} dV_{\vec{x}} \Big|_{\vec{a} = \vec{a}_i} \quad (3)$$

где

$$F_1(\vec{a}, \vec{x}) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2}} (r^2 + \tau^2 - 2\tau r \cos \varphi + (r^2 - \tau^2)^2)^{-\frac{1}{2}} d\varphi,$$

$$F_2(\vec{a}, \vec{x}) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2}} (r^2 + \tau^2 - 2\tau r \cos \varphi + (r^2 - \tau^2)^2)^{-\frac{1}{2}} d\varphi.$$

Сокращённо все три системы можно записать следующим образом:

$$\hat{B} = \mu_0 \hat{H}^s + ([A] + [E]) \hat{M}(\hat{B}), \quad (4)$$

где

$$\hat{B} = (\vec{B}_1, \vec{B}_2, \dots, \vec{B}_N)^T, \\ \hat{H}^s = (\vec{H}^s(\vec{a}_1), \vec{H}^s(\vec{a}_2), \dots, \vec{H}^s(\vec{a}_N))^T, \\ \hat{M}(\hat{B}) = (\vec{M}(\vec{B}_1), \vec{M}(\vec{B}_2), \dots, \vec{M}(\vec{B}_N))^T,$$

$[E]$ - единичная матрица соответствующей размерности.

Первая глава посвящена теоретическому исследованию свойств дискретизованных уравнений. Все дальнейшие рассуждения проводятся в предположении, что для $\vec{M}(\vec{B}) = \vec{B} (1 - \frac{1}{\mu(\vec{B})})$ имеет место неравенство

$$0 \leq |\vec{M}(\vec{B})| \leq M_{\max},$$

которое справедливо для любого типа железа. Дополнительно потребуем, чтобы для произвольных \vec{B}_1 и \vec{B}_2 выполнялось неравенство

$$\mu_0 |\vec{M}(\vec{B}_1) - \vec{M}(\vec{B}_2)| < g |\vec{B}_1 - \vec{B}_2|,$$

где $0 \leq g < 1$ и не зависит от \vec{B}_1 и \vec{B}_2 . Это неравенство имеет место для безгистерезисных сред.

В §1.1 на основе принципа Шаудера доказываются теоремы существования решения у дискретизованных уравнений (2) и (3).

В §1.2 на основе предположения о том, что спектр дискретизованного оператора $[A]$ из (4) действителен и лежит на отрезке $[-1, 0]$, доказываются теоремы о единственности решения дискретизованных задач (2) и (3). Само предположение подтверждалось численными экспериментами. Далее рассматривается вопрос о вырожденности двумерного дискретизованного оператора $[A]$.

Пусть $\{\Omega_i\}$ - треугольники, которые могут иметь либо общую сторону, либо общую вершину, либо не пересекаться совсем. Пусть $\varphi(\vec{x})$ - скалярная функция, непрерывная на Ω , линейная на каждом Ω_i и постоянная на границе Ω . Рассмотрим векторную функцию $\vec{M}(\vec{x})$:

$$\vec{M}(\vec{x}) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_2, \quad (5)$$

где \vec{e}_1, \vec{e}_2 - ортонормированная система векторов, а x и y - соответствующие координаты вектора \vec{x} .

Теорема

Оператор $[A]$ тождественно равен нулю на $\vec{M}(\vec{x})$ из (5).

Далее показывается, что существует L линейно независимых собственных векторов оператора $[A]$ с нулевым собственным значением, где L - число внутренних вершин разбиения.

В §1.3 предлагается дискретизация двумерного интегрального уравнения магнитостатики с кусочно-линейной аппроксимацией намагниченности. Пусть $f_k(\vec{x})$ и $g_k(\vec{x})$ - соответственно линейная и квадратичная функции формы, связанные с вершиной P_k :

$$f_k(\vec{P}_k) = \delta_{kl} \quad , \quad g_k(\vec{P}_k) = \delta_{kl} \quad ,$$

$\vec{M}(\vec{x})$, $\vec{H}(\vec{x})$, $\vec{B}(\vec{x})$ приближаются следующим образом:

$$\vec{M}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^L f_k(\vec{x}) \vec{M}_k \quad ; \quad \vec{H}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^L f_k(\vec{x}) \vec{H}_k \quad ; \quad \vec{B}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^L f_k(\vec{x}) \vec{B}_k \quad ;$$

$$\vec{M}_k = \vec{M}(\vec{P}_k) \quad , \quad \vec{H}_k = \vec{H}(\vec{P}_k) \quad ; \quad \vec{B}_k = \vec{B}(\vec{P}_k) \quad .$$

Обозначим

$$\varphi_i = - \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} (\vec{M}(\vec{x}), \nabla_{\vec{x}} \ln |\vec{x} - \vec{a}_i|) dS_{\vec{x}} \Big|_{\vec{a} = \vec{a}_i} \quad , \quad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots, L_{\Sigma} \quad ;$$

где L_{Σ} - суммарное число вершин и сторон треугольников $\{R_i\}$. Дискретизация будет иметь вид

$$\int_{\Omega} \vec{H}(\vec{x}) f_i(\vec{x}) dS_{\vec{x}} = \int_{\Omega} \vec{H}^0(\vec{x}) f_i(\vec{x}) dS_{\vec{x}} + \int_{\Omega} f_i(\vec{x}) \nabla_{\vec{x}} \left\{ \sum_{j=1}^{L_{\Sigma}} \varphi_j g_j(\vec{x}) \right\} dS_{\vec{x}} \quad , \quad (7)$$

$$i = 1, 2, \dots, L \quad .$$

От рассматриваемых ранее кусочно-линейных дискретизаций эта отличается большей простотой вычисления коэффициентов матриц.

Во второй главе рассматриваются вопросы вычисления коэффициентов матриц систем (2) и (3). Для расчёта коэффициентов в (3) предложен способ вычисления производных по параметрам от эллиптических интегралов.

В §2.1 приводится оптимизированная процедура вычисления коэффициентов в (2) и (3), полностью устраняющая дублирование при расчёте.

В §2.2 предложен итерационный процесс решения нелинейной дискретизованной системы уравнений, учитывающий вырожденность дискретизованного оператора. Для реализации этого процесса используется метод неполного разложения Холецкого в сочетании с методом сопряжённых градиентов.

В третьей главе приводятся результаты расчётов, выполненных с использованием разработанных в диссертации численных методов.

В §3.1 дается описание комплексов программ для решения дву-

мерной и осесимметричной задач магнитостатики. Также приводятся результаты двумерного численного анализа магнитного поля системы медленного вывода пучка синхрофазотрона ЛВЭ ОИЯИ и магнитов ускорительно-накопительной электронной системы.

В §3.2 приводится расчёт септум-магнитов Ламбертсона в двумерном приближении.

В §3.3 приводится описание комплекса программ, реализующих предложенный алгоритм оптимизации распределения двумерного или осесимметричного магнитного поля путём варьирования токовых обмоток. Обсуждаются результаты численных расчётов.

В §3.4 предложен алгоритм решения трёхмерной задачи магнитостатики на основе метода объёмных интегральных уравнений с привлечением параллельных вычислений на матричном процессоре ЕС-2706. Создан комплекс программ на языках FORTRAN и VFC, реализующий этот алгоритм. Приведены результаты трёхмерного расчёта дипольного магнита.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

Основные результаты

1. Изучены кусочно-постоянная и кусочно-линейная дискретизация интегральных уравнений магнитостатики. Исследованы свойства дискретизованного оператора. Доказана теорема о существовании у него собственных векторов с нулевыми собственными значениями.

2. Предложен итерационный процесс решения нелинейной дискретизованной системы уравнений, учитывающий вырожденность дискретизованного оператора. Показана эффективность использования данного итерационного процесса в случае малых полей.

3. Созданы комплексы программ для решения двумерных задач магнитостатики в интегральной постановке с использованием полученных в диссертации свойств дискретизованного оператора.

4. Комплексы программ расчёта двумерных магнитных полей использовались при проектировании ряда установок: системы медленного вывода пучка, септум-магнитов Ламбертсона, дипольных магнитов ускорительно-накопительной электронной системы.

5. Предложен алгоритм оптимизации распределения двумерных магнитостатических полей посредством вариации токовых обмоток. На его основе создан комплекс программ, применявшийся при проектировании ряда установок.

6. Разработан алгоритм решения трёхмерной задачи магнитоста-

тики, осуществляющий распараллеливание метода объёмных интегральных уравнений. Комплекс программ, реализующих этот алгоритм, позволяет резко сократить затраты машинного времени на трёхмерные расчёты. Комплекс использовался для расчёта дипольных магнитов.

Работы, положенные в основу диссертации:

1. Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. Метод интегральных уравнений в осесимметричных задачах магнитостатики. ОИЯИ, РИИ-85-552, Дубна, 1985.
2. Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. Об одном оптимизированном алгоритме решения двумерных интегральных уравнений магнитостатики. ОИЯИ, РИИ-86-534, Дубна, 1986.
3. Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. Об одном устойчивом алгоритме решения интегральных уравнений магнитостатики. ОИЯИ, РИИ-86-718, Дубна,* 1986.
4. Akishin P.G., Zhidkov E.P., Kravtsov V.D. Investigation of the Integral Magnetic Field Equations. JINR, E11-87-101, Dubna, 1987.
5. Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. Оптимизация распределения двумерных магнитных полей на основе метода интегральных уравнений. ОИЯИ, РИИ-87-427, Дубна, 1987.
6. Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. Решение двумерных интегральных уравнений магнитостатики в случае линейной аппроксимации намагничённости. ОИЯИ, РИИ-87-732, Дубна, 1987.
7. Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. Об одном параллельном алгоритме решения трёхмерных интегральных уравнений магнитостатики. Препринт ОИЯИ, РИИ-88-918, Дубна, 1988.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 февраля 1989 года.