ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

УДК 519.622;53.072;53.681.3

11-86-285

СЕМЕРДЖИЕВ
Христо Илиев

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ЧЕБЫШЕВСКИХ СИСТЕМАХ, И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Специальность: 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна 1986

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор — ДМИТРИЕВ Владимир Иванович

доктор физико-математических наук, профессор — ДНЕСТРОВСКИЙ Юрий Николаевич

доктор физико-математических наук — ПУЗЫНИН Игорь Викторович

Ведущее научно-исследовательское учреждение: Вычислительный центр СО АН СССР, Новосибирск.

Автореферат разослан "____" ________________ 198__ года.

Защита диссертации состоится "___" _____________ 198___ года в _____ часов на заседании Специализированного совета Д047.01.04 при Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ, г.Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук — Ив. З.М.Иванченко

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертации исследуются обобщенные полиномы по основным чебышевским системам, и на их основе разработан ряд новых численных методов. Эффективность этих методов показана при исследовании математических моделей релятивистских пучков заряженных частиц.

Актуальность

Современные достижения в области физики атомного ядра и элементарных частиц в значительной степени связаны с успешным развитием ускорителей заряженных частиц. Расчет полей имеет значение при проектировании различных электрофизических установок.

Математическое моделирование крупных физических установок приводит к очень интересным и оригинальным математическим задачам. Некоторые из них являются настолько сложными нелинейными задачами, что единственная возможность их исследования состоит в разработке численных методов и их реализации на ЭВМ.

В настоящее время продолжается интенсивное экспериментальное и теоретическое изучение процессов, происходящих при инжекции релятивистского электронного пучка в газ. Особенности подхода использования интенсивных релятивистских электронных пучков для ускорения ионов говорят, что он многообещающий.

В связи с различными возможностями для физических исследований и практических приложений взаимодействию мощных электронных пучков с высокочастотными полями постоянно уделяется большое внимание. В частности, не потеряло актуальности исследование взаимодействия таких полей с отдельным релятивистским сгустком, содержащим большое число частиц.

Наряду с исследованиями, связанными с существованием и единственностью решения этих задач, а также с качественными и аналитическими подходами для описания поведения решений, важнейшую роль играют исследования, посвященные разработке численных методов решения таких задач. При решении физических задач оправдано исследование решений в предположении, что они существуют, поскольку зачастую имеется априорная информация о существовании искомых решений. В большинстве существующих численных методов эта априорная информация используется лишь для идентификации полученного математического решения с ожидаемым физическим результатом. Построение численных методов решения таких задач особенно актуально в связи с тем, что нелинейные математические задачи, возникающие при описании физических явлений, не поддаются качественному исследованию или написанию решения в аналитическом виде без серьезных упрощений. Эти сложные физические задачи предъявляют и повышенные требования к методам их численного анализа - в частности к их точности и быстродействию.

В последнее время созданию эффективных численных методов решения нелинейных задач уделяется большое внимание во всем мире. В СССР хорошо разработана методика проведения вычислительного эксперимента. К этой области относятся работы таких крупных математиков, как А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, Г.И.Марчук, и их учеников.

Диссертация и посвящена исследованию перечисленных нелинейных задач.

Работы, положенные в основу реферируемой диссертации, выполнены в соответствии с проблемно-тематическим планом научно-исследовательских работ ОИЯИ.

Цели и задачи исследований

Основная цель диссертации - расширить с помощью тригонометрической (Т-системы) и экспоненциальной (Э-системы) арсенал численных методов, полученных на основе алгебраической системы (А-системы), а также построить алгоритмы для их комбинированного применения к решению ряда нелинейных задач, связанных с исследованием моделей релятивистских пучков заряженных частиц. В таких моделях с использованием метода крупных частиц приходится численно интегрировать большое число нелинейных уравнений. При исследовании построенных нами моделей прямое применение находит и система функции Бесселя (Б-система). А,Т,Э и Б - системы чебышевские. Чебышевская система состоит из множества непрерывных функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}$, определенных на вещественном интервале $[a,b]$ и характеризующихся тем свойством, что любая нетривиальная линейная вещественная комбинация $\sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i(x)$ (обобщенный полином по системе $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x)$) имеет самое большее n различных нулей на $[a,b]$. Это определение сразу ставит вопрос о нахождении всех нулей обобщенных полиномов по заданной чебышевской системе. В случае алгебраических полиномов такие методы разрабатывались многими авторами (К.Дочевым, Н.Кюркчиевым, С.Марковым, Л.Эрлихом и др.), но только тогда, когда корни простые.

В диссертации разработан единый подход к построению итерационных методов для одновременного нахождения всех нулей (МОНВН) данного обобщенного полинома по чебышевской системе. При этом было необходимо:

1. Разработать МОНВН как аналоги методов Ньютона, Чебышева и Обрешкова для обобщенного полинома.
2. Получить конкретные вычислительные схемы для случаев А-,Т- и Э-полиномов, а также в случае произвольной чебышевской системы.
3. Обосновать сходимость этих методов - квадратическую в случае аналогов метода Ньютона и кубическую в случае аналогов методов Чебышева и Обрешкова.
4. Обобщить МОНВН с сохранением квадратической сходимости на случай, когда кратности нулей произвольные.
5. Показать преимущество новых методов перед классическими для индивидуального нахождения нулей.

Необходимость разработки МОНВН обобщенных полиномов была вызвана также исследованием аппроксимантов Падэ (АП) по чебышевской системе. АП в последние 2-3 десятилетия нашли хорошие приложения в различных задачах физики. Многие авторы (Г.Бейкр, П.Грейвс-Морис, Ж.Флейхер, Ж.Холдеман, С.Брезински, Ж.Чисхолм) модифицировали классические АП, используя полиномы Чебышева I рода, полиномы Лежандра, ортогональные полиномы общего вида, но в конечном счете их подходы сводятся к нахождению АП в виде отношения двух А-полиномов. Но если принять как входную информацию несколько первых коэффициентов ряда Фурье для рассматриваемой функции, то возникает задача о ее приближении отношением двух Т-полиномов. При этом стало необходимым:

1. Построить метод для определения тригонометрических АП.
2. Исследовать погрешность тригонометрического АП как для достаточно гладких, так и для разрывных функций.
3. Получить эффективный алгоритм построения наиболее часто используемых диагональных АП.

В случае разрывных функций соответствующие частичные суммы ряда Фурье имеют дефект приближения, известный как эффект Гиббса. Таким образом возникла и задача:

4. Исследовать эффект Гиббса при тригонометрических АП.

Развитие идеи о комбинированном приложении методов, основанных на различных чебышевских системах, привело к разработке новых методов для решения задачи Коши

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0 . \tag{I}$$

Для решения этой задачи создано много методов. В большинстве из них повышение точности приближенного решения получается за счет уменьшения шага интегрирования. Возникает вопрос, нельзя ли увеличить точность, не уменьшая слишком шаг интегрирования, а подходящим образом учитывать поведение функции $f(x, y(x))$ в окрестности точки x, в которой ищется решение задачи (I). Идею использовать специализированные методы интегрирования, базирующиеся на комбинациях А-,Т- и Э-функций предлагали и другие авторы(В.Гаучи,С.Деннис, Т.Лич, Л.Иксару, А.Аллис и др.). Однако эти функции можно выбирать только в некоторых линейных задачах, когда имеется априорная информация о поведении решения. Метод должен быть и быстрым, так как необходимо прослеживать развитие некоторого физического процесса на длительном промежутке времени с небольшими затратами машинного времени. Следовательно, правая часть (I) должна на каждом шаге вычисляться не более одного раза и шаг должен быть не очень маленьким. Но поведение функции $f(x, y(x))$ заранее неизвестно, так как оно зависит и от неизвестного решения $y(x)$. Таким образом,стало необходимым:

I. Разработать многошаговые методы типа метода Адамса с использованием интерполяционных полиномов А-,Т- и Э-типов.

2. Построить алгоритмы для комбинированного применения А-,Т- и Э-методов (АТЭ-алгоритмы).

3. Разработать вычислительные схемы и для дифференциальных уравнений второго порядка в связи с уравнениями движения заряженных частиц.

Для применения разработанных методов в практике необходима их реализация в виде алгоритмов и программ.

При проектировании различных электрофизических установок возникают оригинальные задачи, требующие своего подхода к решению. Сформулируем несколько таких задач.

Задача А. Математическая модель стационарного самосогласованного пучка релятивистских электронов сводится к следующему. Заданы дифференциальные уравнения

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \tag{2}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\bar{A}^{(c)} = -\frac{4\pi}{c} j, \tag{3}$$

где φ и $\bar{A}^{(c)}$ – неизвестные скалярный и векторный потенциалы, а ρ и j – неизвестные плотности заряда и тока:

$$\rho = \frac{\varkappa}{4\pi e r}(H_0 - e\varphi)\,\theta(\Phi), \tag{4}$$

$$j = \frac{\varkappa c^2}{4\pi e r}\left[\frac{M_0}{r} - \frac{e}{c}\left(A_\theta^{(c)} + A_\theta^{(0)}\right)\right]\theta(\Phi). \tag{5}$$

В (4) и (5) θ – функция Хевисайда, а Φ – нелинейное соотношение

$$\Phi(\varphi, A) = (H_0 - e\varphi)^2 - m^2c^4 - c^2\left[\frac{M_0}{r} - \frac{e}{c}\left(A_\theta^{(c)} + A_\theta^{(0)}\right)\right]^2. \tag{6}$$

Система уравнений (2) и (3) рассматривается в цилиндрической области (камере) радиуса b и высоты a. В силу азимутальной симметрии системы, достаточно рассматривать уравнения (2) и (3) в прямоугольнике $G(\,0 \le r \le a\,,\ -b \le z \le b\,)$. Так как камера идеально проводящая, то φ и A_θ удовлетворяют граничным условиям:

$$A_\theta(r,z) = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm b,\ r = 0,\ r = a, \tag{7}$$

$$\varphi(r,z) = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm b,\ r = a \quad \left.\frac{\partial\varphi(r,z)}{\partial r}\right|_{r=0} = 0. \tag{8}$$

В силу симметрии по z ищется такая симметричная относительно оси Or область Ω внутри прямоугольника G, чтобы найденные φ и $A_\theta^{(c)}$ при заданной $A_\theta^{(0)}$ удовлетворяли соотношению

$$\Phi(\varphi(P), A(P)) = 0; \tag{9}$$

P – любая точка, принадлежащая границе области Ω. Такая область Ω и такие функции φ и $A_\theta^{(c)}$ являются самосогласованным решением задачи (2)-(8).

При решении задачи А было необходимо:

I. Разработать удобный алгоритм решения уравнений (2),(3),(7) и (8) при заданной области Ω.

2. Аппроксимировать подходящим образом границу области Ω.

3. Разработать алгоритмы согласования области Ω.

4. Найти выражение для внешнего магнитного поля (функцию $A_\theta^{(0)}$ в (5) и (6)).

5. Реализовать программно методику решения задачи А и найти самосогласованные решения. При этом решения должны обладать свойствами:

а) число электронов в пучке должно быть достаточно большим;

б) компактностью, т.е. малым поперечным сечением пучка и большой плотностью частиц в сгустке;

в) внешнее магнитное поле – слабо фокусирующее.

6. Анализировать численно движение заряженных частиц в электрическом и магнитных полях, определяемых найденными потенциалами на достаточно большом промежутке времени.

Задача Б. Исследование математической модели процесса образования фронта ионизации при инжекции релятивистского электронного пучка в камеру с газом состоит в многократном решении уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi e\,(n_i - n_e), \tag{10}$$

где n_e и n_i – плотности электронов и ионов (в них время t участвует как параметр) при граничном условии

$$\varphi|_{\Sigma} = 0 , \qquad (11)$$

где Σ-внутренняя поверхность цилиндрической камеры.

Решение (10) и (11) производится совместно с уравнениями движения крупных частиц, имитирующих пучок

$$M_i \frac{d}{dt}(\gamma_i \dot{x}_i) = \sum_{j=1}^{J(t)} F(x_j ; x_i) , \qquad i=1,2,\dots,J(t), \qquad (12)$$

где $F(x_j ; x_i)$ – сила, с которой i-й сгусток действует на j-й. Определение силы происходит в следующем порядке. Сначала из (10) и (11) находится φ, потом поле E_z и наконец F; интегрируем систему (12), определяем число $J(t)$ частиц, находящихся в камере, вычисляем вновь получившиеся плотности n_e и n_i и из (10) и (11) снова определяем φ и т.д. При этом возникли следующие подзадачи:

1. Потенциал φ найти как аналитическое выражение от x_i, t, r и z.

2. Эффективно аппроксимировать сечение ионизации непрерывной функцией.

3. Для численного решения задачи Б было необходимо создать сложный комплекс программ для ЭВМ.

Задача В. Математическая модель переходных процессов при инжекции релятивистского электронного пучка в возбужденный резонатор заключается в следующем.

Уравнения для осцилятора поля q_λ $(\lambda \equiv \lambda_{\ell m},\ \ell=1,2,\dots, m=0,1,\dots)$ имеют вид

$$\ddot{q}_\lambda + 2\alpha_\lambda \dot{q}_\lambda + c^2\lambda^2 q_\lambda = \frac{1}{c}\int\limits_V (\bar{j}^{\,пучка} + \bar{j}^{\,стор.})\bar{A}_\lambda dV , \qquad (13)$$

где α_λ- константы, $\bar{A}_\lambda$ – собственные функции резонатора. Для замыкания системы уравнений (13) надо добавить уравнения движения тех сгустков с номерами $j=1,2,\dots, J(t)$, которые к моменту времени t находятся в резонаторе. В этих уравнениях учитываем действие квазистатических сил $F_{\parallel}(x_j ; x_i)$ и действие вихревого поля $\bar{E}_{\perp} = -\frac{1}{c}\sum_\lambda \dot{q}_\lambda \bar{A}_\lambda$. Имеем еще

$$x_i'' = (1 - x_i'^2)^{3/2}\left\{\sum_{j=1}^{J(t)} \left[F_{\parallel}(x_j ; x_i) + F_{\perp}(x_j ; x_i)\right]\right\} , \qquad (14)$$

$$j = 1,2,\dots, J(t).$$

Для решения задачи В на ЭВМ было необходимо сократить значительно машинное время и повысить точность расчетов, так как в некоторых случаях число уравнений (13) достигало 50, а число уравнений (14) – 400. При этом стало необходимым учитывать и сильно колебательный характер решений системы (13).

Во всех задачах А,Б и В в уравнениях движения необходимо было учитывать релятивистские эффекты.

При решении задач А,Б и В ставили перед собой цель показать пригодность этих математических моделей к исследованию соответствующих объектов и процессов и продемонстрировать эффективность разработанных нами численных методов.

Научная новизна и значимость работы

В диссертации разработан общий подход к построению итерационных процессов для одновременного нахождения всех нулей обобщенных полиномов. Тригонометрические АП вводятся впервые. Они являются хорошим аппаратом приближения разрывных функций, так как по сравнению с рядами Фурье эффект Гиббса в АП на порядок ниже.

Комбинированное применение методов, основанных на различных чебышевских системах, оказалось весьма перспективным к решению жестких систем дифференциальных уравнений. На его основе можно построить комбинированные методы для решения и других задач математической физики.

Разработанные в диссертации новые методы позволили решить трудные нелинейные задачи А,Б и В.

Построенные модели и их программные реализации могут быть с небольшими изменениями применены и к другим аналогичным задачам физики и техники.

Практическая полезность работы

Развитая в диссертации методика эффективно применена к разработке ряда модельных задач физики электронных пучков.

Одна из основных задач, возникающих при создании коллективного ускорителя – это получение заряженного электронного кольца. В работе исследовалась модель такого кольца в зависимости от вариации большого количества параметров. В математической постановке учитывалось то, что пучок находится внутри металлической камеры, и поэтому эта постановка ближе к реальному случаю. Показано, что разработанным методом решения задачи А, с вполне допустимой затратой машинного времени могут быть рассчитаны разные технически интересные варианты электронных пучков такого рода. Этот подход может быть распространен и на двухкомпонентные пучки.

Принятый подход решения задачи Б позволяет определить степень влияния различных факторов на образование виртуального катода, скорость движения фронта ионизации и ускорение ионов газа.

Решение задачи В относится к исследованиям взаимодействия мощных электронных пучков с высокочастотными полями.

МОНВН обобщенных полиномов и многошаговые А-,Т- и Э-методы для решения задачи (I) включены в программу практикума по методам вычислений и ЭВМ для студентов математического факультета Пловдивского университета.

Апробация работы

Результаты, вошедшие в диссертацию, докладывались на Международной конференции по численным методам (София, 1982), на научных семинарах факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ, Института ядерных исследований и ядерной энергетики БАН (София, НРБ), Института математики и информатики БАН (София, НРБ), на научных семинарах ОИЯИ и Пловдивского университета.

Основное содержание диссертации отражено в 26 публикациях в виде статей в журналах Докл. БАН, ЖВМ и МФ, **IMA J. of Numer. Anal**, в Трудах международного совещания "Проблемы математического моделирования, программирования и математических методов решения физических задач" (Дубна, 1984) и Пловдивского университета, и в сообщениях ОИЯИ.

Личный вклад автора

По теме диссертации автор имеет 9 самостоятельных публикаций. Кроме того, автор диссертации, работая в коллективе соавторов, объединяющем сотрудников Лаборатории вычислительной техники и автоматизации и Отдела новых методов ускорения, был инициатором данных исследований. Им самостоятельно разработаны все принципиальные вопросы, относящиеся к изложенной в первой части диссертации проблематике. Автор непосредственно проводил реализацию на ЭВМ разработанных алгоритмов, участвовал в математической постановке, в математическом моделировании исследуемых объектов и процессов, в численном решении конкретных физических задач, а также в анализе полученных результатов.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, двух частей, заключения и приложения. Первая часть состоит из четырех глав и содержит описание и обоснование численных методов, основанных на чебышевских системах. Вторая часть объединяет 5,6 и 7-ю главы и посвящена решению задач А,Б и В.

Полный объем диссертации 338 страниц, из которых основной текст занимает 278 страниц. Диссертация содержит 44 таблицы, 40 рисунков и список литературы из 166 наименований.

П. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение к реферируемой диссертации содержит определения используемых понятий.

Первая часть называется "Численные методы, основанные на чебышевских системах". В ней рассмотрены теоретические вопросы, касающиеся интерполяционных полиномов по чебышевским системам, итерационных МОНВН обобщенных полиномов, тригонометрических АП и многошаговых методов для решения задачи (I).

В первой главе "Интерполяционные полиномы по чебышевским системам" рассматриваются интерполяционные полиномы по А-,Т- и Э-системам, а также по произвольной чебышевской системе. Здесь установлены новые утверждения, относящиеся к ним.

Обычные разделенные разности назовем разделенными разностями алгебраического типа (РРА). Вводятся и разделенные разности тригонометрического (РРТ), экспоненциального (РРЭ) вида и обобщенные разделенные разности (ОРР) по данному набору базисных функций, образующих систему Чебышева, и по данному набору линейных функционалов, и для их эффективного вычисления получены рекуррентные соотношения. С помощью РРТ, РРЭ и ОРР, Т, Э и самый общий интерполяционные полиномы записываются в более удобной для приложений ньютоновской форме. Получены также оценки погрешности интерполяционных полиномов.

В диссертации обоснован естественный подход для получения разделенных разностей с кратными узлами. Основная идея этого подхода состоит в совершении предельного перехода в разделенных разностях с различными (простыми) узлами. В первой главе получены и конкретные формулы для РРА, РРТ, РРЭ и ОРР с кратными узлами. Особое место в первой главе занимает § I.6, который содержит унифицированное представление ряда классических интерполяционных полиномов (Лагранжа, Тейлора, Эрмита, Абеля-Гончарова, Эрмита-Биркгофа, Обрешкова и др.) с помощью ОРР.

Во второй главе "Итерационные методы для одновременного нахождения всех нулей обобщенных полиномов по чебышевским системам" построен и обоснован ряд МОНВН А-,Т-,Э-и О-полиномов. Эти методы имеют более широкую область сходимости, чем классические методы Ньютона, Чебышева и Обрешкова для индивидуального поиска (одного за другим) нулей полиномов.

В § 2.I получены МОНВН некоторого обобщенного полинома $f(x)$, имеющего лишь простые нули:

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - f(x_i^{[k]}) \,/\, Q'_{[k]}(x_i^{[k]}), \tag{I5}$$

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - f(x_i^{[k]})\Big[2Q'_{[k]}(x_i^{[k]}) - f(x_i^{[k]}) + \tfrac{1}{2} f(x_i^{[k]}) Q''_{[k]}(x_i^{[k]}) / Q'_{[k]}(x_i^{[k]})\Big] / Q'^{2}_{[k]}(x_i^{[k]}), \tag{I6}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n \;; \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $Q_{[k]}(x)$ – обобщенный полином по этой же чебышевской системе, имеющий в качестве нулей k-е приближения $x_1^{[k]}, \ldots, x_n^{[k]}$ к нулям $x_1, \ldots, x_n$ полинома $f(x)$. Методы (I5) и (I6) являются аналогами хорошо известных методов Ньютона и Чебышева.

Далее, во второй главе методы (I5) и (I6) обоснованы для случаев, когда $f(x)$ – А-,Т-и Э-полиномы.В этих случаях возможно восстановление полиномов $Q_{[k]}(x)$ по их нулям, потому что $Q_{[k]}(x)$ можно факторизовать. Из всех I6 методов, описанных во второй главе, ранее были известными только метод Дочева, являющийся частным случаем (I5) для А-полиномов,и метод Эрлиха. Здесь получена связь между методом Дочева и РРА. Именно, эта связь указала на дальнейшее обобщение методов типа (I5) на случаи, когда нули многократные.

Приведем в качестве иллюстрации метод типа (I5), относящийся к случаю Т-полинома $T_N(x)$ порядка N. Все нули полинома $T_N(x)$, находящиеся в промежутке $[-\pi, \pi]$, можно находить следующим методом:

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - 2B_{[k]} T_N(x_i^{[k]}) \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2N} \sin \frac{x_i^{[k]} - x_j^{[k]}}{2} \right)^{-1}, \tag{I7}$$

$$i = 1, 2, \ldots, 2N \;; \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $B_{[k]} = [T_N(y)]^{-1} \prod\limits_{j=1}^{2N} \sin \dfrac{y - x_j^{[k]}}{2}$,

а y – произвольное число из промежутка $[-\pi, \pi]$, отличное от нулей $T_N(x)$. Метод (I7) обоснован теоремой 2.3.I.

<u>Теорема 2.3.I</u>. Пусть $0 < q < 1$, $d = \min\limits_{i \neq j} |x_i - x_j|$,

$$d_1 = \min_{i=1,\ldots,2N} |y - x_i| \;, \quad r = \min\left\{2\left|\sin\left(\frac{d}{2} - c\right)\right|,\; 2\left|\sin\frac{d_1}{2}\right|\right\},$$

и $c > 0$ такое, что выполняются неравенства $d - 2c > 0$ и $c\,2^{4N} < r$. Пусть начальные приближения выбраны так, чтобы

$$|x_i^{[0]} - x_i| \leq cq\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, 2N. \tag{I8}$$

Тогда для $k = 0, 1, \ldots$ выполняются неравенства

$$|x_i^{[k]} - x_i| \leq c q^{2^k}\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, 2N.$$

Надо отметить, что метод (I7) не является непосредственным следствием (I5). Введение нормировочных множителей $B_{[k]}$ в (I7) необходимо и играет существенную роль для сходимости метода. В случае Э-полинома $E_N(x)$ также построен метод типа (I7) и обоснована его квадратическая сходимость теоремой 2.3.5.

Во второй главе рассмотрены 3 вычислительные схемы, вытекающие из (I6) с включением необходимых нормировочных факторов для А-,Т- и Э-полиномов. Здесь приведем только Э-метод. Для нахождения всех нулей Э-полинома $E_N(x)$ получен метод

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - 4C_{[k]} E_N(x_i^{[k]}) \Big[V_i^{[k]} - C_{[k]} E'_N(x_i^{[k]}) + C_{[k]} E_N(x_i^{[k]}) \cdot W_i^{[k]}\Big] / (V_i^{[k]})^2, \tag{I9}$$

$$i = 1, 2, \ldots, 2N \;; \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$V_i^{[k]} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2N} \operatorname{sh} \frac{x_i^{[k]} - x_j^{[k]}}{2}\,, \qquad W_i^{[k]} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2N} \operatorname{coth} \frac{x_i^{[k]} - x_j^{[k]}}{2}\,,$$

а константы $C_{[k]}$ выбираются следующим образом:

$$C_{[k]} = [E_N(z)]^{-1} \prod_{j=1}^{2N} \operatorname{sh} \frac{z - x_j^{[k]}}{2}\,,$$

z – произвольное число, $E_N(z) \neq 0$.

Кубическая сходимость метода (I9) обоснована следующей теоремой:

<u>Теорема 2.5.3</u>. Пусть q – фиксированное число, $0 < q < 1$,

$$d = \min_{i \neq j} |x_i - x_j|\,, \qquad d_1 = \min_{i=1,\ldots,2N} |z - x_i|\,,$$

$$P = \max_{i \neq j} |x_i - x_j|\,, \qquad P_1 = \max_{i=1,\ldots,2N} |z - x_i|\,,$$

где $x_1, \ldots, x_{2N}$ – корни Э-полинома $E_N(x)$,

$$R = \max\left\{2\,|\operatorname{ch}(2P_1 + c)/4|\,,\; 2\,|\operatorname{ch}(2P + 3c)/4|\right\}, \quad L = \max(R/r, 1).$$

Пусть число с достаточно малое, чтобы $0<c<1$, $d-2c>0$ и $2^{4N}c^2(2^{4N+2}\tau^2L^2+N)\le\tau^2$. Пусть начальные приближения выбраны так, чтобы выполнялись неравенства (I8). Тогда для каждого $K=0,1,2,\dots$ выполняются и неравенства

$$|x_i^{[K]}-x_i|\le cq^{3^K}, \quad i=1,2,\dots,2N.$$

Во второй главе методы с квадратической скоростью сходимости обобщаются и на многократные корни. При этом существенно используются введенные в первой главе РРА, РРТ и РРЭ с кратными узлами. Приведем только обобщение метода для А-полинома $A_N(x)$ степени N, имеющего корни с кратностями $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ соответственно $(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=N)$:

$$x_i^{[K+1]}=x_i^{[K]}-\frac{1}{\alpha_i}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1}\frac{A_N^{(j)}(x_i^{[K]})}{j!(\alpha_i-1-j)!}\left[\frac{(x-x_i^{[K]})^{\alpha_i}}{\Omega_{n,A}^{[K]}(x)}\right]_{x=x_i^{[K]}}^{(\alpha_i-1-j)}, \tag{20}$$

$$i=1,2,\dots,n; \quad K=0,1,2,\dots,$$

где $$\Omega_{n,A}^{[K]}(x)=\prod_{\ell=1}^{n}(x-x_\ell^{[K]})^{\alpha_\ell}.$$

Квадратическая сходимость метода (20) доказана теоремой 2.6.I.

В § 2.8 на основе метода Обрешкова получены и обоснованы итерационные методы для одновременного нахождения всех нулей А-,Т-и Э-полиномов. А-метод этого типа известен как метод Эрлиха. Обоснование Т-и Э-методов проводится теоремами 2.8.I и 2.8.3 соответственно.

В § 2.9 разработано обобщение методов, имеющих квадратическую скорость сходимости. Этот метод предназначен для одновременного нахождения всех нулей произвольных кратностей $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ обобщенного полинома вида

$$P_N(x)=\varphi_N(x)+\sum_{j=0}^{N-1}a_j\varphi_j(x),$$

где $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{N}$ – произвольная чебышевская система. Итерационная формула имеет вид

$$x_i^{[K+1]}=x_i^{[K]}-(-1)^N P_N^{(\alpha_i-1)}(x_i^{[K]})\,/\,Q_{[K]}^{(\alpha_i)}(x_i^{[K]}), \tag{20'}$$

$$i=1,2,\dots,m; \quad K=0,1,2,\dots, \quad \sum_{j=1}^{m}\alpha_j=N.$$

Здесь $Q_{[K]}(x)$ – вспомогательный обобщенный многочлен по этой же чебышевской системе $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{N}$, который представлен в виде опре-

делителя. Квадратическая сходимость этого метода доказана теоремой 2.9.I.

В § 2.10 на основе метода Обрешкова получен и обоснован итерационный метод

$$x_i^{[K+1]}=x_i^{[K]}-P_N^{(\alpha_i-1)}(x_i^{[K]})\left[P_N^{(\alpha_i)}(x_i^{[K]})-\frac{1}{2}P_N^{(\alpha_i-1)}(x_i^{[K]})\,Q_{[K]}^{(\alpha_i+1)}(x_i^{[K]})/Q_{[K]}^{(\alpha_i)}(x_i^{[K]})\right]^{-1}, \tag{20''}$$

$$i=1,2,\dots,m; \quad K=0,1,2,\dots,$$

где кратности $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ нулей $P_N(x)$ – произвольные, $\sum_{j=1}^{m}\alpha_j=N$. Вспомогательный полином $Q_{[K]}(x)$ имеет тот же самый вид, как и в методе (20'). Метод (20'') приложим к полиномам типа

$$P_N(x)=\sum_{j=1}^{N}a_j\varphi_j(x) \tag{20'''}$$

и по своей вычислительной трудоемкости соизмерим с методом (20'), но зато имеет более высокую (кубическую) скорость сходимости. Кубическая сходимость метода (20'') установлена теоремой 2.10.2. Сформулируем ее в частном случае, когда $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_N=1$.

<u>Теорема 2.10.2</u>. Пусть полином (20''') имеет простые корни $x_1,x_2,\dots,x_N$. Пусть числа C и $q\in(0,1)$ и

$$L(c)=\min_{i=\overline{1,N}}\ \inf_{|y_j-x_j|\le cq}\left|\begin{vmatrix}\varphi_0'(y_i) & \varphi_1'(y_i) & \dots\varphi_N'(y_i)\\ \varphi_0(y_1) & \varphi_1(y_1) & \dots\varphi_N(y_1)\\ \dots & \dots & \dots\\ \varphi_0(y_N) & \varphi_1(y_N) & \dots\varphi_N(y_N)\end{vmatrix}\right|.$$

Предполагаем, что система $\{\varphi_s(x)\}_{s=0}^{N}$ – чебышевская и состоит из достаточно гладких функций: $|\varphi_s^{(\ell)}(x)|\le M_{s\ell}$, $\ell=0,1,2,3$, $s=\overline{0,N}$. Если c выбрано достаточно малым, чтобы выполнялись неравенства

$$N(c)\overset{def}{=}L^2(c)-c\left(\sum_{\tau=0}^{N}|a_\tau|M_{s1}\right)\prod_{s=0}^{N}(M_{s2}^2+NM_{s0}^2)>0,$$

$$K(c)\overset{def}{=}c^2\left\{\prod_{s=0}^{N}(M_{s\tau}^2+M_{s1}^2+NM_{s0}^2)\right.\times$$

$$\times\Big[\Big(\sum_{r=0}^{N}|a_r|M_{S3}\Big)^2+\Big(\sum_{r=0}^{N}|a_r|M_{S2}\Big)^2+N\Big(\sum_{r=0}^{N}|a_r|M_{S1}\Big)\Big]\Big\}^{1/2}<N(c),$$

и если неравенства $|x_i^{[k]}-x_i|\le cq^{3^k}$, $i=\overline{1,N}$, выполняются при $k=0$, то они выполняются и при каждом целом $k>0$.

В § 2.II на основе непрерывных аналогов исследуемых методов получены рекомендации о выборе начальных приближений при использовании соответствующих дискретных методов.

в § 2.I2 рассматривается вопрос об определении кратностей нулей полиномов. В частности, приводится оригинальный, точный, эффективный метод для определения кратностей нулей алгебраических полиномов с действительными коэффициентами, при котором используется только информация о коэффициентах полинома. Вопрос сводится к решению целочисленной треугольной системы линейных алгебраических уравнений.

В третьей главе " Аппроксиманты Падэ по системам Чебышева" рассматриваются нелинейные приближения к данной функции в виде отношения двух обобщенных полиномов по чебышевским системам. Здесь вводятся тригонометрические АП и показано, что они представляют более хороший аппарат приближения функции по сравнению с частичными суммами ее ряда Фурье, так как эффект Гиббса у них как дефект приближения на порядок ниже, чем у ряда Фурье.

Если периодическая функция $f(x)$ задана Т-рядом (это может быть и ее ряд Фурье)

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\sin nx+\beta_n\cos nx), \qquad (21)$$

то строятся АП вида

$$P_T(M,N,x;f)=\frac{\frac{b_0}{2}+\sum_{m=1}^{M}(a_m\sin mx+b_m\cos mx)}{\frac{d_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(c_n\sin nx+d_n\cos nx)}\equiv\frac{V_M}{U_N}. \qquad (22)$$

Коэффициенты Т-полиномов V_M и U_N определяются из условия

$$\Big[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{2N+M}(\alpha_n\sin nx+\beta_n\cos nx)\Big]U_N-V_M=\sum_{k=M+N+1}^{\infty}(\alpha'_k\sin kx+\beta'_k\cos kx). \qquad (23)$$

Условие (23) дает линейную систему алгебраических уравнений для коэффициентов полиномов U_N и V_M. Особый интерес представляют самые употребляемые АП, когда $M=N$. Эти АП названы диагональными. В этом случае выявлена блочная структура матрицы системы, порожденной равенством (23). Составлен экономичный алгоритм вычисления коэффициентов U_N и V_M в (22) через коэффициенты ряда (21).

§ 3.4 посвящен исследованию эффекта Гиббса для тригонометрических АП. Здесь для функции - скачка удалось получить диагональные АП в аналитическом виде. Дальнейшее исследование было возможно численно с использованием итерационных МОНВН Т-полиномов. Показано, что полюсы аппроксиманты $P_T(N,N,x;\,sign)$ – комплексные числа и что эффект Гиббса у диагональных АП меньше 2%. Хорошо известно, что у частичных сумм ряда Фурье для разрывных функций эффект Гиббса 18%.

В четвертой главе "Многошаговые методы для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, основанные на интерполяции полиномами по чебышевским системам", с использованием обобщенных интерполяционных полиномов по А-,Т-, и Э-системам получены новые эффективные методы и алгоритмы для решения задачи (I), и следовательно и для систем дифференциальных уравнений первого порядка в канонической форме. Особый интерес для практики представляют алгоритмы комбинированного применения многошаговых методов, полученных при помощи интерполяции правой части уравнения (I) А-,Т-и Э-полиномами. В четвертой главе построены трехшаговые аналоги методов Адамса и Штермера и пятишаговые методы Адамса. Выясним на примере пятишаговых методов Адамса идею построения алгоритмов комбинированного применения А-,Т-и Э-методов. Итак, имеем 3 формулы типа А, Т и Э:

$$y_{i+1}=y_i+h\varphi_A+O(h^6), \qquad (24)$$

$$y_{i+1}=y_i+h\varphi_T+O(h^6), \qquad (25)$$

$$y_{i+1}=y_i+h\varphi_Э+O(h^6), \qquad (26)$$

где φ_A, φ_T и $\varphi_Э$- линейные функции по отношению к аргументам $y'_i,\dots,y'_{i-3}$ и y'_{i-4}. Коэффициенты функции φ_A – константы, а коэффициенты в выражениях φ_T и $\varphi_Э$ являются тригонометрическими и гиперболическими функциями шага h соответственно.

Алгоритм АТЭ-I состоит в том, что по точкам $x_{i-5},\dots x_{i-2}$ и x_{i-1} строятся интерполяционные полиномы типа А,Т и Э для функции $y'(x)$, и их значения в точке x_i сравниваются по абсолютной величине с y'_i. Тогда на каждом шаге интегрирования (I) применяется одна из формул (24),(25) или (26) в зависимости от того, какой тип интерполяционного полинома дает самую малую погрешность в точке x_i.

Идея алгоритма АТЭ-2 состоит в следующем. Если умножим обе части (24)-(26) соответственно на $z_\alpha\ge 0$, $z_\tau\ge 0$ и $z_\varepsilon\ge 0$,

$z_\alpha + z_\tau + z_\varepsilon = 1$, то получим "выпуклый" класс формул

$$y_{i+1} = y_i + h(z_\alpha \varphi_A + z_\tau \varphi_T + z_\varepsilon \varphi_Э) + O(h^c). \qquad (27)$$

Если через α, τ и ε обозначим уклонения интерполяционных полиномов $A_4(x;y')$, $T_2(x;y')$ и $E_2(x;y')$, построенных по узлам $x_{i-s}, \ldots, x_{i-1}$, в точке x_i от значения y'_i соответственно, то расчетные коэффициенты z^*_α, z^*_τ и z^*_ε в (27) выбираются из условия

$$L(z^*_\alpha, z^*_\tau, z^*_\varepsilon) = \inf_{\substack{z_\alpha \geq 0,\, z_\tau \geq 0,\, z_\varepsilon \geq 0,\\ z_\alpha + z_\tau + z_\varepsilon = 1,}} L(z_\alpha, z_\tau, z_\varepsilon), \qquad (28)$$

где

$$L(z_\alpha, z_\tau, z_\varepsilon) = |\alpha z_\alpha + \tau z_\tau + \varepsilon z_\varepsilon|. \qquad (29)$$

Задача (28)-(29) является задачей линейного программирования и решается точно. Эффективность алгоритмов АТЭ-I и АТЭ-2 продемонстрирована на ряде тестовых задач.

Вторая часть "Математическое моделирование и численное исследование релятивистских пучков заряженных частиц" посвящена постановке и решению задач А,Б и В с использованием численных методов, разработанных в первой части диссертации.

В пятой главе "Математическая модель стационарного самосогласованного пучка релятивистских электронов и ее численное исследование" рассматривается задача А.

Внешними параметрами этой модели, известной как модель самосогласованного пучка Яркового, являются: величины, определяющие геометрию камеры, расположение витков в ней, величина тока в витках, а также константы H_0 и M_0 интегралов движения.

Внутренние параметры, т.е. параметры, получаемые после нахождения самосогласованного решения,- это величины, определяющие форму, размеры и расположение области Ω внутри G, а также распределение плотности электронов и тока.

В § 5.I приведена постановка задачи А. Введены все уравнения модели и выявлены ее параметры.

В § 5.2 рассмотрен вопрос о задании внешнего магнитного поля, удерживающего электронный пучок. Ради простоты принято, что внешнее магнитное поле создается двумя симметрично расположенными относительно плоскости $z=0$ витками радиуса R, на расстоянии $2Z$

друг от друга. Источниками внешнего магнитного поля являются токи $j^{(0)}_{\theta_{1,2}} = RI\,\delta(r-R)\delta(z \pm Z)/r$, где I - полный ток в витке, δ - дельта-функция Дирака. Нахождение внешнего магнитного поля $A^{(0)}_\theta(r,z)$ сводится к решению уравнения

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{A}^{(0)} = -\frac{4\pi}{c}\left(j^{(0)}_{\theta_1} + j^{(0)}_{\theta_2}\right)$$

с граничными условиями (7). Последняя задача решается точно, и решение представлено как двойной ряд по Т- и Б-системам.

В § 5.3 уравнения движения заряженных частиц в электрическом и магнитных полях, определяемых скалярным (электростатическим) потенциалом φ и векторным потенциалом $\bar{A}$ самосогласованного пучка релятивистских электронов, преобразуются к виду, удобному для численного интегрирования. С помощью интегралов движения записывается соотношение

$$\frac{1}{c^2}(H_0 - e\varphi)^2\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \Phi(\varphi, A). \qquad (30)$$

Оно представляет связь между уравнениями Ньютона-Лоренца и рассматриваемой нами моделью пучка. Соотношение (30) используется и в качестве контроля точности интегрирования системы.

В § 5.4 для решения уравнений (2) и (3) применяется метод Бубнова-Галеркина. Выбраны следующие Т-системы координатных функций

$$\varphi_{kl} = \cos\frac{k\pi r}{2a}\cos\frac{l\pi z}{2b}, \qquad \psi_{ij} = \sin\frac{i\pi r}{a}\cos\frac{j\pi z}{2b}, \qquad (31)$$

$$k, l, j = 1, 3, 5, \ldots, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots.$$

Эти две системы полны с учетом симметрии задачи по z и с учетом граничных условий (7) и (8) соответственно. Получены также линейные системы алгебраических уравнений для коэффициентов разложения φ и $A^{(c)}_\theta$ по системам (3I).

В § 5.5 предложено решать задачу об определении области Ω методом последовательных приближений, а в § 5.6 - путем введения непрерывного параметра.

В § 5.7 описан способ аппроксимации границы Γ области Ω. Из уравнений (2) и (3) и граничных условий (7) и (8) следует, что сечение пучка является симметричной относительно оси Or областью в плоскости (r, z). Из физических соображений следует, что сечение пучка - выпуклая и ограниченная область. При решении соответствующих краевых задач для нахождения скалярного и векторного потенциалов, применяя метод Галеркина, необходимо вычислить большое количество двойных интегралов по области Ω. На основе указанных выше соображений о симметричности, выпуклости и ограниченности искомой области Ω, ее граница приближенно представляется в виде замкнутой и симметричной по z ломаной линии. В этом случае двойные интегралы по этой области вычисляются аналитически. Предложенный нами способ аппроксимации является некоторой модификацией метода наименьших квадратов и приводит к решению системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной симметричной матрицей.

В § 5.8 исследуются характеристики внешнего магнитного поля. "Ямой" магнитного поля называем симметричную относительно оси Or область Ω_0 внутри прямоугольника G, для которой

I. $\Phi(r,z) \geqslant 0$ при $(r,z) \in \Omega_0$;

2. на отрезке оси Or, заключенном внутри области Ω_0, выполняется $0 < n(r,0) < 1$, где $n(r,z)$ - показатель спада магнитного поля. Положение "ямы" меняется в зависимости от внешних параметров модели. Было проведено численное исследование этой зависимости. Начальные приближения в итерационных процессах для согласования поперечного сечения пучка задавались в районе "ямы" внешнего магнитного поля.

В § 5.9 приведен ряд самосогласованных решений задачи А. В некоторых случаях согласование области проводилось методом последовательных приближений и методом введения непрерывного параметра с целью сравнения результатов. Они оказались одинаковыми.

В § 5.I0 приведены результаты численного исследования бетатронных колебаний частиц в пучке. Интегрирование соответствующих дифференциальных уравнений трудоемко. В них участвуют поля, порожденные потенциалами $\varphi^{(c)}$ и $A^{(c)}$, которые найдены как двойные Т-полиномы, а функция $A^{(0)}$ выражена через функции Бесселя. Поэтому исследование бетатронных колебаний при больших временах невозможно сделать методом Рунге-Кутта за разумное время и на самой быстродействующей ЭВМ в ОИЯИ. Здесь был применен с успехом разработанный в § 4.4 алгоритм АТЭ-I, который сохраняет высокую точность расчета, уменьшает значительно время расчета и, кроме того, автоматически учитывает колебательный характер движения частиц.

в § 5.II задача А представлена в операторной форме и показано, что кривую Γ (границу сечения пучка) необходимо находить из функционального уравнения

$$\Phi(F[\Gamma]) = 0, \qquad (32)$$

где F - некоторый функционал. Известно, что эта задача относится к классу обратных и является некорректной. В общем случае эту задачу надо решать методом регуляризации, развитым А.Н.Тихоновым и его учениками. В § 5.8 было проведено детальное исследование математической модели,и таким образом резко ограничилось семейство возможных решений для границы Γ. Полученные ограничения были учтены в алгоритме. Численные результаты оказались устойчивыми. Это одна из причин детального исследования "ямы" внешнего магнитного поля.

В § 5.I2 дано краткое описание комплекса программ на Фортране MODEL1 для вычисления параметров стационарного состояния электронного пучка.

В шестой главе "Моделирование и численное исследование процесса образования фронта ионизации при инжекции релятивистского электронного пучка в камеру с газом" решается задача Б. Здесь проводится полуаналитическое (с использованием функции Грина для электрического поля) и получисленное (создана программа для решения на ЭВМ уравнений движения крупных частиц) рассмотрение взаимодействия пучка электронов с остаточным газом в ограниченной цилиндрической камере.

В § 6.I построена математическая модель процессов внутри дрейфовой камеры на основе "самосогласованного" квазистатического приближения. В таком приближении обычно принимают, что движение частиц электронного пучка определяется лишь электрическим полем, зависящим, в свою очередь, от расположения самих частиц в данный момент времени. Таким образом, уравнения движения частиц решаются совместно с уравнением Пуассона для потенциала. Правая часть уравнения Пуассона в каждый момент времени находится как плотность заряда в получившемся распределении частиц.

Инжектируемый в камеру релятивистский пучок моделируется в виде последовательности сгустков (крупных частиц, имеющих форму бесконечно тонких дисков определенного радиуса с постоянной плотностью заряда, запускаемых в камеру сквозь торцевую стенку через равные промежутки времени с постоянной скоростью). Уравнение для потенциала φ в случае, когда внутри камеры вакуум, имеет вид

$$\Delta\varphi = -4\pi \sum_j \rho_j , \qquad (33)$$

где ρ_j - заряд сгустка с номером j, $j = $ I,2,... . Суммирование в (33) распространено по тем j, для которых соответствующие частицы в рассматриваемый момент времени находятся внутри камеры. Если до инжекции в камере находился нейтральный газ, то необходимо учитывать его ионизацию пучком,и в (33) должен быть добавлен вклад от плотности заряда, обусловленный возникающими ионами. Для расчета плотности образующихся при ионизации ионов обычно используют уравнение

$$\partial n_i / \partial t = n_g \sigma(V) \, |V| \, n_e , \qquad (34)$$

где n_g - плотность нейтрального газа, $\sigma(V)$ - сечение ионизации, n_e - плотность электронов в пучке, V - относительная скорость электронов и молекул газа. Для упрощения учета резонансного вклада в сечение ионизации $\sigma(V)$ считается кусочно- постоянной функцией V:

$$\sigma(V) = \begin{cases} \sigma_1 & 0 < |V| < V_s , \\ \sigma_2 & |V| \geqslant V_s , \end{cases} \qquad (35)$$

σ_1, σ_2 и V_S - константы. Таким образом, удается проинтегрировать (34) точно и получить выражение для плотности ионов $n_i(t, r, z)$.

Итак, при учете ионизации, производимой пучком, следует вместо (33) решать (I0) при граничном условии (II). Решение задачи (I0)-(II) находим как разложение по собственным функциям области, соответствующей внутренности камеры. Эти функции по r и z являются чебышевскими системами соответственно типа Б и Т.

К уравнениям (I2) добавляются уравнения движения некоторого количества "пробных ионов", которые тоже представляются в виде частиц-дисков.

В § 6.2 обсуждаются вопросы программной реализации модели и приводится краткое описание комплекса программ MODEL2. При программной реализации модели функция $f(V) = sign(V) \cdot \sigma(V)$ аппроксимируется частичной суммой ее ряда Фурье

$$f(V) = \frac{2}{\pi} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K} \left[(\sigma_2 - \sigma_1) \cos \frac{K\pi V_s}{c} + \sigma_1 - \sigma_2 (-1)^K \right] \sin \frac{K\pi V}{c} ,$$

и из нее строится тригонометрическая АП. В случае, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, функция $f(V)$ обращается в функцию $\sigma \cdot sign(V)$, и для нее используется точное выражение диагональной АП пятого порядка.

Далее, в § 6.3 обсуждаются результаты счета на ЭВМ с физической точки зрения. Рассчитывались различные варианты: инжекция пучка в вакуумную камеру, инжекция пучка в камеру с газом. Дополнительно прослеживалось движение некоторого числа пробных ионов.

В седьмой главе "Моделирование переходных процессов в возбужденный резонатор" рассматривается задача В. Здесь проводится математическое изучение трансформации высокочастотного поля, возбужденного в резонаторе сторонним генератором при влете в резонатор релятивистского электронного пучка.

В § 7.I рассматривается взаимодействие электронного пучка с возбужденным в резонаторе полем. Пучок, как и в шестой главе, имитируется системой сгустков - дисков определенного радиуса. Радиальную степень свободы считаем "замороженной". Сгустки взаимодействуют между собой и с изображениями в стенках резонатора квазистатически, а

также через вихревые поля. Кроме того, на их движение оказывает действие поле, заранее возбужденное в резонаторе.

Полная система дифференциальных уравнений состоит из (I3) и (I4).

В § 7.2 рассмотрены вопросы реализации комплекса программ MODEL3. Так как число уравнений в системе (I4) переменное, то (I4) интегрировалось одношаговым методом. Число уравнений в (I3) постоянное, и правые части (I3) хорошо аппроксимируются Т-полиномами. Поэтому интегрирование (I3) проводилось следующим образом. Для проведения первых трех шагов был использован метод Рунге-Кутта, а дальнейшее интегрирование проводилось алгоритмом АТЭ-I. Здесь укажем только на то, что типичное соотношение чисел использования А-,Т- и Э-методов в алгоритме АТЭ-I во всех проделанных нами расчетах для системы (I3) следующее: А : Т : Э = I:30:8. Это соотношение и проделанные нами тесты, в которых известно точное решение, показывают, что в наших расчетах интегрирование (I3) проводилось с погрешностью, не превышающей 10^{-6}.

В § 7.3 проводится обсуждение результатов решения задачи В с физической точки зрения.

В заключении формулируются основные результаты представленных в диссертации исследований.

Ш. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

I. На основе обобщенных полиномов по чебышевским системам и введенных нами разделенных разностей тригонометрического и экспоненциального типа получены новые результаты в теории интерполирования. Тригонометрический и экспоненциальный интерполяционные полиномы записаны в ньютоновской форме, и получены оценки их погрешностей. Получено унифицированное представление ряда классических интерполяционных полиномов с помощью обобщенных разделенных разностей.

2. Разработан и обоснован ряд новых методов для одновременного нахождения всех нулей обобщенных полиномов, которые имеют более широкую область сходимости, чем методы для индивидуального поиска нулей.

3. Предложены впервые тригонометрические аппроксиманты Падэ, и показано, что у них эффект Гиббса на порядок ниже, чем у соответствующих частичных сумм ряда Фурье.

4. С помощью тригонометрических и экспоненциальных интерполяционных полиномов расширен арсенал многошаговых методов для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, и построены алгоритмы для их комбинированного применения.

5. Созданы три комплекса алгоритмов и программ для ЭВМ, позволяющие решать задачи А,Б и В. Полученные на ЭВМ результаты представляют физический интерес.

6. Развитыми в диссертации методами удалось численно исследовать указанные выше модели стационарного самосогласованного пучка релятивистских электронов, процесса образования фронта ионизации при инжекции релятивистского пучка в камеру с газом, взаимодействия мод резонатора через инжектируемый в него релятивистский электронный пучок с достаточно хорошей точностью за приемлемое машинное время, несмотря на их большую сложность.

7. Все разработанные численные методы в первой части диссертации имеют и самостоятельный теоретический и прикладной интерес.

8. Предложенная методика является основой для разработки новых численных методов решения нелинейных задач математической физики.

Литература, отражающая содержание диссертации:

I. Семерджиев Х. Исследование магнитной "ямы", создаваемой двумя витками тока, находящимися внутри цилиндрической камеры. ОИЯИ, 5-8437, Дубна, 1974,-16 с.

2. Семерджиев Х. Аппроксимации Падэ для функций, заданных тригонометрическими рядами. Научн.труды Пловдивского ун-та, т.13, № 1, Математика, 1975, с.409-420.

3. Семерджиев Х. Тригонометрические аппроксиманты Падэ и эффект Гиббса. ОИЯИ, Р5-12484, Дубна, 1979,-10 с.

4. Семерджиев Х. Численно изследване на бетатронните колебания на релативистични електрони, формиращи стационарен самосъгласуван тороидален сноп. Научн. труд. на ПУ, т.13, № 1, 1975 - математика, с. 421-432.

5. Семерджиев Х. Методы одновременного приближенного нахождения всех корней данного алгебраического уравнения. ОИЯИ, Р5-12485, Дубна, 1979,-8 с.

6. Жидков Е.П., Илиев И.П., Рубин С.Б., Семерджиев Х. К расчету параметров стационарного самосогласованного пучка релятивистских электронов. ОИЯИ, Р5-7394, Дубна, 1973,-24 с.

7. Жидков Е.П., Семерджиев Х. Программа для расчета параметров стационарного самосогласованного пучка релятивистских электронов. ОИЯИ, Р11-8356, Дубна, 1974,-15 с.

8. Семерджиев Х., Макрелов И. Върху един числен алгоритъм за намиране на самосъгласувани решения на една гранична задача. В сб. "Доклади на XII научна семия на ПУ". Пловдив, 1976, с.27-28.

9. Семерджиев Х. Интерполяционные полиномы тригонометрического и экспоненциального типа в ньютоновской форме. ОИЯИ, Р11-82-856, Дубна, 1982,-6 с.

10. Жидков Е.П.,Семерджиев Х.Трехшаговые методы для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, основанные на тригонометрических и экспоненциальных интерполяционных полиномах. ОИЯИ, Р11-82-857, Дубна, 1982,-10 с.

11. Доля С.Н., Жидков Е.П., Рубин С.Б., Семерджиев Х. Моделирование процесса образования фронта ионизации при инжекции релятивистского электронного пучка в камеру с газом. ОИЯИ, Р11-82-230, Дубна, 1982,-15 с.

12. Семерджиев Х. Метод для одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения, если заданы их кратности. Докл. БАН, т.35, № 8, 1982, с.1057-1060.

13. Семерджиев Х. Программная реализация математической модели процесса образования фронта ионизации при инжекции релятивистского электронного пучка в камеру с газом. ОИЯИ, 11-82-739, Дубна, 1982, -15 с.

14. Ангелова Е.Д., Семерджиев Х. Методы одновременного приближенного нахождения корней алгебраических, тригонометрических и экспоненциальных уравнений. Журнал вычисл.мат. и мат. физ., т.22, № 1, 1982, с.218-223.

15. Жидков Е.П., Семерджиев Х. Многошаговые методы типа метода Адамса, основанные на алгебраической, тригонометрической и экспоненциальной интерполяции. В сб. Труды У международного совещания по "Проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач". (У международное совещание... Дубна, 20.09-23.09.1983). ОИЯИ, Д10,11-84-818, Дубна, 1985, с.198-200.

16. Жидков Е.П., Макрелов И., Семерджиев Х. Два метода для одновременного нахождения всех корней экспоненциальных уравнений. ОИЯИ, Р11-83-764, Дубна, 1983,-10 с.

17. Макрелов И., Семерджиев Х. Методы одновременного нахождения всех корней алгебраических, тригонометрических и экспоненциальных уравнений. Журнал вычисл. мат. и мат.физ., т.24, № 10, 1984, с.1443-1453.

18. Жидков Е.П., Семерджиев Х. Пятишаговые методы типа метода Адамса, основанные на интерполяции алгебраическими, тригонометрическими и экспоненциальными полиномами. ОИЯИ, Р11-83-763, Дубна, 1983,-10 с.

19. Доля С.Н., Жидков Е.П., Рубин С.Б., Семерджиев Х. Моделирование переходных процессов при инжекции релятивистского электронного пучка в возбужденный резонатор. ОИЯИ, Б1-9-84-175, Дубна,1984, 32 с.

20. Семерджиев Х. Общий интерполяционный полином с разделенными разностями. Докл. БАН, т.38, № 12, 1985, с.1617-1620.

21. Макрелов И., Семерджиев Х. О двух аналогах метода Эрлиха для одновременного нахождения всех нулей тригонометрических и экспоненциальных полиномов. Докл. БАН, т.36, № 7, 1983, с.879-882.

22. Макрелов И., Семерджиев Х. Метод Дочева для обобщенного полинома по произвольной чебышевской системе. Докл.БАН, т.38, № 10, 1985, с.1323-1326.

23. Семерджиев Х., Тамбуров С. Метод для определения всех нулей обобщенного полинома по произвольной чебышевской системе. ОИЯИ, Р11-85-931, Дубна, 1985,-8 с.

24. Семерджиев Х., Тамбуров С. Об одном методе определения кратностей нулей алгебраических полиномов. Докл.БАН, т.37, № 9, 1984, с.1143-1145.

25. Макрелов И., Семерджиев Х., Тамбуров С. Метод для одновременного нахождения всех нулей данного обобщенного полинома по чебышевской системе. ОИЯИ, Р11-85-932, Дубна, 1985,-8 с.

26. Makrelov I., Semerdzhiev Kh . On the convergence of two methods for the simultaneons finding of all roots of exponential equations, IMA Journal of Numer. Anal., v.5, No.2, 1985, p. 191-200.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 апреля 1986 года.