ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

УДК 519.632.4
11-85-216

АЙРЯН
Эдик Арташович

ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЕТОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАГНИТОСТАТИКИ

Специальность: 01.01.07 – вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1985

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

Научные руководители:

доктор физико-математических наук,
профессор — Е.П.ЖИДКОВ

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник — Б.Н.ХОРОМСКИЙ

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор — В.И.ДМИТРИЕВ

кандидат физико-математических наук,
доцент — В.С.БОНДАРЕНКО

Ведущее научно-исследовательское учреждение:

Вычислительный центр Сибирского отделения АН СССР, г. Новосибирск

Автореферат разослан "_____" _____________ 1985 г.

Защита диссертации состоится " " _____________ 1985 г. в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук — Иван — З.М.Иванченко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность

Современные достижения в области физики атомного ядра и элементарных частиц в значительной степени связаны с успешным развитием ускорительной техники.

При проектировании, создании и эксплуатации магнитных систем для ускорителей и других электрофизических установок возникает необходимость в изучении магнитостатических полей в этих установках. Решение задач оптимизации, т.е. выбора оптимальной конфигурации в данном устройстве при различных режимах его эксплуатации, имеет важное прикладное значение. Относительно длительный и трудоемкий процесс физического моделирования ограничивает возможности изучения различных вариантов. В связи с вышесказанным возрастает актуальность проведения вычислительных экспериментов, позволяющих исследовать картину магнитного поля значительно полнее, быстрее и дешевле. Успешное проведение вычислительного эксперимента при моделировании магнитостатических полей требует разработки эффективных методов численного решения краевых задач для линейных и квазилинейных уравнений в частных производных.

Существует три основных типа постановок задач магнитостатики [1-3], которые определяются характером уравнений, используемых для описания магнитостатического поля: дифференциальный, интегральный и смешанный. Диссертация посвящена развитию методов численного

[1] Н.И.Дойников. Постановка задач численного анализа полей нелинейных магнитных систем. НИИЭФА, Л., 1976.

[2] С.Б.Ворожцов. Методы расчета магнитостатических полей. Труды международной школы молодых ученых по проблемам ускорителей заряженных частиц. ОИЯИ, Д9-84-817, Дубна, 1984.

[3] В.П.Ильин. Численные методы решения задач электрооптики. - Новосибирск, "Наука", 1974.

решения магнитостатических задач в дифференциальной и смешанной постановках.

Одним из наиболее эффективных подходов, применяемых при численном решении краевых задач магнитостатики, является метод конечных разностей [4-6], позволяющий свести исходную краевую задачу к системе алгебраических уравнений (в общем случае нелинейных). Для многих практических задач этот метод приводит к необходимости решения систем алгебраических уравнений с большим количеством неизвестных. В этой связи актуальное значение в вычислительной математике имеют вопросы создания экономичных и удобных для практической реализации методов решения специальных систем линейных и квазилинейных уравнений [7-10]. Важными являются также вопросы анализа ошибок и повышения точности полученных приближенных решений [11]. Все это определяет актуальность вопросов, рассмотренных в диссертации.

Работы, положенные в основу диссертации, выполнены в соответствии с проблемно-тематическим планом научно-исследовательских работ Объединенного института ядерных исследований и Ереванского физического института.

---

[4] А.А.Самарский. Введение в теорию разностных схем. М.,"Наука", 1971.

[5] Г.И.Марчук. Методы вычислительной математики. М.,"Наука", 1977.

[6] А.А.Самарский, В.Б.Андреев. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.,"Наука", 1976.

[7] А.А.Самарский, Е.С.Николаев. Методы решения сеточных уравнений. М.,"Наука", 1978.

[8] А.А.Самарский, И.Е.Капорин, А.Б.Кучеров, Е.С.Николаев. Современные численные методы решения сеточных уравнений. В сб.: Алгоритмы и программы для решения некоторых задач физики. Вып. 4, KFKI-1983-21, Будапешт, 1983.

[9] Дж.Ортега, В.Рейнболдт. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М., "Мир", 1975.

[10] Г.И.Марчук, Ю.А.Кузнецов. Итерационные методы и квадратичные функционалы. – Новосибирск,"Наука", 1972.

[11] Г.И.Марчук, В.В.Шайдуров. Повышение точности разностных схем. М.,"Наука", 1979.

Цель работы

Диссертация посвящена разработке, исследованию и практическим приложениям эффективных вычислительных алгоритмов на последовательности сеток для решения разностных эллиптических краевых задач, возникающих при численном моделировании магнитостатических полей, что включает:

1. Разработку алгоритмов, ускоряющих сходимость итерационных процессов при решении разностных уравнений.

2. Исследование эффективности практического применения экстраполяции Ричардсона.

3. Исследование сходимости и численная реализация метода альтернирования по подобластям без налегания для учета краевых условий на бесконечности.

4. Создание комплекса программ для решения конкретных прикладных задач.

Научная новизна

Предложен алгоритм ускорения сходимости итерационных процессов на последовательности сеток, учитывающий разложение погрешности разностных решений по степеням шага дискретизации. Исследованы свойства коэффициентов в разложении погрешности разностных решений двумерного уравнения Пуассона по степеням шага сетки в областях, составленных из прямоугольников со сторонами параллельными осям координат. Исследован итерационный процесс альтернирования по подобластям без налегания для одного класса эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. Доказаны теоремы, устанавливающие, что скорость сходимости итераций оценивается геометрической прогрессией со знаменателем пропорциональным отношению предельных значений коэффициента уравнения на линии разрыва. Показано, что скорость сходимости итераций не зависит от шага дискретизации исходного уравнения.

Практическая ценность

На основе предложенных в диссертации алгоритмов создан комплекс программ GRIDS, предназначенный для выполнения расчетов характеристик поля дипольных и квадрупольных магнитов, имеющих ступенчатую конфигурацию. Приведены результаты численных экспериментов по изучению распределения магнитного поля в ряде магнитных систем с учетом нелинейных эффектов, связанных с насыщением железного сердечника при полях до 3 т. Получены важные характеристики полей дипольных и квадрупольных магнитов, необходимые для анализа динамики пучка. Приведены зависимости амплитуд гармоник магнитного поля от величины рабочего тока в СП обмотке. Используя метод решения прямых задач,решались обратные задачи определения оптимальных конфигураций дипольных магнитов и квадрупольных линз. Выполненные расчеты позволяют моделировать с высокой точностью двумерное магнитное поле в СП диполях и СП квадруполях, которые являются структурными магнитными элементами СП синхротрона-инжектора на энергию I,5 ГэВ по протонам [I2] и СП ускорителя нуклотрона релятивистских ядер на энергию I3 ГэВ, создаваемых в ЛВЭ ОИЯИ. Методы, разработанные в диссертации для решения задач магнитостатики, имеют самостоятельный интерес и могут быть применены при численном решении различных краевых задач математической физики и ускорительной техники, сводящихся к дифференциальным уравнениям эллиптического типа.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на У Международном совещании по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач (Дубна, I983 г.), на Международной конференции по численным методам и приложениям (София, I984 г.), на Международном конгрессе математиков (Варшава, I983 г.), на Всесоюзном семинаре по расчету электронно-оптических систем (Винница, I982 г., Ленинград I985 г.), на Школе по численным методам математической физики (Львов, I983 г.), а также на научных семинарах ЕрФИ, ЛВТА и ЛВЭ ОИЯИ.

Публикации

По материалам диссертации опубликовано 6 работ, в том числе в журнале Comp.Phys. Comm. , в трудах совещаний и в сообщениях ОИЯИ.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и содержит II0 страниц машинописного текста, 37 таблиц, 32 рисунка и список литературы из I2I наименования.

[I2] И.А.Шелаев, И.П.Юдин. ОИЯИ, 9-I2346, Дубна, I979.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается краткий обзор по проблемам математического моделирования задач магнитостатики и проблемам многосеточной организации расчетов в задачах математической физики. Рассмотрены вопросы применения численных алгоритмов на последовательности сеток при решении разностных уравнений, аппроксимирующих краевую задачу:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=J(x,y)\,,\quad x,y\in\Omega \qquad (I)$$

$$\ell u=g\,,\quad x,y\in\Gamma\,,\quad \Gamma=\partial\Omega\,,\quad \mu=\mu(|\mathrm{grad}\,u|)$$

для определения z-овой компоненты векторного потенциала $\vec{A}$, где $\vec{B}=\mathrm{rot}\,\vec{A}$. Задача (I) получается из системы уравнений Максвелла $\mathrm{rot}\,\vec{H}=\vec{J}$, $\mathrm{div}\,\vec{B}=0$, $\vec{B}=\mu\vec{H}$ в предположении, что $A_z=U(x,y)$, $A_x=A_y=0$, $J_z=J(x,y)$, $J_x=J_y=0$. Здесь $\vec{H}$ - напряженность, $\vec{B}$ - индукция магнитного поля, $\vec{J}$ - вектор плотности тока, μ - магнитная проницаемость. Приводится обзор литературы по вопросам, рассмотренным в диссертации. Дано описание структуры диссертации и перечень основных результатов.

Первая глава посвящена анализу эффективности экстраполяции Ричардсона, используемой для повышения точности приближенных решений краевых задач для линейного и квазилинейного уравнений Пуассона.

В §I.I приводятся условия существования разложения погрешности приближенных решений по степеням шага дискретизации для нелинейного операторного уравнения [I3] . Рассмотрено следствие, относящееся к случаю монотонных операторов. Это следствие позволяет получить известное [I4] разложение приближенных решений для краевой задачи (I) при выполнении условия

$\nu(p^2)p^2+\nu(q^2)q^2-\left(\nu(p^2)+\nu(q^2)\right)pq\geq C_0|p-q|^2$, где $C_0>0$, $\nu=\frac{1}{\mu}$,
$p=(p_1,p_2)$, $q=(q_1,q_2)$, $pq=p_1q_1+p_2q_2$ для произвольных p и q .

В §I.2 исследуются разложения по степеням шага сетки решений двумерного уравнения Пуассона для пятиточечной разностной схемы в ступенчатых областях.

Пусть G - область в плоскости Ox_1x_2 ,составленная из прямоугольников со сторонами параллельными осям координат, а Γ -

граница G, $\bar{G} = G \cup \Gamma$, $n(\xi)$ – внутренняя нормаль к Γ в точке $\xi \in \Gamma$.

Рассмотрим задачу

$$\Delta u = f(x), \; x = (x_1, x_2) \in G; \quad P^m u = g, \; x \in \Gamma^m, \; m = 0, 1, 2. \quad (2)$$

Здесь $P^0 = \frac{\partial}{\partial n}$, $P^1 = E$, E – единичный оператор, $P^2 = \frac{\partial}{\partial n} - \sigma E$, $\sigma > 0$; Γ^m, $m = 0$, I, 2 – части границы $\Gamma = \Gamma^0 \cup \Gamma^1 \cup \Gamma^2$, на которых заданы краевые условия Неймана (Γ^0), Дирихле (Γ^1) и смешанные (Γ^2), $\Gamma^1 \neq \emptyset$. Функция $f(x) \in W_2^K(\bar{G})$, $K = 2L + 2$, $L \geq 1$, а $g \in C^M(\Gamma^i)$, $M \leq K$, где Γ^i – прямолинейные отрезки границы.

Разностную аппроксимацию задачи (2) запишем в виде

$$\Lambda_h u_h = \varphi(x), \; x \in \bar{\omega}; \; \varphi(x) = f, \; x \in \omega; \; \varphi = g, \; x \in \Gamma, \quad (3)$$

где Λ_h определен с помощью оператора

$$\Lambda_h u = \begin{cases} \Delta_h u \equiv u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2}, & x \in G, \\ P_h^m u, & x \in \Gamma^m, \; m = 0, 1, 2. \end{cases}$$

Для решений краевой задачи (3) получены априорные оценки.

Теорема I. [5] Пусть $u^* \in W^{K+2}(G)$, $P^1 u^* = g$, $x \in \Gamma$, тогда для решения u^h задачи (3) справедливо представление

$$u_h = P_h u^* + P_h \left(\sum_{i=1}^{L} a_i(x) h^{2i} \right) + \eta_h, \quad |\eta_h| < \nu_h, \quad (4)$$

в котором

$$a_i(x) = \alpha(u^*) r^{\lambda_1 - 2(i-1)} V(\varphi) + \sum_{j_1 j_2} r^{\mu_{j_1}} \ln^{q_{j_2}} r \, \theta_{j_1 j_2}(\varphi) + W_i, \quad (5)$$

[I3] Е.П.Жидков, Нгуен М., Б.Н.Хоромский. ОИЯИ, Р5-I2979, Дубна, I979.

[I4] А.Л.Урванцев, В.В.Шайдуров. Уточнение приближенного решения квазилинейного уравнения Пуассона. В сб.: Вариационно-разностные методы решения задач математической физики. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, I976.

где r – расстояние от угловой точки, α, $\theta_{j_1 j_2}$, W_i ограничены и не зависят от h, $W_i \in W_2^{K-2(i-1)}(G)$, $\mu_{j_1} > \lambda_1 - 2(i-1)$, а сеточная функция ν_h удовлетворяет уравнению

$$-\Delta_h \nu_h = \left(|V_h| + |d_h| \right)^{2L+2}, \quad x \in \omega,$$
$$P_h \nu_h = 0, \quad x \in \Gamma.$$

где функция V_h ограничена; $d_h = C r^{\lambda_1 - 2L}$. В окрестности угла $\varphi = \frac{\pi}{2}$ следует положить $\lambda_1 = 0$, $\alpha(u^*) = 0$.

Разложения (4), (5) имеют место без каких-либо условий согласования [I5]. Поэтому даже для достаточно гладких решении исходного уравнения в коэффициентах разложения (4), в худшем случае начиная со второго, возникают сингулярные составляющие в окрестности угловых точек, которые, как видно из (5), быстро затухают при удалении от углов. Оценки для мажорантных функций ν_h получаются при помощи численных экспериментов. Приводятся графики ν_h для углов $\frac{\pi}{2}$, π, $3\pi/2$ в случае гладких решений и решений, имеющих особенности в окрестности угла. Важно отметить, что функции ν_h убывают на несколько порядков при незначительном удалении от угловой точки.

В §I.3 с помощью численных экспериментов исследуется эффективность экстраполяции Ричардсона для решений различной гладкости, в том числе с точкой смены краевых условий при $\varphi = \pi$. Рассмотрены примеры решения двумерного и трехмерного квазилинейных уравнений.

Во второй главе рассматриваются вопросы ускорения сходимости итерационных процессов на последовательности сеток. Исследуется метод альтернирования по подобластям без налегания для одного класса эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами.

В §2.1 построен алгоритм ускорения сходимости итерационных процессов на последовательности сеток, учитывающий разложение погрешности разностного решения по степеням шага дискретизации.

Пусть в области Ω определения дифференциальной задачи

$$Au = f, \quad (6)$$

[I5] Е.А.Волков. Дифференциальные свойства решений краевых задач для уравнения Лапласа и Пуассона на прямоугольнике. – Труды МИАН СССР, М., I965, т. 77.

где A – нелинейный оператор, построена сетка Ω_h, и уравнению (6) поставлена в соответствие разностная схема

$$A_h U_h = f_h, \tag{7}$$

где U_h и f_h определены на Ω_h. Для решения уравнения (7) рассмотрим итерационный процесс

$$\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\tau} = -\psi(U_h^n); \quad \psi(U_h)=0, \text{ где } U_h=\lim_{n\to\infty} U_h^n \tag{8}$$

сходящийся к решению U_h со скоростью

$$\|U_h^n - U_h\| \le [q(h)]^n \, \|U_h^0 - U_h\|, \quad q<1.$$

Если q зависит от h, то, как правило,

$$q(h)\to 1;\ h\to 0, \quad q(h_1)<q(h_2), \quad h_2<h_1.$$

Пусть U^* и U^h есть решения задач (6) и (7) соответственно. Предположим, что справедливо асимптотическое разложение с ограниченными коэффициентами $C_k(x,y)$

$$U_h = U^* + \sum_{k=1}^{m-1} C_k(x,y)\, h^{\alpha_k} + O(h^{\alpha_m}), \quad x\in\Omega_h,\ \alpha_i<\alpha_{i+1},\ i=1,2,\dots,m.$$

Пусть на сетках Ω_{h_i}, $i=1,2,\dots,p$, $p=m$, получены решения U_{h_i} с одинаковой точностью $\varepsilon = O(h_{p+1}^{\alpha_m})$ для попарно различных шагов h_i. Тогда для вычисления решения $U_{h_{p+1}}$, $h_{p+1}<h_p$, на сетке $\Omega_{h_{p+1}}$ в качестве начального приближения для итерационного процесса берем комбинацию /I/

$$U^0_{h_{p+1}} = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i U_{h_i}, \quad x\in\Omega_{h_{p+1}}, \tag{9}$$

где U_{h_i} интерполируем на сетку $\Omega_{h_{p+1}}$ с точностью $O(h_{p+1}^{\alpha_m})$, а коэффициенты γ_i находим из системы уравнений

$$\begin{aligned} &\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_p=1\\ &\gamma_1 h_1^{\alpha_1}+\gamma_2 h_2^{\alpha_2}+\dots+\gamma_p h_p^{\alpha_1} = h_{p+1}^{\alpha_1}\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\gamma_1 h_1^{\alpha_m}+\gamma_2 h_2^{\alpha_m}+\dots+\gamma_p h_p^{\alpha_m} = h_{p+1}^{\alpha_m} \end{aligned} \tag{10}$$

при условии, что она разрешима.

Таким образом, с помощью (9) производится экстраполяция к решению $U_{h_{p+1}}$ разностной задачи на сетке $\Omega_{h_{p+1}}$, т.к.

$$U_{h_{p+1}} = U^0_{h_{p+1}} + O(h_1^{\alpha_m}), \quad x\in\Omega_{h_{p+1}}. \tag{11}$$

Несмотря на близость начального приближения $U^0_{h_{p+1}}$ к $U_{h_{p+1}}$, $U^0_{h_{p+1}}$ содержит погрешности, возникающие при интерполяции, однако для широкого класса эллиптических дифференциальных операторов эти погрешности быстро подавляются с помощью простых итераций в силу известных свойств гладкости собственных функций разностного оператора [16,17]. В §2.2 приведены результаты численных экспериментов, иллюстрирующие высокую эффективность предложенного метода при решении разностной задачи для уравнения Пуассона. Для ускорения сходимости итерационного процесса используем лишь две вспомогательные сетки. В этом случае $\gamma_1=-\frac{1}{4}$, $\gamma_2=\frac{5}{4}$, и формула (9) принимает вид ($\alpha_k=2k$):

$$U_{\frac{h}{4}} = \frac{5}{4}U_{h/2} - \frac{1}{4}U_h + O(h^4), \quad x,y\in\Omega_h. \tag{12}$$

Для трех сеток имеем

$$U_{\frac{h}{8}} = \frac{84}{64}U^{h/4} - \frac{21}{64}U^{h/2} + \frac{1}{64}U^h + O(h^6), \quad x,y\in\Omega_h.$$

В §2.3 исследуются вопросы сходимости итерационного процесса альтернирования по подобластям без налегания для одного класса эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами на всей плоскости, встречающихся в магнитостатике. Установлено, что скорость

[16] Р.П.Федоренко. УМН, 1973, т. 28, вып. 2, с. 121-182.
[17] Н.С.Бахвалов. ЖВМ и МФ, 1966, 6, № 5, с. 861-883.

сходимости итераций оценивается геометрической прогрессией со знаменателем, пропорциональным отношению предельных значений коэффициента уравнения на линии разрыва. Таким образом, эффективность итераций возрастает с увеличением этого отношения. Показано также, что скорость сходимости итерационного процесса не зависит от шага дискретизации исходного уравнения.

Пусть замкнутая кривая Γ класса C^2 без самопересечений разделяет плоскость R^2 на внутреннюю и внешнюю области Ω_I и Ω_e, так что $R^2 = \Omega_I \cup \Gamma \cup \Omega_e$. Требуется найти функции $z_i(x),\ i=1,2,\ x \in \Gamma$, удовлетворяющие уравнениям

$$
\begin{aligned}
&\Delta z_1(x) = f(x), \quad x \in \Omega_e, \quad z_1(\infty) = 0, \\
&\operatorname{div}\left(\nu(|\operatorname{grad} z_2|)\operatorname{grad} z_2\right) = 0, \quad x \in \Omega_I, \\
&z_1(x) = z_2(x), \quad x \in \Gamma, \\
&\nu(|\operatorname{grad} z_2|)\frac{\partial z_2}{\partial n} = \frac{\partial z_1}{\partial n}, \quad x \in \Gamma,
\end{aligned}
\tag{I3}
$$

функции $f(x)$ и $\nu(t)$ заданы и обладают требуемой гладкостью. Предлагаемый в диссертации метод альтернирования по подобластям без налегания Ω_I и Ω_e непосредственно применим для случая достаточно произвольной функции $\nu(t)$. Для исследования вопросов сходимости рассмотрен частный случай, когда $\nu(t) = \nu > 0$ есть постоянная величина.

Для решения задачи (I3) строится итерационный процесс

$$
\begin{aligned}
&(E-K)u_k + LV_{k+1} = 0, \\
&(E+K)u_{k+\frac{1}{2}} - \nu L V_{k+1} = \phi(x), \quad x \in \Gamma \\
&u_{k+1} = \eta u_k + (1-\eta)u_{k+\frac{1}{2}}, \quad 0 < \eta < 1,
\end{aligned}
\tag{I4}
$$

где u – след функции z_2 на Γ, $V = \frac{\partial z_2}{\partial n}$, $x \in \Gamma$
$\phi(x) = (E+K)z_0 - L\frac{\partial z_0}{\partial n}$, $z_0 = \int_{R^2} f(y)\ln r(x,y)\,dy$, $r(x,y) = |x-y|$, $\int_{R^2} f(y)\,dy = 0$. Здесь приближение u_k – задано, ищем V_{k+1} и u_{k+1}.

Интегральные операторы L и K имеют вид

$$
Ku = \int_\Gamma K(x,s)u(s)\,ds; \qquad LV = \int_\Gamma \mathcal{L}(x,s)V(s)\,ds,
$$

$$
K(x,s) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial n_s}\ln r^{-1}(x,s); \qquad \mathcal{L}(x,s) = \frac{1}{\pi}\ln r^{-1}(x,s); \quad x,s \in \Gamma.
$$

Этот процесс сводится к решению задачи Дирихле в области Ω_I и затем к решению внешней задачи Неймана в области Ω_e с последующей релаксацией.

Обозначим через g_0 – потенциал Робена, т.е. $(E-K^*)g_0 = 0$. Имеет место

Теорема 2 /3/. Пусть $Lg_0 \neq 0$, число $\lambda = (\nu+1)(\nu-1)^{-1}$ не является собственным значением оператора K, и выполнено условие

$$
\frac{2\nu}{1+\nu}\|K_1\| = q < 1, \qquad K_1 = (E+K)^{-1}K,
$$

тогда итерационный процесс (I4) сходится к единственному решению $u(x) = z_2(x),\ x \in \Gamma$ системы (I3) со скоростью $|u_k - u| \le q^k |u_0 - u|$, где u_0 – начальное приближение.

Рассмотрим второй возможный случай, когда функция $z_1(x)$ определена в области Ω_I, причем $f(x) = 0$, $x \in \Omega_I$, а $z_2(x)$ – определена в Ω_e.

В этом случае для решения задачи (I3) строится итерационный процесс

$$
\begin{aligned}
&(E+K)u_k - LV_{k+1} = 0, \\
&(E-K)u_{k+\frac{1}{2}} + \nu L V_{k+1} = \phi_1(x), \quad x \in \Gamma \\
&u_{k+1} = \eta u_k + (1-\eta)u_{k+\frac{1}{2}}, \quad 0 < \eta < 1,
\end{aligned}
\tag{I5}
$$

где $\phi_1(x) = (E-K)z_0 + L\frac{\partial z_0}{\partial n}$. Доказана следующая

Теорема 3 /3/. Пусть $Lg_0 \neq 0$, а число $\lambda = (1+\nu)(1-\nu)^{-1}$ не является собственным значением оператора K. Если выполнено условие

$$
\frac{2\nu}{1+\nu}\|K_2\| = q_1 < 1, \quad K_2 = (E-K)^{-1}K,
$$

где оператор $(E-K)^{-1}$ действует в подпространстве $(u, g_0)=0$, то итерационный процесс (I5) сходится к единственному решению $u(x)=z_1(x), x\in\Gamma$ системы (I3) со скоростью $|u_k-u|\le q_1^k|u_0-u|$.

В §2.4 рассматриваются вопросы численной реализации итерационного процесса разделения областей. Исследована зависимость скорости сходимости итераций от параметра η, и получены его оптимальные значения для различных конфигураций области Ω. Отметим, что максимальные значения величин q и q_1 из теорем 2,3 достигаются при $\nu = 1$.

Выбор оптимального параметра η осуществляется на самой грубой сетке и используется в дальнейшем на более мелких сетках в силу того, что скорость сходимости процесса слабо зависит от шага дискретизации. Приводятся результаты исследования скорости сходимости итераций для неодносвязанной области и в случае квазилинейного уравнения.

В третьей главе рассматриваются вопросы численного моделирования магнитостатических полей. Получены оптимальные по ряду характеристик конфигурации дипольных и квадрупольных магнитов для СП синхротрона на энергию I,5 ГэВ по протонам и СП ускорителя нуклотрона релятивистских ядер на энергию I3 ГэВ, создаваемых в ЛВЭ ОИЯИ.

В §3.I рассматриваются вопросы применения разработанных в диссертации алгоритмов при решении краевой задачи для нелинейного уравнения Пуассона, описывающего однокомпонентный векторный потенциал магнитного поля в неоднородной среде. Дано краткое описание комплекса программ GRIDS, реализующего численные алгоритмы на последовательности сеток для решения указанного класса задач. Приводятся примеры методических расчетов, иллюстрирующие эффективность программы по основным характеристикам. Комплекс реализован на ЭВМ БЭСМ-6, СДС-6500, ЕС-I060 (ЛВТА ОИЯИ). В §3.2 приводятся примеры расчета характеристик конкретных магнитов, являющихся структурными элементами ускорителя нового типа – СП синхротрона на I,5 ГэВ по протонам, создаваемого в ЛВЭ ОИЯИ. Проведены численные эксперименты по изучению распределения магнитного поля с учетом нелинейных эффектов, связанных с насыщением железного сердечника при полях до 3 Тл.

Получены зависимости амплитуд гармоник магнитного поля от величины рабочего тока в СП обмотке. Рассчитаны несколько новых конфигураций, в том числе синхротронный диполь с железом на 2,5 Тл. и ряд квадрупольных магнитов. Получены важные характеристики полей дипольных и квадрупольных магнитов, необходимые для анализа динамики пучка.

В заключении приводятся основные результаты диссертации:

I. Исследованы разложения по степеням шага сетки решений уравнения Пуассона в ступенчатых областях. Установлено, что коэффициенты разложения имеют степенные особенности в угловых точках области.

2. Исследован вопрос об эффективности применения экстраполяции Ричардсона, как в случае выполнения условий согласования, так и при наличии особенностей у коэффициентов разложения в окрестностях угловых точек.

3. Приведены результаты численных исследований, иллюстрирующие эффективность такой экстраполяции для широкого класса эллиптических уравнений, в том числе для двумерного и трехмерного квазилинейных уравнений дивергентного типа.

4. Предложен метод ускорения сходимости итерационных процессов на последовательности сеток, учитывающий разложение приближенных решений по степеням параметра дискретизации. Приведены результаты численных экспериментов, показывающие эффективность этого многосеточного итерационного процесса.

5. Разработан итерационный процесс разделения областей для решения одного класса краевых задач для уравнении с разрывными коэффициентами на всей плоскости, возникающих в магнитостатике.

Установлено, что скорость сходимости процесса оценивается геометрической прогрессией со знаменателем, пропорциональным отношению предельных значений коэффициента уравнения на линии разрыва. Приведены результаты численных экспериментов по сходимости метода.

6. Составлен комплекс программ GRIDS, реализующий многосеточный алгоритм в рамках метода альтернирования по подобластям без налегания с использованием дифференциальной и смешанной постановок.

7. С помощью этих программ проведены расчеты полей дипольных и квадрупольных магнитов, которые являются структурными элементами СП синхротрона-инжектора на энергию I,5 ГэВ по протонам и СП ускорителя нуклотрона релятивистских ядер на энергию I3 ГэВ, создаваемых в ЛВЭ ОИЯИ.

Работы, положенные в основу диссертации

I. **E.A.Ayrjan, E.P.Zhidkov, B.N.Khoromsky. Fast relaxation method for solving the difference problem for the POISSON equation on the sequence of grids. Comp.Phys.Comm. 29 (1983), pp. 125-130.**

2. Э.А.Айрян, Б.Н.Хоромский, И.П.Юдин, О.И.Юлдашев. Программа решения квазилинейного уравнения дивергентного типа в областях ступенчатой конфигурации. ОИЯИ, II-84-802, Дубна, 1984.
3. Э.А.Айрян, Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский, О.И.Юлдашев. Метод альтернирования для одного класса эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами в бесконечной области. ОИЯИ, PII-82-871, Дубна, 1982.
4. Э.А.Айрян, Е.П.Жидков. Об одном методе повышения точности при численном решении эллиптических уравнений. ОИЯИ, Р5-12709, Дубна, 1979.
5. Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский, Э.А.Айрян. Асимптотика решений разностной задачи для уравнения Пуассона в ступенчатых областях. ОИЯИ, Р5-80-617, Дубна, 1980.
6. Э.А.Айрян и др. Многосеточный алгоритм расчета двумерного поля сверхпроводящих магнитов. В кн. У Международное совещание по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. ОИЯИ, Д10, II-84-818, Дубна, 1984.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 марта 1985 года.