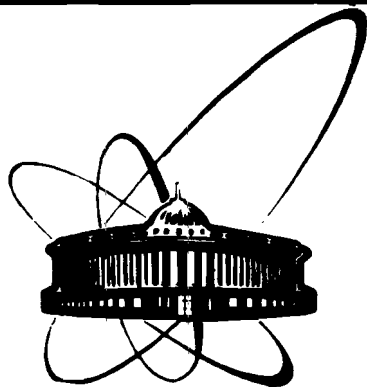


89-253



**ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

11-89-253

В.И. Демченко*, Р.Н. Федорова

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ -
ЭФФЕКТИВНОЕ СРЕДСТВО АНАЛИЗА
ОТВЕТОВ ОБУЧАЕМЫХ В АОС**

Направлено в Оргкомитет семинара
"Проблемы и применение искусственного интеллекта",
НРБ, 29 мая - 2 июня 1989 г.

* Ставропольский политехнический институт

1989

Зведение

В настоящее время разработана и нашла широкое применение автоматизированная обучающая система для вузов (АОС ВУЗ)^{1/}. Для системы АОС ВУЗ разработан ряд учебных курсов по языкам программирования, иностранным языкам, экономическим, общественным и другим дисциплинам. Более скромным является список курсов по дисциплинам, использующим математику с ее разнообразными конструкциями и операциями.

Основная трудность, с которой приходится сталкиваться при разработке курсов, с определяющим значением математических конструкций, проявляется на этапе контроля правильности ответов обучаемых. Между тем функция контроля правильности ответов учащихся является важнейшей педагогической функцией АОС, регулирующей отношения обучаемого и системы.

На основе опыта преподавания, анализа учебных пособий, ознакомления с учебными курсами различных авторов, в^{2/} выделяется пять основных типов вопросов, отличающихся друг от друга программными средствами, необходимыми для эффективного анализа ответов.

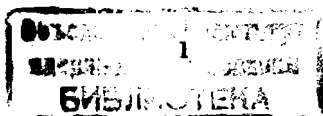
1. Задания (вопросы) и ответы, требующие выбора из "меню" (как частный случай сюда входят вопросы, требующие ответа "да/нет").

2. Задания, требующие краткого ответа, проверка которого может быть проведена в АОС по ключевому слову; к этой группе заданий можно отнести такие, ответы на которые носят характер простого перечисления.

3. Задания и вопросы, ответы на которые представляют собой некоторую синтаксическую конструкцию. Проверка правильности таких ответов в АОС может быть реализована с помощью синтаксически управляемого анализатора, на вход которого подается грамматика ответа на данный вопрос.

4. Задания и вопросы, ответы на которые должны даваться в форме простых предложений. Для проверки правильности ответов в АОС вводятся средства для проверки синтаксического и семантического анализа предложения естественного языка.

5. Задания и вопросы, ответы на которые даются в виде нескольких предложений. Для проверки правильности ответов на такие вопросы пока не разработаны средства, позволяющие проводить семантический анализ ноступающего фрагмента текста.



Перечисленные типы вопросов и заданий характерны для учебных курсов по языкам программирования, гуманитарным предметам и некоторым другим дисциплинам, не связанным с использованием математических формул. При разработке учебных курсов по математике, физике, механике и другим подобным наукам вопросы к обучаемым и ответы на них должны чаще всего иметь форму аналитических выражений, формул и других математических конструкций.

Таким образом, для математических дисциплин данная классификация должна быть дополнена следующими типами вопросов.

6. Задания и вопросы, имеющие вид аналитического выражения или формулы. Ответ также имеет вид аналитического выражения (формулы). Для анализа подобных ответов в АОС должны быть введены средства для доказательства тождественности двух аналитических выражений – ответа студента и эталонного ответа, заложенного в систему. Например:

Вопрос. Вычислите производную от функции $2x^2 + \sin x + 5$

Ответ. $4x + \cos x$.

7. Задания и вопросы, ответы на которые являются выражениями, принадлежащими некоторому классу.

Вопрос. Приведите пример квадратного трехчлена.

Ответ. $3y^2 - 8y + 5$.

Для анализа подобных ответов в АОС должен быть заложен образец (форма), описывающий целый класс аналитических выражений (в данном случае класс квадратных трехчленов).

Очевидно, что анализ подобных ответов невозможен без выполнения таких типичных аналитических операций, как упрощение выражений (раскрытие скобок, приведение подобных), сравнение выражений, выполнение замены переменных, выделение отдельных частей выражения и т.д.

Стандартные средства, имеющиеся в АОС, не позволяют проводить анализ подобных ответов, чем и объясняется малое количество и несовершенство учебных курсов по математическим дисциплинам.

В настоящее время предпринимаются попытки введения средств выполнения аналитических преобразований на ЭВМ в обучающие системы. Так, в^{3/} описана система СПОК-АНАЛИТИК. В этой системе с помощью нескольких программ, написанных на языке ФОРТРАН, выполняются простейшие алгебраические операции над полиномами. В^{4/} описана система ДИНАР, разработанная на базе АОС ВУЗ. ДИНАР предназначена для обучения студентов алгебре логики и выполняет анализ логических формул. Анализ осуществляется с помощью внешних динамических функций, реализованных на языке ПЛ/I.

Заметим, что разработка алгоритмов аналитических операций чрезвычайно трудоемка. Приведенные выше системы работают с очень узким классом аналитических выражений.

Более перспективным, на наш взгляд, является сопряжение систем аналитических вычислений общего применения (САВ)^{5/} с АОС.

1. Использование САВ в АОС

При разработке автоматизированных учебных курсов по математике и другим дисциплинам с применением математических формул необходимыми элементами контроля являются:

- контроль знания основных формул и уравнений (например, в курсе математики);

- контроль умения выполнять различные преобразования формул и уравнений;

- контроль знаний основных законов той или иной естественно-научной дисциплины (в физике, например, эти законы, как правило, выражены в виде формул и уравнений);

- контроль умения решать разного рода уравнения в виде, когда решение представляет собой формулу, включающую в себя буквенные коэффициенты (параметры) и буквенные переменные величины. Во всех перечисленных случаях ответы обучаемых являются аналитическими выражениями.

Любое аналитическое выражение может быть описано средствами языка программирования и, следовательно, его можно ввести в ЭВМ для расчета и (или) анализа.

Из сказанного следуют такие выводы:

1. При разработке автоматизированных учебных курсов по математике и другим примыкающим к ней дисциплинам возникает необходимость принимать от обучаемого ответы в виде аналитических выражений.

2. Современные языки программирования позволяют обеспечить ввод аналитических ответов обучаемого в ЭВМ с целью последующего анализа правильности этих ответов.

3. Основная проблема анализа правильности аналитического ответа обучаемого сводится к сравнению этого ответа с правильным ответом, хранящимся в памяти ЭВМ (эталонным ответом). Для решения этой проблемы необходимо подобрать систему аналитических вычислений, оптимально соответствующую целям АОС. Эта система аналитических вычислений, встраиваемая в АОС, должна обладать, по крайней мере, следующими свойствами:

а) универсальностью. Система должна работать с достаточно широким классом алгебраических выражений. В ней должен быть заложен аппарат для выполнения самых различных алгебраических преобразований. Система должна располагать средствами для анализа выражений, выделения его составных частей и сравнения выражений. Только при наличии этих средств САВ можно использовать для построения эффективных алгоритмов анализа аналитических конструкций в ответах обучаемых;

б) САВ должна быть ориентирована на распознавание структуры (формы) аналитического выражения^{6/}. Это позволит разрабатывать эффективные алгоритмы анализа ответов 7 типа проведенной выше классификации;

в) высоким быстродействием. Обучающая система является системой реального времени и должна обеспечивать минимально возможное время реакции на запрос пользователя. В связи с этим быстродействие является определяющей характеристикой при выборе САВ;

г) компактностью. Выбранная САВ должна быть по возможности компактной (т.е. не требовать слишком большого объема оперативной памяти ЭВМ). В противном случае трудно будет организовать совместную работу АОС и САВ на малых и средних ЭВМ, что, в свою очередь, сделает невозможным внедрение системы в большинстве учебных заведений страны;

д) САВ должна обладать развитым, наглядным и удобным входным языком, позволяющим описывать все необходимые аналитические операции, выполняемые системой;

е) САВ и разрабатываемые на её базе программы должны обслуживать одновременно несколько пользователей.

Одной из наиболее подходящих систем для использования в АОС могла бы служить система АНАЛИТИК^{7/}, обладающая всеми перечисленными свойствами. К сожалению, эта система является малодоступной и трудно-реализуемой на большинстве современных ЭВМ. Следовательно, система не может являться базовой при разработке обучающих программ.

Проведенный авторами анализ позволил сделать вывод о том, что одной из наиболее перспективных систем для использования в АОС является САВ общего применения ПЛ/1-ФОРМАК^{8/}. Именно эта система была использована авторами для разработки специальной программы, выполняющей анализ аналитических ответов обучаемых в АОС.

2. АНАЛИЗАТОР ФОРМУЛ – программа для доказательства тождественности аналитических выражений

В общем случае проблема доказательства тождественности неразрешима. В связи с этим имеет смысл говорить о решении задачи на определенном классе аналитических выражений. Исходя из целей, поставленных перед нами, мы выбрали класс дробнорациональных функций – аналитических выражений, на которые главным образом опирается высшая школа.

Ответ обучаемого и эталон, заложенный в систему, представляют собой выражения, построенные из констант, переменных и стандартных математических функций, связанных между собой знаками алгебраических операций. Эквивалентность таких выражений не может быть установлена только лишь стандартными средствами САВ.

Для решения проблемы анализа ответов обучаемых, представленных аналитическими выражениями, была разработана оригинальная программа – АНАЛИЗАТОР ФОРМУЛ^{9/}. Анализатор формул реализует алгоритмы доказательства тождественности (неотождественности) двух аналитических выражений.

В процессе диалога с программой учебного курса обучаемый получает задание, выполняет его и вводит ответ, используя для этого клавиатуру дисплея. Ответ обучаемого, представляющий собой аналитическое выражение, записывается им в соответствии с правилами, принятыми в языках программирования. Приняв ответ от обучаемого, программа учебного курса инициирует вызов в оперативную память ЭВМ программы-анализатора и передает ей управление.

Работа анализатора формул начинается с того, что из специальных областей памяти АОС ЭУС-буферов в программу-анализатор передаются две символьные строки – ответ обучаемого и эталон ответа. Для уменьшения ограничений, накладываемых системой на форму записи аналитических выражений, анализатор формул выражает отсутствующие в системе ФОРМАК элементарные математические функции через имеющиеся. Преобразуются, например, такие функции, как $\sec, \operatorname{cosec}, \operatorname{cotang}, \operatorname{arcsin}, \operatorname{arccos}$ и другие. Кроме того, для некоторых встроенных элементарных функций введены альтернативные имена. Эти преобразования выполняются с помощью аппарата подстановок, заложенного в систему ФОРМАК. После описанных преобразований из эталонного ответа вычитается ответ обучаемого. В полученном таким образом новом выражении программа-анализатор раскрывает скобки, приводит подобные члены, а имеющиеся дроби приводит к общему знаменателю.

На этом завершается первый этап преобразования, и программа переходит к анализу полученного выражения. Если результатом первого этапа явится получение нулевого выражения, то тождество считается доказанным, а ответ обучаемого признается правильным. Испытания программы показали, что на первом этапе ее работы успешно решается задача доказательства тождеств, содержащих алгебраические, логарифмические, показательные и иррациональные функции. В то же время на первом этапе преобразования не удается установить тождественность большинства тригонометрических выражений. Это связано с тем, что эквивалентность тригонометрических выражений может быть не сразу установлена ввиду большого количества формул, выражающих одни тригонометрические функции через другие.

С целью устранения указанных особенностей в программе предусмотрен второй этап преобразований, в ходе которого все тригонометрические выражения преобразуются с помощью подстановок, реализующих формулы Эйлера.

После выполнения подстановок и приведении подобных членов программа вторично пытается доказать тождество. А в случае неудачи переходит к третьему этапу работы. Третий этап заключается в том, что программа осуществляет доказательство нетождественности введенных выражений.

Заметим, что на вход программы наряду с тождественными поступают и нетождественные выражения. Это вполне естественно, так как обучаемый может ввести неправильный ответ. При этом выполняются следующие действия:

1. Проводится анализ выражения с целью получения списка входящих в него переменных и определения областей их допустимых значений.

2. С помощью датчика случайных чисел генерируются значения переменных в пределах области их допустимых значений.

3. Вычисляется значение выражения при данных значениях переменных.

4. Если вычисленное значение выражения оказывается неравным нулю, то ответ обучаемого и эталонный ответ заведомо нетождественны.

5. Если же при подстановке в анализируемое выражение случайных значений переменных мы в результате получаем нуль, то цикл подстановок случайных значений переменных повторяется. Если в результате многократного повторения указанной процедуры мы получаем нулевое значение анализируемого выражения, то с определенной степенью вероятности можно сказать, что эталонный ответ и ответ обучаемого тождественны. Заметим, что с увеличением числа повторений случайных подстановок вероятность правильности вывода о тождественности анализируемых выражений возрастает.

Разработанная программа обладает высокой надежностью. В самом деле, на первых двух этапах ее работы, когда выполняются аналитические преобразования выражений в системе СОРМАК, возможность появления ошибки практически исключена. На третьем этапе работы программы появление ошибки возможно лишь в том случае, если анализу подвергаются выражения, значения которых в случайно выбранных точках совпадают. А на самом деле эти выражения тождественными не являются.

Испытания программы проводились на двух тысячах примеров из учебников по высшей математике [10, 11, 12]. При этом на третьем этапе работы программы число подстановок случайных переменных в анализируемое выражение было принято равным 100.

Подтверждена высокая надежность программы: программа правильно распознала тождественность и нетождественность 94% введенных выражений. Программа имеет приемлемые эксплуатационные характеристики: в зависимости от сложности и размера аналитических выражений программа использовала от 140 до 200 килобайт оперативной памяти. Время работы

программы варьировалось от 0,1 до 10 секунд (испытания проводились на ЭМ ЕС-1022).

Выполнено сопряжение описанной программы с автоматизированной обучающей системой АОС ВУЗ. Анализатор оформлен как внешняя динамическая функция системы АОС ВУЗ. Для совместной работы анализатора формул и АОС ВУЗ необходимо от 260 до 350 килобайт оперативной памяти. Время анализа ответа обучаемого составляет от 0,1 до 15 секунд.

3. Методика разработки учебных курсов на базе сопряжения АОС-САВ

Независимо от содержания учебно-контролирующего курса, функционирующего на базе сопряжения АОС-САВ, можно предложить универсальную методику его организации.

Работа с курсом начинается с регистрации обучаемого. Это необходимо для того, чтобы по завершении работы с курсом получить сводные статистические данные по итогам обучения (зачетная ведомость, анализ усвоения различных разделов курса и т.д.). После регистрации обучаемому сообщаются правила работы с курсом, в частности, разъясняются правила ввода ответов с клавиатурного дисплея и особенности записи математических выражений, принятых в языках программирования. Приводятся несколько примеров и упражнений для выработки у обучаемого навыков работы с клавиатурой дисплея.

Освоив правила ввода аналитических выражений, обучаемый выбирает нужную тему и переходит к изучению заложенного в ней теоретического материала, необходимого для работы над контрольными заданиями. Изучение теории завершается разбором нескольких примеров по данной теме.

Для проверки усвоения материала обучаемому выдается контрольное задание. Учебный курс содержит несколько равноценных по трудности вариантов задания. Выбор одного из них и выдача его обучаемому осуществляются с помощью датчика случайных чисел. В процессе работы над заданием обучаемый может вернуться к теоретическому материалу темы или повторить правила записи аналитических выражений, принятые в системе.

После ввода ответа осуществляется синтаксический анализ полученного выражения. Для этой цели используют синтаксические анализаторы, заложенные в систему АОС ВУЗ. В том случае, если ответ содержит синтаксические ошибки, обучаемому выдается соответствующее сообщение, и он может внести исправления, повторив ввод ответа. В случае отсутствия синтаксических ошибок управление передается программе-анализатору. Результатом работы анализатора являются коды завершения, соответствующие правильному или неправильному ответу, синтаксической или семанти-

ческой ошибке, а также аварийному завершению программы. В любом случае на экран обучаемого выдается сообщение, соответствующее полученному коду.

Обычно работа над темой предполагает выполнение нескольких заданий по различным разделам темы. Для распределения заданий по степени трудности вводится система весовых коэффициентов. Иными словами, при успешном выполнении одного из заданий, обучаемому засчитывается весовой коэффициент, соответствующий данному заданию. Ввод ошибочного ответа вызывает уменьшение весового коэффициента на определенную величину (штраф за ошибку), после чего обучаемому предоставляется право вторичного ответа. В зависимости от педагогических целей обучаемому может быть выдана "подсказка", представляющая собой разбор образцового задания. В том случае, если обучаемый вторично не справился с заданием, весовой коэффициент обнуляется.

После завершения работы над темой весовые коэффициенты суммируются, и вычисляется итоговая оценка по данной теме. Оценка выдается на экран обучаемого и заносится в зачетную ведомость группы (класса). На этом работа обучаемого с темой завершается.

В случае необходимости можно предусмотреть сбор статистических данных о работе обучаемого (фиксация неправильных ответов, время, затраченное на решение задачи, число попыток решения, синтаксические ошибки, время реакции системы и т.д.).

Описанная методика реализована при разработке автоматизированного учебного курса по избранным разделам высшей математики.

4. Автоматизированный учебный курс по избранным разделам высшей математики

В учебных планах по предмету "Высшая математика", который изучается в высших и средних специальных учебных заведениях, имеется ряд тем, при изучении которых приходится иметь дело с аналитическими выражениями и подвергать их различным преобразованиям. К числу таких тем относятся:

- вывод и преобразование уравнений геометрических объектов при изучении аналитической геометрии;
- дифференцирование функций одной и нескольких переменных;
- раскрытие неопределенностей при вычислении пределов с помощью правила Лопиталя;
- вычисление неопределенных интегралов;
- разложение функций в ряды Тейлора и Фурье.

Заметим, что в курсе математики средней школы также изучаются темы, связанные с вычислением производных и неопределенных интегралов.

Кроме того, в средней школе на уроках математики учащиеся выполняют действия над различными выражениями, содержащими буквенные переменные (упрощения алгебраических выражений, формулы сокращенного умножения и т.д.). При изучении тригонометрии учащиеся приходится выполнять различные преобразования тригонометрических формул (формулы приведения, функции двойного и половинного угла и т.д.).

Из сказанного следует, что автоматизированные учебные курсы на базе сопряжения АСУ и САУ найдут широкое применение как в высших и средних специальных учебных заведениях, так и в средних школах.

Ниже описывается автоматизированный учебный курс по избранным темам (разделам) высшей математики.

Тема 1. Дифференцирование функций одной вещественной переменной. Тема состоит из четырех фрагментов (заданий), посвященных дифференцированию элементарных функций и выражений, сложных функций, заданных параметрически и неявно заданных функций.

Тема 2. Дифференцирование функций нескольких переменных. Тема состоит из четырех заданий, посвященных вычислению частных производных первого порядка, высших порядков, дифференцированию сложных функций нескольких переменных, вычислению дифференциальных характеристики скалярных и векторных полей (градиент, дивергенция, ротор).

Тема 3. Вычисление неопределенных интегралов. Выполняются задания: интегрирование элементарных выражений, интегрирование с помощью подстановок по частям, интегрирование тригонометрических и иррациональных выражений, интегрирование рациональных дробей.

Тема 4. Прямая и плоскость. Содержит два задания: а) различные формы уравнения прямой линии на плоскости и в пространстве; б) различные формы уравнения плоскости в пространстве.

Тема 5. Кривые второго порядка. Предлагаются четыре задания: вывод и преобразование уравнений окружности, эллипса, гиперболы и параболы.

В процессе работы обучаемого с любой из указанных тем он имеет возможность обращаться к изучению теоретического материала, просматривать образцы решений типовых примеров. А при изучении тем 4 и 5 может получить подсказку.

Каждое контрольное задание состоит из 30 вариантов, сбалансированных по трудности. После окончания работы с курсом специальная программа (утилита) выдает на печать зачетную ведомость учебной группы (класса).

В настоящее время курс передан для опытной эксплуатации в ряд учебных заведений Москвы, Киева, Томска, Свердловска, Ставрополя.

Опытная эксплуатация курса показала, что он обладает хорошими педагогическими и эксплуатационными характеристиками. В дальнейшем

предполагается расширить данный учебный курс, включив в него отсутствующие в настоящее время темы из числа указанных в начале настоящей главы.

Приведем фрагмент диалога обучаемого с программой учебного курса (тема: дифференцирование функций одной вещественной переменной, в приведенном фрагменте 0 - обучаемый, С - система).

С: Задание 3

Вариант 4

Вычислите производную от неявно заданной функции

$$X - Y = \sin(Y)$$

Введите полученный ответ и нажмите клавишу "ВВОД". Для получения помощи введите слово "HELP" или "ПОМОЩЬ".

О: 1 / (cos y + 1)

С: В вашем ответе обнаружена синтаксическая ошибка. Проверьте правильность записи переменных, входящих в выражение, знаков алгебраических операций и расстановку скобок.

О: 1 / (cos(y) + 1)

С: Идет обработка ответа. Ждите 5-7 секунд.

С: Совершенно верно. Для продолжения работы нажмите "ВВОД".

Заключение

Спыт создания и эксплуатации учебного курса по высшей математике показал, что использованная методика может быть применена для разработки курсов по другим дисциплинам с определяющим значением математических конструкций и формул. В частности, планируется разработка учебных курсов по общей физике, теоретическим основам электротехники, теории автоматического регулирования для вузов и средних специальных учебных заведений, а также учебных курсов по математике для средней школы.

Реализация систем аналитических вычислений на мини- и микро-ЭВМ делает возможной разработку аналогичных учебных курсов с использованием аналитических вычислений на мини- и микро-ЭВМ.

Кроме того, мы надеемся, что в ближайшее время появятся доступные реализации системы АНАЛИТИК (или другие САВ с расширенными средствами распознавания структуры выражений).

Это даст возможность не только проверять "формульные" ответы обучающихся, но и классифицировать их^{3/}, указывать место, где допущена ошибка, и т.д.

Литература

1. Автоматизированная обучающая система для вузов АСС-МЭС. Общее описание. М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1983, т.1.
2. Грегорович Н.А., Илхитин А.М. О классификации контрольных вопросов и методах их реализации в АСС при обучении языком программирования. Управляющие системы и машины, 1983, № 6, с.63-65.
3. Кирова А.И., Смирнов В.И. О некоторых возможностях аналитических преобразований в системе ЭПСА-МЭС. Управляющие системы и машины, № 4, 1981, с.118-120.
4. Лобанов Ю.И., Туртсов А.В., Седов В.И. Генерация и решение задач в АСС. М., МПИИМ, 1983, с.24. (Экспресс-информация. ИИИВЛ. сер. "Обучение в высшей и средней специальной школе", вып.11).
5. Гердт В.И., Ширков О.В., Тарасов Д.В. Аналитические вычисления на ЭВМ в приложении к физике и математике. Успехи физических наук, 1980, т.130, с.113-147.
6. Гринченко Т.А., Дарюк Н.И. Выполнение аналитических преобразований на ЭВМ ИР-3. Кибернетика, № 2, 1973, с.59-65.
7. Глушков В.М., Гринченко Т.А., Дородницын А.А. и др. АНАЛИТИК-74. Кибернетика, № 5, 1978, с.114-147.
8. Tobey R. e.a. PL/1-FORMAC Symbolic Interpreter. IBM Program Information Dept., 360 D -03.004, N.Y., 1969.
9. Демченко В.И. Использование аналитических вычислений в автоматизированных обучающих системах. Управляющие системы и машины, № 3, 1987.
10. Пичкунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.2, Наука, М., 1972.
11. Сборник задач по курсу высшей математики (под ред. Г.И. Кручковича). Высшая школа, М., 1966.
12. Выгодский М.И. Справочник по высшей математике. Наука, М., 1966.
13. Демченко В.И., Дурновцев В.И., Федорова Р.И. Использование аналитических вычислений при построении автоматизированных обучающих систем. В сб.: "Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике. СИИ, ДИ-83-511, Дубна, 1983.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 апреля 1989 года.