

К 68

11-89-25

КОРОБОВ

Владимир Иванович

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ  
КВАНТОВОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ  
И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ  
В ТЕОРИИ  $\mu$ -КАТАЛИЗА

Специальность: 01.01.07 — вычислительная  
математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Научные руководители:

доктор физико-математических наук  
профессор И.В.ПУЗЫНИН

кандидат физико-математических наук  
старший научный сотрудник С.И.ВИНИЦКИЙ

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук  
профессор Н.Н.КАЛИТКИН

доктор физико-математических наук  
профессор И.В.КОМАРОВ

Ведущее научно-исследовательское учреждение:

Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва.

Автореферат разослан "21" августа 1989 г.

Защита диссертации состоится "19" октября 1989 г. в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований, Дубна. 8 10 20

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета

кандидат физико-математических наук Ивс С.М.ИВАНЧЕНКО

Актуальность

Различные методы численного анализа квантовомеханической системы трех частиц, основанные на вариационном подходе, интенсивно исследуются в последнее время<sup>/\*/</sup>. Сравнение расчетов показало высокую эффективность вариационных методов. Вместе с тем проявился ряд трудностей, связанных с плохой обусловленностью получаемой обобщенной алгебраической задачи на собственные значения и с применением этих методов к расчету состояний с полным орбитальным моментом  $J \geq 2$ . Сложности возникают и при изучении локальных характеристик волновой функции (условие Като,  $\gamma$ -факторы и др.) в граничных точках задачи. В связи с этим большое значение имеет детальное исследование вариационного метода, позволяющее построить высокоэффективные алгоритмы расчета характеристик трехчастичных квантовомеханических систем.

Численный анализ задачи трех тел имеет и огромную практическую ценность. Открытие слабосвязанных состояний мезомолекул  $dd\mu$  и  $dt\mu$ , которые определяют высокую скорость образования мезомолекул, возродило идею мюонного катализа<sup>/\*\*/</sup>. Это открытие сделало необходимым глубокое теоретическое исследование мезомолекулярных комплексов, возникающих в процессах мезокатализа. Расчет уровней энергии и соответствующих им волновых функций мезомолекул водорода является одним из основных звеньев в этих исследованиях.

К точности расчетов предъявляются высокие требования. Так, для аккуратного определения температурной зависимости скорости реакции образования мезомолекул  $dd\mu$  и  $dt\mu$  требуется иметь значения уровней энергии с ошибкой не более  $10^{-3}$  эВ.

Расчет слабосвязанных состояний мезомолекул  $dd\mu$  и  $dt\mu$  был впервые выполнен в рамках адиабатического подхода<sup>/\*\*\*/</sup>. Однако попытка улучшить точность расчетов на базе адиабатического метода привела к резкому увеличению времени счета.

Диссертация посвящена исследованию вариационного метода, основанного на разложении решения по  $\rho$ -функциям Вигнера в представлении симметрии Брейта-Хилдлерааса. Для описания внутренних переменных используются сферические координаты. Выбор представления волновой функции определен его тесной связью с адиабатическим представлением.

<sup>/\*/</sup> I.V.Puzynin, S.I.Vinitsky. Muon Catalysed Fusion, v.3, p.307, 1988.

<sup>/\*\*/</sup> G.Fiotentini, L.I.Ponomarev. Muon Catalysed Fusion, v.1, p.3, 1987.

<sup>/\*\*\*/</sup> С.И.Виницкий, Л.И.Пonomарев, И.В.Пузынин, Т.П.Пузынина, Л.Н.Сомов. ЖЭТФ, т. 74, с. 849, 1978.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ СОЕДИНЕНИЙ  
БИБЛИОТЕКА

Работы, положенные в основу диссертации, выполнены в соответствии с проблемно-тематическим планом научно-исследовательских работ Объединенного института ядерных исследований в Дубне.

#### Цель работы

Целью диссертационной работы является разработка и теоретическое обоснование численного метода решения квантовой задачи трех тел:

- анализ особенностей решения исходного уравнения Шредингера в представлении симметрии Брейта-Хиллерааса;
- построение вариационной процедуры Ритца на основе пробных функций, учитывающих особенности решения исходного уравнения Шредингера;
- разработка алгоритмов, необходимых для реализации предлагаемого метода;
- разработка регуляризованных методов решения обобщенной алгебраической задачи на собственные значения;
- применение разработанных алгоритмов и программ для практических расчетов уровней энергии мезомолекул изотопов водорода.

#### Научная новизна

Для построения метода, позволяющего аккуратно определять локальные характеристики системы и обладающего высокой скоростью сходимости, проводится анализ особенностей волновой функции, связанных с учетом симметрии трехмерных вращений. Эти особенности определяются вырожденными положениями трех частиц, при которых не определено направление подвижного репера. Впервые получена асимптотика осевого вырождения - три частицы лежат на одной прямой. Получены вариационный функционал и уравнение Шредингера, учитывающие разложение волновой функции на симметричную и антисимметричную (относительно перестановки двух частиц, расположенных на оси  $OZ'$  подвижного репера) компоненты. На основе проведенного анализа особенностей волновой функции получен набор базисных функций, определяющий вариационный процесс Ритца. Предложенный процесс Ритца позволяет рассчитывать уровни энергии систем трех частиц с любыми значениями квантовых чисел орбитального момента  $J$  и четности  $\Lambda$  (с учетом тождественности частиц и без него). Для эффективного решения обобщенной алгебраической задачи на собственные значения разработан и теоретически обоснован метод обратной итерации с регуляризацией. Этот метод предназначен для решения плохо обусловленных алгебраических задач, возникающих при использовании большого числа опорных функций.

#### Практическая ценность

На основе предложенных методов были разработаны программы, с помощью которых вычислены значения уровней энергии связи 18 состояний мезомолекул изотопов водорода с точностью не ниже  $10^{-3}$  эВ. Проведены прецизионные расчеты слабосвязанных состояний мезомолекул  $dd\mu$  и  $dt\mu$ , в которых использовались возрастающие наборы опорных функций (максимальный расчет - 2084 опорные функции). Это позволило достигнуть высокой точности  $2 \cdot 10^{-4}$  эВ, что превышает более чем на порядок точность всех предшествующих вариационных расчетов. Вычисленные волновые функции использовались для определения значений  $\gamma$ -факторов. Эти значения необходимы для расчетов сверхтонкой структуры слабосвязанных состояний мезомолекул  $dd\mu$  и  $dt\mu$ .

Предложенный вариационный метод и разработанные на его основе вычислительные процедуры являются эффективным средством для получения значений нерелятивистских уровней энергии мезомолекул и соответствующих им волновых функций.

#### Апробация работы

Основные результаты диссертационной работы докладывались на семинарах ЛВТА, ЛТФ ОИЯИ, на международных симпозиумах по мюонному катализу, Токио, 26-30 августа 1986, Гэтчина, 26-29 мая 1987, Флорида, 1-6 мая 1988; на Конференции по численным методам и приложениям, София, 22-27 августа, 1988; на межвузовской конференции "Математическое моделирование и вычислительная физика", Волгоград, 12-16 сентября, 1988.

#### Публикации

Основное содержание диссертации опубликовано в восьми печатных работах /1-8/, в том числе в журналах ЖЭТФ, ЖВМиМФ, "Physics Letters B" и "Краткие сообщения ОИЯИ".

#### Структура и объем работы

Диссертация изложена на 114 страницах машинописного текста и состоит из введения, четырех глав, заключения, четырех приложений, списка литературы из 57 наименований, 10 таблиц и 2 рисунков.

#### Содержание диссертации

Во введении дается краткое содержание диссертационной работы. Обосновывается актуальность выбранной темы.

В первой главе проводится анализ уравнения Шредингера системы трех частиц в представлении симметрии Брейта-Хиллерааса. Волновая

функция системы с квантовыми числами полного орбитального момента  $J$  и его проекции на ось  $OZ$ , равной  $M$ , представляется в виде суммы

$$\Psi_M^J(S) = \sum_{m=-J}^J D_{Mm}^J(\alpha, \beta, \gamma) \cdot F_m^J(S_{in}), \quad (I)$$

где  $S$  - полный набор независимых переменных системы,  $S_{in}$  - внутренние независимые переменные системы,  $D_{Mm}^J(\alpha, \beta, \gamma) - D$  - функции Вигнера,  $\alpha, \beta, \gamma$  - углы Эйлера подвижного репера. Подвижный репер фиксируется в пространстве следующим образом: ось  $OZ'$  репера направляется вдоль частиц 1 и 2; ось  $OX'$  лежит в плоскости трех частиц в направлении третьей частицы; ось  $OY'$  определяется так, чтобы ориентация подвижного и неподвижного реперов совпадала. Данная форма учета симметрии задачи была предложена Хиллераасом и Брей-том<sup>/ж/</sup>.

В § 1 выводится уравнение Шредингера в представлении полного орбитального момента для внутренних независимых переменных системы:  $R, x, z$ . Здесь  $R$  - расстояние между частицами 1 и 2, а  $x$  и  $z$  - декартовы координаты третьей частицы относительно подвижного репера. Начало подвижного репера фиксируется в центре масс частиц 1 и 2. Далее выписывается выражение для вариационного функционала  $\langle \Psi | H | \Psi \rangle$  ( $H$  - гамильтониан системы трех частиц), стационарные точки которого определяют уровни энергии связанных состояний.

Для представления, учитывающего четность волновой функции:

$$\Psi_M^J(S) = \sum_{m=\mu(M)}^J D_{Mm}^{JA}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot F_m^{JA}(R, x, z), \quad (I)$$

где  $D_{Mm}^{JA}(\alpha, \beta, \gamma)$  - симметризованные функции Вигнера, выписывается уравнение Шредингера:

$$\sum_{m=\mu(M)}^J (H_{mm'} - \delta_{mm'} \cdot E) F_{m'}^{JA} = 0, \quad m = \mu(M), \dots, J; \quad (2)$$

$$H_{mm} = \frac{1}{2\mu_{12}} \left\{ -\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \frac{\partial}{\partial R}) - \frac{1}{R^2} \left[ L^2 + \frac{z}{x} L \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{R^2} [J(J+1) - m^2 + \frac{z^2}{x^2} m^2] \right\} + \frac{P_m^2}{2\mu_3} + V(R, x, z);$$

$$H_{m, m \pm 1} = \frac{\gamma_{m, m \pm 1}^A}{2\mu_{12} R^2} \left[ \frac{z}{x} (m \pm 1) \pm L \right]$$

$$\text{и } H_{mm'} = 0 \text{ при } |m - m'| \geq 2;$$

/ж/ F.A.Hylleraas. Zeits. für Physik, v. 54, p. 347, 1929;

G.Breit. Phys. Rev., v. 35, p. 569, 1930.

$$\text{где } \mu(\lambda) = (1 - \lambda(-1)^J) / 2;$$

$$\gamma_{m, m+1}^A = \left\{ [1 + \delta_{m0} \lambda(-1)^J] [J(J+1) - m(m+1)] \right\}^{1/2};$$

$$\gamma_{m, m-1}^A = (1 - \delta_{m0}) \left\{ [1 + \delta_{m2} \lambda(-1)^J] [J(J+1) - m(m-1)] \right\}^{1/2};$$

$$L = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}; \quad P_m^2 = -\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{m^2}{x^2};$$

$$V(R, x, z) = \frac{z_1 z_2}{R} + \frac{z_1 z_2}{[x^2 + (z - \frac{m_1}{m_1+m_2} R)^2]^{1/2}} + \frac{z_1 z_2}{[x^2 + (z + \frac{m_2}{m_1+m_2} R)^2]^{1/2}};$$

$$\mu_{12}^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-1}, \quad \mu_3^{-1} = (m_1 + m_2)^{-1} + m_3^{-1};$$

а  $m_1, m_2, m_3$  - массы и  $z_1, z_2, z_3$  - заряды частиц 1, 2 и 3 соответственно.

В § 2 исследуется асимптотическое поведение компонент волновой функции  $F_m^{JA}$  при  $R \rightarrow 0$ . Использование соотношения Ченга-Фано<sup>/ж/</sup>, связывающего  $D$ -функции Вигнера и биполярные гармоники, позволяет выразить компоненты волновой функции (для  $\lambda = +(-1)^J$ ) в виде

$$F_m^{JA}(R, r, \theta_{12}) = G^{Jm} r^J Y_{Jm}(\theta_{12}, 0) H_J(R, r) + o(1), \quad (3)$$

где  $G^{Jm}$  выражаются через коэффициенты Клебша-Гордана,  $Y_{Jm}$  - сферические гармоники, а  $H_J(R, r)$  - ограниченная функция переменных  $R$  и  $r$ , не зависящая от  $m$ . Соотношение (3) вскрывает связь между компонентами с различными значениями  $m$  при  $R \rightarrow 0$ , а также явную зависимость компонент от угловой переменной  $\theta_{12}$ . Последнее накладывает ограничение на выбор внутренних независимых переменных. Координаты, использующие расстояния  $\Gamma_{12}$ ,  $\Gamma_{23}$  и  $\Gamma_{13}$  между частицами (переменные Хиллерааса), а также периметрические координаты при данном учете симметрии приводят к некорректному описанию поведения решения в окрестности точки парного соударения частиц 1 и 2 ( $R=0$ ).

В § 3 рассмотрена асимптотика волновой функции при  $x \rightarrow 0$  (осевое вырождение). Показано, что решение при  $x \rightarrow 0$  имеет вид

$$F_m^{JA}(R, x, z) = x^m g_m^{JA}(R, z) + o(x^m). \quad (4)$$

Полученное выражение используется при построении набора опорных функций.

В § 4 выводится уравнение Шредингера системы трех частиц в сферических координатах. При этом проводится разбиение волновой функции

/ж/ E.S.Chang, U.Fano. Phys. Rev. A, v.6, p. 173, 1972.

на симметричную и антисимметричную (относительно перестановки частей 1 и 2) составляющие.

В главе 2 рассматривается процесс Ритца, основанный на опорных функциях вида

$$[(\zeta^2-1)(1-\eta^2)]^{\frac{m}{2}} R^i \zeta^j \eta^k \cdot \exp[-(\alpha+\beta\zeta)R]. \quad (5)$$

Полученный вариационный метод пригоден для расчетов состояний при любых значениях квантовых чисел полного орбитального момента  $J$  и четности  $\lambda$ .

В § 1 рассматривается постановка вариационного подхода к вычислению уровней энергии нерелятивистского уравнения Шредингера нескольких частиц и дается обоснование его применения. Приводятся теорема Като<sup>\*/</sup> о самосопряженности и ограниченности снизу оператора Гамильтона и теорема Хунцикера, Ван-Винтера, Жислина<sup>\*\*/</sup>, определяющая нижнюю границу существенного спектра оператора Гамильтона.

Построение пробных функций осуществляется в § 2. Здесь вводится разложение волновой функции

$$F_m^{J\lambda^s}(R, \zeta, \eta) = R^m [(\zeta^2-1)(1-\eta^2)]^{\frac{m}{2}} \eta^\varepsilon \times \\ \times \sum_n \sum_{t=1}^2 \alpha_{nmts} R^i \zeta^j \eta^{2k} \cdot \exp[-(\alpha_{mts} + \beta_{mts}\zeta)R], \\ F_m^{J\lambda^a}(R, \zeta, \eta) = R^{m+1} [(\zeta^2-1)(1-\eta^2)]^{\frac{m}{2}} \eta^{1-\varepsilon} \times \\ \times \sum_n \sum_{t=1}^2 \alpha_{nmta} R^i \zeta^j \eta^{2k} \cdot \exp[-(\alpha_{mta} + \beta_{mta}\zeta)R], \quad (6)$$

где  $i, j, k = 0, 1, \dots, i \geq j$ ,  $n$  - мультииндекс ( $n = (i, j, k)$ ),  $\varepsilon$  равно 0 либо 1 в зависимости от четности  $F_m$  относительно  $\eta$ :  $\eta \rightarrow -\eta$ . Разъясняется выбор множителей, присутствующих в разложении (6).

В § 3 показано, что вычисление матричных элементов вариационного функционала сводится к оцениванию интегралов вида

$$\Gamma_{I,J}(A, B) = \int_1^\infty d\zeta \int_0^\infty dR \{ R^I \zeta^J \exp[-(A+B\zeta)R] \}, \quad (7)$$

\*/ Т. Като. Comm. on Pure and Appl. Math., v.10, p.151, 1957.

\*\*/ М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики, т. 4, М.: Мир, 1982.

для которых справедлива рекуррентная формула

$$\Gamma_{I,J}(A, B) = \frac{J}{B} \Gamma_{I-1, J-1}(A, B) + \Gamma_{I,0}(A, B), \\ \Gamma_{I,0}(A, B) = \frac{(I-1)!}{B(A+B)^I}.$$

В главе 3 рассмотрена проблема численного решения обобщенной алгебраической задачи на собственные значения

$$Ax = \lambda Bx, \quad (8)$$

где  $A$  и  $B$  - симметричные матрицы размерности  $n \times n$  и матрица  $B$  - положительно определенная. К этой задаче сводится решение уравнения Шредингера при использовании вариационной процедуры Ритца. Особенностью задачи (8) является ее плохая обусловленность при больших значениях  $n$ . Собственные значения упорядочены по возрастанию.

В § 1 развивается теория возмущений обобщенной задачи на собственные значения. Вводится характеристика устойчивости группы собственных значений:

$$C_X(A, B) = \inf \{ [ (X^T A X)^2 + (X^T B X)^2 ]^{1/2} : \|X\| = 1, X \in \mathcal{X} \},$$

где  $\mathcal{X}$  - подпространство в  $R^n$ , натянутое на собственные векторы. Для  $i$ -го собственного вектора  $X_i$  определяется собственный угол:  $\theta_i = \arctg [ (X_i^T A X_i) / (X_i^T B X_i) ]$ . Доказывается

Теорема. Пусть  $(A, B)$  - симметричная пара и матрица  $B$  положительно определена. Пусть  $(\bar{A}, \bar{B}) = (A+H, B+F)$  диагонализуема и допускает минимаксную характеристику собственных значений и

$$\varepsilon = [ \|H\|^2 + \|F\|^2 ]^{1/2} < C_{X_k}(A, B),$$

где  $X_k$  - подпространство, натянутое на первые  $k$  собственных векторов исходной задачи (8).

Тогда

$$\bar{\theta}_i \leq \theta_i + \arcsin [ \varepsilon / C_{X_k}(A, B) ] \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, k;$$

где  $\bar{\theta}_i$  - собственный угол возмущенной задачи  $(\bar{A}, \bar{B})$ .

В § 2 строятся методы регуляризации плохо обусловленных задач. Вводится класс регуляризаторов для пары  $(A, B)$ :

$$A_\varepsilon = A + s\alpha E, \quad B_\varepsilon = B + s\beta E, \quad (9)$$

где  $(\alpha, \beta)$  - вектор регуляризации, такой что  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$  и  $\beta \geq 0$ , а  $s$  - параметр регуляризации. Доказывается, что



$$\theta_i \leq \theta_i(A_R, B_R) \leq \theta_i + \arcsin[s/Cx_k(A, B)] \quad \text{при } i \leq k,$$

если выполнено условие  $\theta(\alpha, \beta) > \theta_k$ , где  $\theta_i$  -  $i$ -й собственный угол и  $\theta(\alpha, \beta) = \arctg(\alpha/\beta)$ . Для регуляризаторов класса (9) характерно, что они сохраняют свойство вариационной оценки быть оценкой сверху.

Использование регуляризаторов повышает устойчивость собственных значений нижней части спектра, если априори известно, что эти собственные значения обладают хорошей групповой характеристикой устойчивости ( $Cx_k(A, B) \gg \epsilon$ ).

В § 3 описан метод обратной итерации с регуляризацией. Рассматриваются конкретные программные реализации метода, основанные на схеме Банча декомпозиции симметричных матриц, а также практические рекомендации по использованию этих программ. В приложении 3 приводятся тексты программ, описанных в § 3.

В главе 4 представлены вариационные расчеты уровней энергии мезомолекул изотопов водорода.

В § 1 рассматриваются расчеты энергий связи мезомолекул изотопов водорода для основных и возбужденных состояний с квантовым числом орбитального момента  $J=0$  и  $J=1$ .

В § 2 рассматриваются слабосвязанные состояния мезомолекул  $dd\mu$  и  $dt\mu$ . Обсуждаются способы экстраполяции вычисленных значений к пределу  $n \rightarrow \infty$ . Получены значения уровней энергии  $-E_{11}(dd\mu) = (1,9750 \pm 0,0002)$  эВ и  $-E_{11}(dt\mu) = (0,6604 \pm 0,0002)$  эВ.

В заключении приводятся основные результаты диссертации:

1. Проведен анализ уравнения Шредингера трех частиц в представлении симметрии Брейта-Хиллерааса. Получены асимптотики компонент волновой функции в окрестности особых точек пространства внутренних переменных, связанных с выбранной формой учета симметрии ( $R \rightarrow 0, x \rightarrow 0$ ).

2. Показано, что при  $R \rightarrow 0$  компоненты решения зависят от угла  $\theta_{12}$  (угол между векторами  $\vec{R}$  и  $\vec{F}$ ). Это накладывает ограничение на выбор внутренних независимых переменных.

3. Впервые выполнено исследование осевого вырождения. Доказано, что компоненты решения при стремлении  $x$  к нулю ведут себя как

$$F_m^{JA}(R, x, z) = x^m G_m^{JA}(R, x, z), \quad m = 0, 1, \dots, J,$$

и  $G_m^{JA}(R, x, z)$  ограничены.

4. На основе проведенного анализа уравнения Шредингера построен вариационный процесс Ритца, использующий функции вида

$$[(\xi^2 - 1)/(1 - \eta^2)]^{\frac{m}{2}} R^i \xi^j \eta^k \cdot \exp[-(\alpha + \beta \xi)R].$$

Полученный вариационный метод расчета позволяет получать решения с любыми значениями квантового числа орбитального момента  $J$  и четности  $\lambda$ . Рассмотрены свойства гамильтониана нескольких частиц, необходимые для обоснования вариационного метода. Даны аналитические формулы для расчета интегралов, возникающих при редукции уравнения Шредингера к обобщенной задаче на собственные значения.

5. На основе анализа теории возмущений исследованы способы регуляризации плохо обусловленной обобщенной задачи на собственные значения, возникающей при использовании вариационного метода с большим количеством опорных функций.

6. Разработаны численные реализации метода обратной итерации с регуляризацией, позволяющие эффективно решать алгебраическую задачу.

7. Создан комплекс программ для расчета энергий связи трехчастичных систем, основанный на разработанном вариационном методе. С его помощью проведены расчеты энергий связи мезомолекул изотопов водорода. Впервые получены с точностью  $\sim 2 \cdot 10^{-4}$  эВ значения уровней энергии слабосвязанных состояний мезомолекул  $dd\mu$  и  $dt\mu$ . Этот результат играет основную роль в определении скорости образования мезомолекул и кинетики процессов мюонного катализа.

#### Работы, положенные в основу диссертации:

1. Виноцкий С.И., Коробов В.И., Пузынин И.В. Вариационный расчет уровней энергии  $\mu$ -мезомолекул изотопов водорода. Препринт ОИИИ Р4-85-917, 1985, Дубна; ЖЭТФ, т. 91, с. 705, 1986.

2. Виноцкий С.И., Коробов В.И., Пузынин И.В. Вариационный расчет характеристик слабосвязанных вращательно-колебательных состояний мезомолекул  $dd\mu$  и  $dt\mu$ . Краткие сообщения ОИИИ, № 19-86, Дубна, 1986.

3. Виноцкий С.И., Коробов В.И., Пузынин И.В. Уточнение уровней энергии слабосвязанных вращательно-колебательных состояний мезомолекул  $dd\mu$  и  $dt\mu$ . Краткие сообщения ОИИИ, № 23-87, Дубна, 1987.

4. Korobov V.I., Puzynin I.V., Vinitzky S.I. Variational calculation of weakly bound rotational-vibrational states of mesic molecules  $dd\mu$  and  $dt\mu$ . Phys. Lett. B, v. 196, p. 272, 1987.

5. Виноцкий С.И., Коробов В.И., Пузынин И.В. Вариационный расчет слабосвязанных состояний мезомолекул  $dd_{\mu}$  и  $dt_{\mu}$ . Международный симпозиум "Мюонный катализ - 87" (тезисы докладов), Гатчина, ЛДЦ АН СССР, 1987.

6. Коробов В.И. Регуляризация экстремальных собственных значений для симметричной обобщенной задачи. Препринт ОИЯИ РИ-87-371, Дубна, 1987; ЖВФМФ, т. 28, с. 1443, 1988.

7. Коробов В.И. Метод обратной итерации с регуляризацией. Алгоритмы и программы. Сообщение ОИЯИ РИ-88-909, 1988; Дубна.

8. Коробов В.И. Анализ уравнения Шредингера в представлении симметрии Брейта-Хиллераса. Препринт ОИЯИ Р4-88-910, 1988, Дубна.

Рукопись поступила в издательский отдел  
19 января 1989 года.