ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

11-87-111

УДК 519.632.4 +
519.642.4

ЮЛДАШЕВ
Олег Ирикович

ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ МАГНИТОСТАТИКИ

Специальность: 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 1987

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

<u>Научные руководители:</u>
доктор физико-математических наук, профессор Е.П.ЖИДКОВ

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Б.Н.ХОРОМСКИЙ

<u>Официальные оппоненты:</u>
доктор физико-математических наук А.М.ПОПОВ

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник А.Л.УРВАНЦЕВ

<u>Ведущее научно-исследовательское учреждение:</u>
Институт физики высоких энергий, г.Серпухов

Автореферат разослан "____" ________________ 1987г.

Защита диссертации состоится "_____" _______________ 1987 г. в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук Ивач З.М.Иванченко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

<u>Актуальность</u>

Развитие современной ускорительной техники обуславливает возрастающие требования к точности расчетов параметров электрических и магнитных полей. Численное моделирование с помощью ЭВМ позволяет исследовать картину поведения магнитного поля значительно полнее, быстрее и дешевле, чем относительно длительный и трудоемкий процесс физического моделирования. В то же время эффективное проведение численного моделирования требует создания новых методов и комплексов программ, позволяющих с минимальными затратами ресурсов ЭВМ получать характеристики стационарных магнитных полей сложных физических установок.

Выделяется три основных подхода в разработке алгоритмов решения задачи магнитостатики: дифференциальный, интегральный и комбинированный. Каждый подход характеризуется типом используемых уравнений. Целесообразность выбора одного из них прежде всего определяется конструкцией магнитной системы конкретной физической установки. Этим, в частности, обуславливается выбор исследуемого в диссертации комбинированного подхода, использующего систему из дифференциальных и граничного интегрального уравнений. В теоретическом плане свойства этой системы изучены недостаточно полно. Возникают вопросы её однозначной разрешимости, построения соответствующей разностной задачи. Представляет интерес поведение погрешности приближенных решений граничных интегральных уравнений, а также спектров граничных интегральных операторов и их дискретных аналогов. Необходима разработка и оптимизация итерационных методов решения возникающих систем алгебраических уравнений. Все это определяет актуальность темы диссертации.

Работы, положенные в основу диссертации, выполнены в соответствии с проблемно-тематическим планом научно-исследовательских работ Объединенного института ядерных исследований.

Цель работы

Целью диссертационной работы является разработка эффективных методов численного решения некоторых задач, возникающих в магнитостатике, создание комплексов программ для решения этого класса задач, а также проведение расчетов характеристик магнитных полей конкретных физических установок. Особенности рассматриваемого класса задач заключаются в трудности аппроксимации граничного условия, учитывающего поведение решения на бесконечности с достаточной точностью, а также в том, что магнитная проницаемость ферромагнетика может принимать большие значения ($\approx 10^4$ и выше). При использовании комбинированного подхода необходимо было:

1) исследовать спектральные свойства граничных интегральных операторов и их дискретных аналогов;
2) оценить погрешность приближенных решений граничных интегральных уравнений;
3) обосновать разрешимость системы из дифференциальных и граничного интегрального уравнений;
4) построить дискретизацию этой системы и исследовать условия однозначной разрешимости разностной задачи.

Научная новизна

Разработан эффективный алгоритм численного решения задачи магнитостатики на всей плоскости в постановке, использующей дифференциальные уравнения в комбинации с граничным интегральным уравнением, учитывающим условия на бесконечности. В случае линейного дифференциального уравнения доказана положительность дифференциального оператора в соответствующей области определения и однозначная разрешимость разностной задачи. Разработан численный алгоритм решения внешней задачи Неймана для многосвязной области в осесимметричном случае, основанный на методе альтернирования. Построена математическая модель и разработана методика расчета магнитного поля многосекционной магнитной системы линейного индукционного ускорителя. Исследованы спектральные свойства граничных интегральных операторов и их дискретных аналогов для двумерных задач магнитостатики. Установлена возможность применимости метода экстраполяции Ричардсона, повышающего точность приближенных решений граничных интегральных уравнений.

Практическая ценность

На основе разработанных экономичных алгоритмов созданы комплексы программ, предназначенные для расчета стационарного магнитного поля многосекционной магнитной системы линейного индукционного ускорителя, а также для расчета характеристик поля магнитов, имеющих прямоугольную апертуру. Для различных наборов токов в фокусирующих линзах эти программы позволяют получать распределения магнитного поля линейного индукционного ускорителя Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ. С помощью созданных комплексов программ исследовались характеристики магнитных полей в случае сильного насыщения ферромагнитного экрана для некоторых магнитов установки СПИН Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Разработанные алгоритмы имеют самостоятельный интерес и могут быть использованы при численном решении аналогичных, рассматриваемых в диссертации, задач математической физики и ускорительной техники.

Апробация работы

Основные результаты диссертационной работы докладывались на У Международном совещании по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач (Дубна, 1983г.), на Х Всесоюзном совещании по ускорителям заряженных частиц (Дубна, 1986г.), на II республиканской конференции "Интегральные уравнения в прикладном моделировании" (Киев, 1986г.), а также на Ученых советах ОИЯИ и семинарах отдела вычислительной математики ОИЯИ.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 6 работ, в том числе в "Журнале технической физики", в трудах совещаний и в сообщениях ОИЯИ.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, содержит 11 таблиц, 11 рисунков, список литературы из 111 наименований и изложена на 111 страницах машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении приводится краткий обзор литературы по вопросам, рассматриваемым в диссертации. Формулируются две основные задачи, для которых разрабатываются методы численного решения. Первая из этих задач состоит в следующем: требуется определить z -ую компоненту A_z векторного потенциала $\vec{A}$ ($A_x=A_y=0$) из системы уравнений для набора изотропных сред Ω_k, $k=1,2,\dots N$:

$$\begin{cases} div(\nu_1 \nabla A_z) = -c_0 \cdot J_z, \quad x\in\Omega_1, \\ div(\nu_k \nabla A_z) = 0, \quad x\in\Omega_k, \ k=2,\dots N, \\ (A_z)_k = (A_z)_{k+1}, (\nu_k \frac{\partial}{\partial n_k} A_z)_k = (\nu_{k+1}\frac{\partial}{\partial n_k}A_z)_{k+1}, \\ \qquad x\in\Gamma_{k,k+1}, \ k=1,2,\dots N-1, \\ (I+K_1)A_z + L_1(\frac{\partial}{\partial n}A_z) = 0, \ x\in\Gamma_1, \quad \int_{\Gamma_1}\frac{\partial A_z}{\partial n}ds = 0, \end{cases} \qquad \begin{matrix}(1)\\ \\ \\ (2)\\(3)\end{matrix}$$

где

$$(K_1 v)(x_0) \equiv \frac{-1}{\pi}\int_{\Gamma_1} v(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\ln|x_0-x|\,ds_x, \quad (L_1 v)(x_0) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma_1} v(x)\ln|x_0-x|\,ds_x,$$

$\nu_k=\mu_k^{-1}$, μ_k – магнитная проницаемость среды, J_z – заданная компонента плотности тока, c_0 – постоянная, зависящая от системы единиц, $(g)_k$ – предельное значение определенной в Ω_k функции g на границе этой области, $\Gamma_{k,k+1}$ – общая граница областей Ω_k Ω_{k+1}, $|x|=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$, n_k –внешняя нормаль области Ω_k. Предполагается, что μ_k – заданная в каждой среде функция, в общем случае $\mu_k = \mu\left((\frac{\partial}{\partial x_1}A_z)^2+(\frac{\partial}{\partial x_2}A_z)^2\right)$, $\mu_N=1$. Области Ω_k, $k=1,2,\dots N-1$ – ограниченные, Γ_1 – односвязная замкнутая кривая Ляпунова, ограничивающая некоторую область Ω, такую, что $\Omega \supset \bigcup_{k=1}^{N-1}\Omega_k$.

Вторая задача состоит в определении θ -ой компоненты векторного потенциала $\vec{A}$ из граничного интегрального уравнения, к которому сводится задача магнитостатики в осесимметричном случае для ферромагнетика с бесконечно большой магнитной проницаемостью:

$$(I+K_2)A_\theta = -L_2\left(\frac{\partial}{\partial n}(r A_\theta)\right) + F, \quad x_0\in\Gamma_2, \qquad (4)$$

где

$$(K_2 v)(x_0) = \frac{-1}{2\pi}\int_{\Gamma_2} v(x)\frac{\partial}{\partial n_x}(r\cdot G(x_0,x))\,ds_x, \quad (L_2 v)(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2} v(x)G(x_0,x)\,ds_x,$$

$$G(x_0,X) = \int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\cdot d\varphi}{R(x_0,x,\varphi)}, \quad R(x_0,x) = [(z-z_0)^2 + r^2 + r_0^2 - 2 r\cdot r_0 \cos\varphi]^{1/2},$$

$$F(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_T J_\theta(x)\cdot G(x_0,x)\,dx,$$

здесь Γ_2 – замкнутая кривая, удовлетворяющая условиям Ляпунова (может быть многосвязная), T – ограниченная, может быть, многосвязная область, Γ_2 и T принадлежат полуплоскости $R_+^2 = \{x=(z,r),\ r>0,\ -\infty<z<\infty\}$.

Первая глава посвящена исследованию свойств граничных интегральных уравнений вида (2) и (4).

В §1.1 устанавливаются спектральные свойства операторов L_2, K_2. Справедливы следующие леммы.

<u>Лемма 1.</u>
Оператор L_2 положительно определен в пространстве $L_2(\Gamma_2)$.

<u>Лемма 2.</u>
Спектр $\sigma(K_2)$ оператора K_2 имеет следующие свойства: $Im(\sigma(K_2))=0$, $\sigma(K_2)\in(-1,1]$.

В § 1.2 на основе метода коллокации и кусочно-линейной интерполяции подинтегральных функций строится дискретизация для уравнений вида (2) и (4).

Если $\Gamma_{1,h}$ – сетка, построенная на контуре Γ_1, $g_h(s_k)$, $k=1,2,\dots n$ – значения подинтегральных функций в точках $s_k\in\Gamma_{1,h}$, занумерованных последовательно при некотором обходе Γ_1, то уравнению (2) ставится в соответствие следующая система уравнений:

$$(E+K_{1,h})u_h = -L_{1,h}v_h, \quad x_0\in\Gamma_{1,h}, \qquad (5)$$

где

$$(K_{1,h}u_h)(x_0) = \sum_{s_k\in\Gamma_{1,h}} u_h(s_k)\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{\partial}{\partial n_x}\ln|x_0-x|\cdot\varphi_k(x)\,ds_x, \quad x_0\in\Gamma_{1,h},$$

$$(L_{1,h}v_h)(x_0) = \sum_{s_k\in\Gamma_{1,h}} v_h(s_k)\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma_1}\ln|x_0-x|\cdot\varphi_k(x)\,ds_x, \quad x_0\in\Gamma_{1,h},$$

$\varphi_k(x)$ – кусочно-линейные базисные функции, $x\in\Gamma_1$. Аналогичным образом строится аппроксимация для уравнения (4):

$$(E+K_{2,h})u_h = -L_{2,h}v_h + F_h, \quad x_0\in\Gamma_{2,h}. \qquad (6)$$

В этом же параграфе приводятся теоремы о сходимости приближенных решений уравнений (5) и (6) к точным решениям уравнений (2) и (4).

В §I.3 рассматривается метод экстраполяции Ричардсона, позволяющий повышать точность приближенных решений граничных интегральных уравнений. Рассматривается задача Дирихле для уравнения Лапласа, когда на границе Γ_1 области Ω задан след гармонической функции u^*. Задача сводится к граничному интегральному уравнению первого рода:

$$L_1 v = (I - K_1) u^*, \quad x_0 \in \Gamma_1. \tag{7}$$

Приближенное решение уравнения (7) находится из системы:

$$L_{1,h} v_h = (E - K_{1,h}) u_h^*, \quad x_0 \in \Gamma_{1,h}. \tag{8}$$

После определения v_h, во внутренних точках $x_0 \in \Omega$ приближенное решение вычисляется по формуле:

$$u_h(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \hat{u}_h^*(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \ln|x_0 - x| ds_x + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \hat{v}_h(x) \ln|x_0 - x| ds_x,$$

где $\hat{g}_h(x)$ – кусочно-линейное восполнение сеточной функции g_h. Пусть h – длина дуги между любыми двумя соседними точками сетки $\Gamma_{1,h}$.

Условия разложения погрешности решений уравнения (8) по степеням шага дискретизации отличаются от известных в силу того, что оператор L_1 не имеет ограниченного в С (Γ_1) обратного, а ядро интегрального оператора имеет логарифмическую особенность. Справедлива

<u>Теорема</u>.

Пусть на контуре Γ_1 с непрерывной кривизной решение уравнения (7) $v(x) = \frac{\partial}{\partial n} u(x) \in C^4(\Gamma_1)$. Пусть: а) матрица $L_{1,h}$ положительна $L_{1,h} \geq \beta h \cdot E$, где $\beta > 0$ не зависит от h, а собственные функции $L_{1,h}$ равномерно по h ограничены; б) сингулярный оператор типа оператора Коши:

$$(S w)(x) = \int_{\Gamma_1} w(s) \frac{d\tau(x,s)}{|x-s|},$$

имеет ограниченный обратный S^{-1} в каждом из пространств $L_2(\Gamma_1)$, $H_\alpha(\Gamma_1)$, $0 < \alpha < 1$.

Тогда справедливы оценки:

$$\| v_h - v \|_{L_2(\Gamma_{1,h})} \leq c \cdot h^{2-\varepsilon}, \quad | v_h - v | \leq c \cdot h^{3/2 - \varepsilon}, \quad x \in \Gamma_{1,h},$$

а для функции u_h, $x \in \bar{\Omega}$ выполнено

$$\| u_h - u^* \|_{L_2(\Omega)} \leq c \cdot h^{3-\varepsilon}, \quad | u_h - u^* | \leq c \cdot h^{5/2 - \varepsilon}, \quad x \in \Omega.$$

Для решения уравнения (8) справедливо представление

$$v_h = v + c(x) \cdot h^2 + \delta_h + O(h^3), \quad x \in \Gamma_{1,h},$$

$$L_{1,h} \delta_h = \eta(x,h), \ x \in \Gamma_{1,h}; \ \|\eta\|_{L_2(\Gamma_{1,h})} \leq c \cdot h^3, \ |\eta| \leq c \cdot h^{3-\varepsilon}, \ x \in \Gamma_{1,h},$$

во всех случаях $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число.

В этом же параграфе приводятся результаты численных экспериментов, показывающие эффективность уточнения приближенных решений граничных интегральных уравнений методом Ричардсона.

Вторая глава посвящена комбинированной постановке задачи магнитостатики, использующей дифференциальные уравнения в некоторой ограниченной области и интегральное уравнение на границе этой области.

В § 2.I предлагается алгоритм численного решения системы (I)-(2). Если предположить, что

$$\nu_k \equiv \nu(x) \in C^1(\bar{\Omega}_k), \ k = 1, 2, \ldots N-1, \ \nu \geq \nu_c > 0, \tag{9}$$

и ввести обозначение

$$\mathcal{L} u \equiv \operatorname{div}(\nu(x) \nabla u), \quad x \in \Omega,$$

через $\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{ u \,/\, u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), \ (I + K_1) u + L_1(\nu \frac{\partial u}{\partial n}) = 0, \ x_0 \in \Gamma_1, \ \int_{\Gamma_1} \nu \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 \}$ обозначить область определения оператора $\mathcal{L}$, то справедлива

<u>Лемма 3</u>.

Пусть выполняется условие $L_1 g_1 \neq 0$, $g_1 = K_1^* g_1$, (g_1 – плотность потенциала Робена) и $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, тогда оператор $\mathcal{L}$ симметричен, $(\mathcal{L}u, u)_\Omega \geq 0$, $(\mathcal{L}u, u)_\Omega = 0$ тогда и только тогда, когда $u \equiv 0$. Граничное интегральное уравнение (2) иначе можно представить либо в виде

$$u + M_1 (\nu \frac{\partial u}{\partial n}) = 0, \quad x \in \Gamma_1, \tag{I0}$$

где $M_1 = (I + K_1)^{-1} L_1$, либо, предполагая существование L_1^{-1}, в виде

$$(\nu \frac{\partial u}{\partial n}) + M_2 u = 0, \quad x \in \Gamma_1, \tag{II}$$

где $M_2 = L_1^{-1}(I + K_1)$. В соответствии с представлениями (I0), (II) возможно построение двух разностных схем, аппроксимирующих систему (I)-(2). Выбирая в качестве области Ω прямоугольник и предполагая выполнение условий (9), запишем соответствующие разностные схемы в виде $A_{1,h} u_h = \varphi_{1,h}$ и $A_{2,h} u_h = \varphi_{2,h}$.

Справедливы следующие утверждения:

Лемма 4.

Пусть выполняется условие:

$$(M_{1,h} v_h, v_h)_{\Gamma_{1,h}} \geq 0,$$

где $M_{1,h} = (E + K_{1,h})^{-1} L_{1,h}$, тогда система $A_{1,h} v_h = \Phi_{1,h}$ имеет единственное решение.

Лемма 5.

Если выполняется условие $(M_{2,h} v_h, v_h)_{\Gamma_{1,h}} \geq 0$, где $M_{2,h} = L^{-1}_{1,h} (E + K_{1,h})$, то $(A_{2,h} v_h, v_h)_{\bar{\Omega}_h} \geq 0$, $(A_{2,h} v_h, v_h)_{\bar{\Omega}_h} = 0$ тогда и только тогда, когда $v_h = 0$, $x \in \bar{\Omega}_h$.

В § 2.2 строится алгоритм численного решения внешней задачи Неймана для многосвязной области в осесимметричном случае, основанный на методе разделения области. Итерационный процесс сводится к попеременному решению краевых задач со смешанными граничными условиями в ограниченных областях (методом сеток) и граничного интегрального уравнения.

В § 2.3 приводятся результаты численных экспериментов, иллюстрирующих эффективность предложенных в двух предыдущих параграфах алгоритмов. Здесь же приводятся результаты вычислений характеристик магнитных полей некоторых магнитов установки СПИН Лаборатории высоких энергий ОИЯИ. Расчеты получены с помощью разработанных комплексов программ.

В третьей главе предлагается методика расчета магнитного поля многосекционной системы линейного индукционного ускорителя.

В § 3.I строится математическая модель многосекционной магнитной системы, для этого используется граничное интегральное уравнение (4). Обсуждаются способы дискретизации этого уравнения.

В § 3.2 приводится алгоритм численного решения выбранной математической модели. Алгоритм основан на свойствах матрицы $K_{2,h}$, которая в данном случае является четырехуровневой матрицей типа теплицевой, а также на свойствах вектора правой части соответствующей системы линейных алгебраических уравнений. Экономичное вычисление элементов матрицы возможно благодаря блочному представлению:

$$K_{2,h} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} E^{(2)}_{ij} \otimes B_{ij},$$

где B_{ij} – квадратные матрицы размерности $(m_1 \cdot m_2) \times (m_1 \cdot m_2)$, $E^{(k)}_{ij}$ – квадратные матрицы размерности $k \times k$, в которых на

пересечении i -ой строки и j -го столбца стоит единица, а остальные элементы равны нулю, $\otimes$ -прямое произведение матриц. Каждая из матриц B_{ij} представима в блочном виде

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{\ell=1}^{m_1} E^{(m_1)}_{k\ell} \otimes b_{ij;k\ell},$$

где $b_{ij;k\ell}$ – квадратные матрицы размерности $m_2 \times m_2$. Учет того, что $B_{11} = B_{22}$, а неравные тождественно матрицы $b_{ij;k\ell}$ и $b_{ji;\ell k}$ состоят из одинаковых элементов, проводится введением специальных индексных функций, которые позволяют по минимальному числу вычисляемых элементов матриц восстанавливать всю матрицу $K_{2,h}$. Аналогичным образом оптимизируется вычисление вектора правой части системы (6).

В § 3.3 приводятся результаты расчетов магнитного поля нескольких секций линейного индукционного ускорителя Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ. Приводится сравнение рассчитанного и измеренного распределения магнитного поля двух смежных полусекций для различных наборов токов в фокусирующих линзах. Результаты сравнений показывают хорошее согласование. Дано краткое описание специализированного комплекса программ и приведены некоторые характеристики его работы.

В заключении приводятся основные результаты диссертации:

I. Исследованы спектральные свойства граничных интегральных операторов и их дискретных аналогов для двумерных задач магнитостатики.

2. Дано обоснование применимости метода экстраполяции Ричардсона, повышающего точность приближенных решений граничных интегральных уравнений. Практическая эффективность экстраполяции проиллюстрирована численными экспериментами.

3. Разработан эффективный алгоритм численного решения задачи магнитостатики на всей плоскости в постановке, использующей в общем случае квазилинейные дифференциальные уравнения в комбинации с граничным интегральным уравнением, учитывающим условие на бесконечности. В случае линейного дифференциального уравнения доказана положительность дифференциального оператора и однозначная разрешимость разностной задачи.

4. Разработан алгоритм численного решения внешней задачи Неймана для многосвязной области в осесимметричном случае, основанный на методе разделения области.

5. На основе предложенных алгоритмов созданы комплексы программ, с помощью которых проведены расчеты характеристик магнитных полей некоторых "открытых" магнитных систем ускорителей.

6. Построена математическая модель и разработана использующая граничные интегральные уравнения методика расчета магнитного поля многосекционной магнитной системы линейного индукционного ускорителя (ЛИУ).

7. Создан специализированный комплекс программ и проведены расчеты магнитного поля ЛИУ-30 ЛНФ ОИЯИ.

Работы, положенные в основу диссертации:

1. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Юлдашев О.И. Решение двумерного уравнения Лапласа методом граничных интегральных уравнений. ОИЯИ, 11-81-398, Дубна, 1981.
2. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Юлдашев О.И. Решение краевых задач для уравнения Лапласа методом граничных интегральных уравнений. ОИЯИ Р11-82-659. Дубна, 1982.
3. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Юлдашев О.И. Численное решение осесимметричных краевых задач методом граничных интегральных уравнений. ОИЯИ, Д10, 11-84-818, Дубна, 1984.
4. Жидков Е.П., Матора И.М., Саввин В.А., Хоромский Б.Н., Юлдашев О.И. Расчет стационарного магнитного поля многосекционной системы линейного индукционного ускорителя. ОИЯИ, Р9-85-915. Дубна, 1985; ЖТФ, т.57, в.3, с.483-492, 1987.
5. Айрян Э.А., Жидков Е.П., Федоров А.В., Хоромский Б.Н., Шелаев И.А., Юдин И.П., Юлдашев О.И. Использование метода граничных интегральных уравнений для расчета распределения двумерного поля "открытых" магнитных систем ускорителей. В сб.: "Интегральные уравнения в прикладном моделировании". Тезисы докладов 2-й Республиканской научно-технической конференции - Киев: Институт электродинамики АН УССР, ч.1, с.55-56, 1986.
6. Айрян Э.А., Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Юлдашев О.И. Алгоритм учета условий на бесконечности в двумерных задачах магнитостатики. ОИЯИ, Р11-87-49, Дубна, 1987.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 февраля 1987 года.