ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

11-89-702

ЖИДКОВА

Ирина Евгеньевна

УДК 519.6

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ЭВМ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЦИКЛИЧЕСКОМ УСКОРИТЕЛЕ

Специальность: 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1989

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации.

Научный руководитель кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник — АМИРХАНОВ Ильгизар Валиевич

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук — ГРЕБЕНИКОВ Евгений Александрович

доктор физико-математических наук — ПЕРЕЛЬШТЕЙН Элкуно Аврумович

Ведущее научно-исследовательское учреждение: НИВЦ МГУ, Москва.

Защита диссертации состоится "7" декабря 1989 г. в 10.30 часов на заседании специализированного совета Д047.01.04 при Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ОИЯИ.

Автореферат разослан "3" ноября 1989 года.

Ученый секретарь
Специализированного Совета ЛВТА — З.М.Иванченко

Актуальность проблемы. Современные физические установки являются весьма сложными и дорогостоящими. Большую роль при их проектировании играют расчеты и оптимизация параметров. К очень сложному классу таких установок относятся ускорители заряженных частиц.

Единая задача расчета траектории сгустка и подбора параметров электрического и магнитного полей так, чтобы в заданный момент времени в заданном месте пучок имел требуемые параметры (по энергии, плотности и т.п.), не решена нигде в мире, настолько она сложна. Поэтому принято разделять ее на отдельные задачи. В настоящей работе рассматривается одна из таких задач: изучение движения заряженной частицы в циклическом ускорителе в заданных полях.

Эта математическая модель является сложной нелинейной задачей. Поскольку частица совершает в ускорителе огромное число оборотов (от нескольких сот тысяч до миллиона), то численный расчет траекторий даже на самых современных вычислительных машинах не охватывает всего периода обращения из-за накопления численных ошибок. Существенно усложняет решение задачи и то, что недостаточно рассчитать траекторию, а необходимо установить, при каких параметрах поля эти траектории будут устойчивы, особенно в окрестности резонанса.

Принято решать такую задачу с привлечением аппарата методов возмущений, в частности, очень широко применяется метод усреднения Крылова-Боголюбова. Однако использование этого метода требует огромных затрат труда по выполнению крайне громоздких выкладок. Как следствие, задача может быть решена вручную лишь в нулевом или первом приближении, что соответствует всего нескольким тысячам оборотов.

Поэтому весьма актуальным являются исследование поведения заряженной частицы в ускорителе с использованием аппарата аналитических вычислений на ЭВМ. Это позволяет находить решения соответствующих уравнений в высших приближениях по методу усреднения (т.е. практически для полного периода обращения частиц в ускорителе).

Целью диссертационной работы являлось исследование поведения заряженной частицы в циклическом ускорителе в окрестности резонанса в высших приближениях с использованием систем аналитических вычислений на ЭВМ и исследование на основе этого устойчивости амплитуд бетатронных колебаний.

Научная новизна работы. Разработанная методика и алгоритмы позволяют применять метод усреднения в высших приближениях к исследованию траекторий бетатронных колебаний в окрестности резонанса в любом циклическом ускорителе (как слабофокусирующем, так и сильнофокусирующем) и их устойчивости.

Так было проведено исследование устойчивости амплитуд бетатронных колебаний в окрестности 5 нелинейных резонансов в третьем приближении (что соответствует полному периоду обращения частицы в ускорителе) для синхрофазотрона ОИЯИ.

Получены, при некоторых условиях, первые интегралы усредненных систем уравнений в окрестности этих резонансов и решения для амплитуд бетатронных колебаний в третьем приближении.

Получены условия устойчивости для амплитуд бетатронных колебаний в окрестности 4 резонансов в третьем приближении для синхрофазотрона ОИЯИ.

Получены, при некоторых ограничениях на параметры поля, решения систем усредненных уравнений и интеграл движения во втором приближении для сильнофокусирующего синхротрона (нуклотрона ОИЯИ) в окрестности разностного резонанса связи. Получены условия устойчивости для амплитуд бетатронных колебаний в окрестности этого резонанса во втором приближении для нуклотрона ОИЯИ (сооружаемого в настоящее время).

Практическая значимость работы. Предлагаемая методика и алгоритмы могут быть использованы в задачах моделирования траекторий пучка при проектировании и совершенствовании любых циклических ускорителей.

Апробация работы и публикации. Основные результаты работы докладывались на семинарах ЛВТА ОИЯИ, на У Международном совещании по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач (Дубна, 1983), на Всесоюзном совещании по системам аналитических преобразований в механике (Горький, 1984), на Международных конференциях по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике (Дубна, 1982, 1985) и на Европейской конференции по компьютерной алгебре EUROCALL'87 (Лейпциг, 1987). По материалам выполненных исследований опубликовано 13 печатных работ, приведенных в списке литературы.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 6 приложений. Она содержит 100 страниц текста без приложений, включая 4 рисунка и библиографический список литературы из 107 наименований.

Содержание работы

Во введении излагается постановка задачи, описывается применяемая к ее исследованию методика, обосновывается использование аналитических вычислений на ЭВМ, проводится обзор литературы. Приведена структура диссертации с кратким изложением содержания по главам.

В главе I получены с помощью ЭВМ дифференциальные уравнения для малых отклонений заряженной частицы от идеальной орбиты в циклическом ускорителе с точностью до третьего приближения включительно.

$$\begin{aligned} x''+n_x(\theta)x &= \sum_{k=1}^{3} \varepsilon^k F_{xk}(x,x',z,z',\theta) \;, \\ z''+n_z(\theta)z &= \sum_{k=1}^{3} \varepsilon^k F_{zk}(x,x',z,z',\theta) \;, \end{aligned} \qquad (I)$$

где x, z – горизонтальное и вертикальное отклонения от замкнутой орбиты; $\varepsilon = r_o/R_o$ – малый параметр (r_o – половина высоты вакуумной камеры, R_o – радиус идеальной орбиты); $n_x(\theta)$, $n_z(\theta)$ – периодические по θ функции; F_{xk}, F_{zk} – полиномы от x, x', z, z' с периодическими по θ коэффициентами $A_{kj}(\theta), B_{kj}(\theta)$, которые на практике, как правило, представляются в виде ряда Фурье, коэффициенты которого $a_{kj\alpha}$ и $b_{kj\alpha}$ $(\alpha=-\infty,+\infty)$ связаны с реальной магнитной структурой конкретного циклического ускорителя.

Обычно уравнения вида (I) получают лишь в нулевом или первом приближении (т.е. до членов порядка ε^o или ε^1).

Для уравнений (I) рассматривается задача Коши:

$$x(\theta)\Big|_{\theta=o}=x_o \;,\quad x'(\theta)\Big|_{\theta=o}=x'_o \;,\quad z(\theta)\Big|_{\theta=o}=z_o ,\quad z'(\theta)\Big|_{\theta=o}=z'_o \;. \qquad (2)$$

Решения задачи (I)-(2) исследуются в окрестности резонанса

$$k_x \nu_x + k_z \nu_z = q + \delta \;, \qquad (3)$$

где ν_x, ν_z – частоты бетатронных колебаний по направлениям x и z, соответственно; k_x, k_z, $q=0,\pm1,\pm2,\ldots$ и δ – расстройка (отклонение от идеального резонанса).

Правые части системы (I) в окрестности резонанса (3) получены из уравнений Ньютона-Лоренца на ЭВМ с использованием системы аналитических вычислений REDUCE-3.2.

При исследовании задачи (I)-(2) применяется метод усреднения Крылова-Боголюбова, реализованный на ЭВМ. Исследование проводится для двух видов циклических ускорителей:

а) для слабофокусирующего ускорителя, что соответствует в уравнениях (I) случаю

$$\begin{aligned} n_x(\theta) &= Const = \nu_x^2 \;, \\ n_z(\theta) &= Const = \nu_x^2 \;; \end{aligned} \qquad (4)$$

б) для сильнофокусирующих ускорителей, когда

$n_x(\theta) \neq Const$, $n_z(\theta) \neq Const$.

Для слабофокусирующего ускорителя построены с помощью ЭВМ усредненные по θ уравнения в третьем приближении в окрестности 19 резонансов:

$$
\begin{gathered}
\nu_x = \pm m\,, \quad 2\nu_x = \pm m\,, \quad 3\nu_x = \pm m\,, \quad 4\nu_x = m\,, \\
5\nu_x = m\,, \quad 2\nu_z = \pm m\,, \quad 4\nu_z = m, \quad 2\nu_z \pm \nu_x = q\,, \\
2\nu_z \pm 2\nu_x = q\,, \quad 2\nu_z \pm 3\nu_x = q\,, \quad 4\nu_z \pm \nu_x = q, \quad m \geqslant 0
\end{gathered}
\tag{5}
$$

В комплексных переменных c_1, c_2, c_3, c_4 эти усредненные уравнения имеют вид

$$
c'_k = \sum_{j=1} S_{kj} c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} c_3^{\alpha_3} c_4^{\alpha_4}\,, \qquad k=1,2,3,4\,, \tag{6}
$$

$$
\alpha_m = 1,2,3,4 \, (m=1,2,3,4)\,,
$$

$$
\sum_m \alpha_m \leqslant 4\,,
$$

где числовые комплексные переменные S_{kj} характеризуют поле.

Для сильнофокусирующего ускорителя построены усредненные уравнения вида (6) во втором приближении в окрестности 24 резонансов:

$$
\begin{gathered}
\nu_x = \pm m,\ 2\nu_x = \pm m\,,\ 3\nu_x = m\,,\ 4\nu_x = m\,, \\
\nu_z = \pm m,\ 2\nu_z = \pm m\,,\ 3\nu_z = m\,,\ 4\nu_z = m\,, \\
\nu_z \pm \nu_x = q,\ \nu_z \pm 2\nu_x = q\,,\ \nu_z \pm 3\nu_x = q\,, \\
2\nu_z \pm \nu_x = q,\ 2\nu_z \pm 2\nu_x = q\,,\ 3\nu_z \pm \nu_x = q\,, \quad m \geqslant 0
\end{gathered}
\tag{7}
$$

В действительных переменных эти усредненные системы уравнений (6) принимают вид

$$
\begin{aligned}
a'_x &= P_{a_x}(a_x,a_z)\sin\varphi + Q_{a_x}(a_x,a_z)\cos\varphi + R_{a_x}(a_x,a_z)\,, \\
a'_z &= P_{a_z}(a_x,a_z)\sin\varphi + Q_{a_z}(a_x,a_z)\cos\varphi + R_{a_z}(a_x,a_z)\,, \\
\psi'_x &= P_{\psi_x}(a_x,a_z)\sin\varphi + Q_{\psi_x}(a_x,a_z)\cos\varphi + R_{\psi_x}(a_x,a_z)\,, \\
\psi'_z &= P_{\psi_z}(a_x,a_z)\sin\varphi + Q_{\psi_z}(a_x,a_z)\cos\varphi + R_{\psi_z}(a_x,a_z)\,,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где a_x, a_z – переменные, соответствующие амплитудам, а ψ_x, ψ_z – фазам бетатронных колебаний по направлениям x и z, соответственно; $\varphi = k_x\psi_x + k_z\psi_z$ в окрестности резонанса $k_x\psi_x + k_z\psi_z = q$; P_α, Q_α, R_α ($\alpha = a_x, a_z, \psi_x, \psi_z$) – полиномы от a_x, a_z с числовыми действительными коэффициентами H_{kj}.

В главе II проводится исследование бетатронных колебаний в окрестности пяти резонансов ($2\nu_z - \nu_x = 1$, $2\nu_z + 2\nu_x = 3$, $3\nu_z - \nu_x = 2$; $4\nu_z + \nu_x = 4$, $3\nu_x = 2$), проходящих достаточно близко от рабочей точки синхрофазотрона ОИЯИ.

Для резонанса $2\nu_z - \nu_x = 1$ получены следующие результаты.

Получен первый интеграл движения для усредненных систем уравнений

$$
4\nu_x a_x^2 + (1+\nu_x) a_z^2 = \mathrm{Const} + O(\varepsilon^{n+1})\,, \quad n=1,2,3\,, \tag{9}
$$

что позволило получить условия устойчивости для амплитуд бетатронных колебаний в соответствующих приближениях, имеющих вид

$$
\left| \ell_1 H_{1j} + \ell_2 H_{2j} \right| \leqslant \varepsilon^{n+1}\,, \quad n=1,2,3\,, \tag{10}
$$

где H_{kj} – коэффициенты первого и второго уравнений усредненной системы уравнений (8) и число условий устойчивости $j=1,2,\ldots\ldots,9$ зависит от порядка приближения.

Так, например, во втором приближении эти условия выглядят так:

1. $\left| 2\nu_x a_{130} (3\nu_x^2 a_{130} + a_{110}) \right| \leqslant \varepsilon$,

2. $\left| \nu_x a_{130} ((1+\nu_x)^2 a_{140} + 4a_{120}) \right| \leqslant \varepsilon$,

3. $\dfrac{2}{1+\nu_x} b_{100}^2 \leqslant \varepsilon$,

где $a_{kj\alpha}$, $b_{kj\alpha}$ – коэффициенты рядов Фурье, в которые раскладываются коэффициенты $A_{kj}(\theta)$, $B_{kj}(\theta)$ правой части исходных уравнений (I). В третьем приближении число этих условий равно девяти.

Для резонансов $2\nu_z + 2\nu_x = 3$, $3\nu_z - \nu_x = 2$, $4\nu_z + \nu_x = 4$ получены следующие результаты.

В некоторых случаях удается получить решения для амплитуд усредненных уравнений (8). В третьем приближении, например, решения имеют вид:

$$a_z = a_{z_0}\left\{\frac{e^{2H_{27}\theta}}{1-2H_{29}a_{z_0}^2\int\limits_0^\theta e^{2H_{27}\theta}\,d\theta}\right\}^{1/2},$$

$$a_x = a_{x_0}\left\{\frac{e^{2H_{19}\int\limits_0^\theta a_z^2\,d\theta}}{1-2a_{x_0}^2H_{18}\int\limits_0^\theta e^{2H_{19}\int\limits_0^\theta a_z^2\,d\theta}\,d\theta}\right\}.$$

Доказано, что эти решения устойчивы при достаточно малых начальных амплитудах a_{x_0}, a_{z_0}, определяемых инжекцией, и при достаточно малых коэффициентах H_{kj}, входящих в решения и характеризующих поле.

Построены интегралы движения для усредненных систем уравнений (8) в окрестности этих резонансов

$$\alpha a_x^2 + \beta a_z^2 = \mathrm{const} + O(\varepsilon^{n+1}), \quad n=2,3, \qquad (12)$$

где $\alpha, \beta = \mathrm{const} > 0$ – различные для каждого из трех рассматриваемых резонансов.

Для каждого из этих резонансов получены условия устойчивости вида (10) в окрестности соответствующего резонанса во втором и в третьем приближениях.

Доказано, что в первом приближении устойчивость зависит лишь от начальных условий (2).

Полученные для резонансов $2\nu_z-\nu_x=1, 2\nu_z+2\nu_x=3, 3\nu_z-\nu_x=1, 4\nu_z+\nu_x=4$ результаты обобщены и сформулированы в виде теоремы устойчивости:

<u>Теорема</u>. Решения для амплитуд a_x, a_z усредненной системы уравнений (8), соответствующей исходной системе уравнений бетатронных колебаний (I) с постоянными коэффициентами при линейной части, устойчивы в n-ом приближении, где $n=1,2,3$ –порядок приближения, в окрестности нелинейного резонанса (3), если существуют действительные константы $\ell_1 \geq 0$, $\ell_2 \geq 0$, не равные нулю одновременно, такие, что для всех $j=j(n)=1,2,\dots,9$ выполняются неравенства

$$\left|\ell_1 H_{1j} + \ell_2 H_{2j}\right| \leq \varepsilon^{n+1}.$$

Здесь $H_{kj} (i=1,2)$ – коэффициенты первого и второго уравнений системы (8). Число условий устойчивости в сформулированной теореме зависит от порядка приближения.

Для резонанса $3\nu_x=2$ получены следующие результаты.

Получены интегралы движения

$$A\cos 3\psi_x - B\sin 3\psi_x = -\frac{3}{2}D\frac{1}{a_x} - \frac{3}{4}Ea_x + C\frac{1}{a_x^3} + O(\varepsilon^{n+1}), \qquad (13)$$

где $n=1,2,3$; A, B, D и E – контанты, характеризующие поле; C – константа интегрирования, определяемая из начальных условий.

Переходя на фазовую плоскость, можно, используя эти интегралы движения, которые являются уравнениями сепаратриссы области устойчивости, провести полный качественный анализ решений усредненных уравнений.

В качестве примера построены фазовые траектории в первом и во втором приближении для случая $A<0$, $D<0$, $E>0$, что позволяет сделать вывод о существенно более высокой точности фазового анализа во втором приближении по сравнению с первым.

<u>Глава Ш</u> посвящена вопросам исследования устойчивости бетатронных колебаний для сильнофокусирующего ускорителя ($n_x(\theta) \neq \mathrm{const}$, $n_z(\theta) \neq \mathrm{const}$). Проводится исследование влияния разностного резонанса связи

$$\nu_z - \nu_x = 0 \qquad (14)$$

на бетатронные колебания заряженной частицы в нуклотроне ОИЯИ.

Получены, при некоторых условиях, решения усредненной системы уравнений (6) в комплексных переменных, в первом приближении и во втором приближении (рассматриваются лишь линейные члены). Доказано, что устойчивость этих решений в окрестности рассматриваемого резонанса зависит лишь от начальных условий.

Получены интегралы движения для усредненной системы уравнений (8) в окрестности резонанса (14):

$$a_x^2 + a_z^2 = \mathrm{Const} + O(\varepsilon^{n+1}), \quad n=1,2. \qquad (15)$$

Получены условия устойчивости для амплитуд бетатронных колебаний для усредненных уравнений (8) в окрестности данного резонанса, имеющие вид условий устойчивости в приведенной теореме.

В главе IУ описывается реализованный на ЭВМ алгоритм метода усреднения и программы, основанные на использовании системы аналитических вычислений REDUCE-3.2 на ЭВМ ЕС-I06I.

Комплекс программ позволяет: I) перейти от уравнений Ньютона-Лоренца к системе уравнений вида (I) с точностью до членов порядка $\varepsilon^n (n=1,2,3,\dots)$; 2) построить усредненную систему уравнений в комплексных (6) или действительных переменных (8) в окрестности произвольного нелинейного резонанса (3) в третьем приближении как для случая $n_x(\theta)=Const$, $n_z(\theta)=Const$, так и для случая $n_x(\theta) \neq Const$, $n_z(\theta) \neq Const$; 3) перейти от усредненной системы уравнений (8) к уравнениям на фазовой плоскости.

В заключении сформулированы основные результаты исследований.

I. Приводится алгоритм построения и строятся из уравнений Ньютона-Лоренца дифференциальные уравнения, описывающие бетатронные колебания заряженной частицы в циклическом ускорителе с точностью до членов третьего порядка включительно по степени малого параметра с помощью аналитических программ на ЭВМ ЕС I06I.

2. Разработан и отлажен комплекс программ с использованием системы аналитического программирования REDUCE-3.2 , реализующий алгоритм метода усреднения Крылова-Боголюбова в третьем приближении.

3. Впервые удалось построить усредненные системы уравнений в окрестности I9 нелинейных резонансов для слабофокусирующего ускорителя в третьем приближении и усредненные системы уравнений в окрестности 24 резонансов для сильнофокусирующего ускорителя во втором приближении.

4. В отдельных случаях получены решения усредненных систем уравнений в окрестности трех нелинейных резонансов высокого порядка $2\nu_z+2\nu_x=3, 3\nu_z-\nu_x=2$ и $4\nu_z+\nu_x=4$ для синхрофазотрона ОИЯИ и доказана их устойчивость.

5. Получены при некоторых ограничениях на магнитное поле ускорителя первые интегралы движения для решений усредненной системы уравнений в третьем приближении в окрестности пяти резонансов $2\nu_z-\nu_x=1$, $2\nu_z+2\nu_x=3$, $3\nu_z-\nu_x=2$, $4\nu_z+\nu_x=4$, $3\nu_x=2$ для синхрофазотрона ОИЯИ.

6. Сформулированы и конструктивно доказаны с помощью ЭВМ теоремы устойчивости для амплитуд бетатронных колебаний в окрестности четырех резонансов $(2\nu_z-\nu_x=1,\ 2\nu_z+2\nu_x=3,\ 3\nu_z-\nu_x=2, 4\nu_z+\nu_x=4)$ для синхрофазотрона ОИЯИ.

7. Проведено исследование поведения решений усредненной системы на фазовой плоскости в окрестности резонанса $3\nu_x=2$, используемого в синхрофазотроне ОИЯИ для медленного вывода пучка из ускорителя, что позволяет давать рекомендации по выбору оптимальных параметров поля для резонансного вывода.

8. Получены устойчивые решения во втором приближении в окрестности разностного резонанса связи $\nu_z-\nu_x=0$ для нуклотрона ОИЯИ.

9. Построен первый интеграл движения во втором приближении в окрестности разностного резонанса связи для нуклотрона ОИЯИ.

IO. Сформулирована и конструктивно доказана с помощью ЭВМ теорема устойчивости для амплитуд бетатронных колебаний в окрестности разностного резонанса связи для нуклотрона ОИЯИ.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

I. Амирханов И.В., Жидков Е.П., Жидкова И.Е. Исследование методом усреднения влияния разностного резонанса третьего порядка $2\nu_z-\nu_x=1$ во втором приближении на движение частиц в циклических ускорителях. Труды Международного совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, ОИЯИ, ДII-83-5II, Дубна, I983.

2. Амирханов И.В., Жидков Е.П., Жидкова И.Е. Влияние разностного резонанса третьего порядка $2\nu_z-\nu_x=1$ на движение частиц в циклических ускорителях. Совместный научный сборник ОИЯИ (Дубна - СССР) - ЦИФИ (Будапешт, Венгрия). Алгоритмы и программы для решения некоторых задач физики, вып.4, KFKI -I833-2I, Будапешт, Венгрия, I983.

3. Амирханов И.В., Жидков Е.П., Жидкова И.Е. Исследование поведения заряженной частицы в циклическом ускорителе в окрестности резонанса $2\nu_z-\nu_x=1$ методом усреднения в приближениях высших порядков. Всесоюзное совещание "Системы для аналитических преобразований в механике", Горький, I984.

4. Амирханов И.В., Жидков Е.П., Жидкова И.Е. Исследование влияния нелинейных резонансов на устойчивость движения заряженных частиц в циклических ускорителях с использованием машинной аналитики. Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике, ОИЯИ, ДII-85-79I, Дубна, I985.

5. Амирханов И.В., Жидков Е.П., Жидкова И.Е. Исследование условий ограниченности амплитуд бетатронных колебаний в окрестности резонанса. ОИЯИ, PII-87-452, Дубна, I987.

6. Амирханов И.В., Жидков Е.П., Жидкова И.Е. Усредненные уравнения для нелинейного резонанса $3\nu_x=2$ в высших приближениях по методу Крылова-Боголюбова. ОИЯИ, PII-88-606, Дубна, I988.

7. Жидкова И.Е. Программная реализация метода усреднения Крылова-Боголюбова в высших приближениях для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффици-

ентами. (Для уравнений с линейной частью, имеющей постоянные коэффициенты). ОИЯИ, Р11-88-716, Дубна, 1988.

8. Амирханов И.В., Жидков Е.П., Жидкова И.Е. Влияние резонансов $2\nu_z+2\nu_x=3, 3\nu_z-\nu_x=2, 4\nu_z+\nu_x=4$ на амплитуды бетатронных колебаний ОИЯИ, Р11-88-714, Дубна, 1988.

9. Жидкова И.Е. Программная реализация метода усреднения Крылова-Боголюбова в высших приближениях для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. (Для уравнений с линейной частью, имеющей периодические коэффициенты). ОИЯИ, Р11-88-722, Дубна, 1988.

10. Амирханов И.В., Жидков Е.П., Жидкова И.Е., Михайлов В.А. Укороченные уравнения бетатронных резонансов во втором приближении по методу Крылова-Боголюбова. ОИЯИ, Р11-88-904, Дубна, 1988.

11. Амирханов И.В., Жидков Е.П., Жидкова И.Е. Усредненные уравнения бетатронных колебаний в окрестности резонансов в циклических ускорителях. ОИЯИ, Р11-89-516, Дубна, 1989.

12. Амирханов И.В., Жидков Е.П., Жидкова И.Е., Михайлов В.А. Усредненные уравнения батартронных колебаний в окрестности разностного резонанса связи во втором приближении по методу Крылова-Боголюбова. ОИЯИ, Р11-89-471, Дубна, 1989.

13. Жидкова И.Е. Усредненные уравнения бетатронных колебаний в окрестности резонансов в циклических ускорителях (приложение). ОИЯИ, Р11-89-582, Дубна, 1989.

Рукопись поступила издательский отдел
6 октября 1989 года.