ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

11-84-863

ЖАРКОВ
Алексей Юрьевич

МЕТОДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ЭВМ В ИССЛЕДОВАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ И ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность: 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 1984

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук — В.П.ГЕРДТ

Официальные оппоненты:
доктор физико математических наук — Е.П.ЖИДКОВ
кандидат физико-математических наук — С.Ю.СЛАВЯНОВ

Ведущее научно-исследовательское учреждение - Институт прикладной математики АН СССР, Москва.

Автореферат разослан "___" ________________ 1985 года.
Защита состоится "___" ________________ 1985 года в "___" часов на заседании Ученого Совета Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ, г.Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук — *Ив...* — З.М.ИВАНЧЕНКО

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. Современная динамическая теория сильных взаимодействий - квантовая хромодинамика, позволяющая получать количественную информацию о высокоэнергетических адронных процессах методом теории возмущений, сталкивается с серьезными математическими трудностями при попытках описания низкоэнергетических адронных процессов, в частности, упругих бинарных реакций типа πN-рассеяния. Главной трудностью такого описания является необходимость выхода за рамки теории возмущений, неприменимой в области низких энергий. В настоящее время единственным вычислительным методом квантовой теории поля, не основанным на теории возмущений, является метод Монте-Карло в рамках решеточного формализма. Однако этот метод требует недостижимых на современных ЭВМ затрат машинных ресурсов для описания реалистических процессов типа πN-рассеяния и, кроме того, не дает аналитической зависимости амплитуд рассеяния от энергии. В этих условиях особую актуальность приобретает развитие аналитических методов анализа феноменологических низкоэнергетических моделей, из которых наиболее яркой является модель Чу-Лоу, описывающая статическое p-волновое πN-рассеяние. Формулировка уравнений Чу-Лоу в виде системы нелинейных разностных уравнений и использование систем аналитических вычислений на ЭВМ позволяет построить приближенно-аналитическое решение уравнений Чу-Лоу, которое может служить ориентиром для разработки методов последовательного динамического описания низкоэнергетических адронных процессов.

За последние 10-15 лет широкую известность в математической физике получил новый метод интегрирования нелинейных эволюционных уравнений - метод обратной задачи рассеяния. В связи с этим возникла задача классификации эволюционных уравнений, интегрируемых этим методом. Помимо своей теоретической важности, решение этой задачи может иметь и прикладное значение, поскольку некоторые интегрируемые эволюционные уравнения допускают солитонные решения и широко используются в физике. Одним из алгоритмических подходов к классификации интегрируемых эволюционных уравнений, предложенных в самые последние годы, является метод Ибрагимова-Шабата, основанный на понятии формальной интегрируемости. С помощью этого метода недавно были получены полные списки интегрируемых уравнений вида $u_t = u_2 + f(u,u_1)$ и $u_t = u_3 + f(u,u_1,u_2,u_3)$, где $u = u(x,t)$, $u_i = \frac{d^i u}{dx^i}$. Классификация формально интегрируемых уравнений $u_t = F(u,u_1,\ldots,u_n)$ более общего вида и более высокого порядка связана с необходимостью выполнять громоздкие преобразования в символьном виде, объем которых резко возрастает с ростом n.

По этой причине актуальной является задача автоматизации таких преобразований на основе систем аналитических вычислений на ЭВМ, а именно, разработка машинных алгоритмов и создание универсальных программ для классификации формально интегрируемых уравнений произвольного вида.

Цель работы.

1). Построение с помощью ЭВМ приближенно-аналитического решения системы нелинейных разностных уравнений, эквивалентной статическим дисперсионным уравнениям Чу-Лоу для p-волнового πN-рассеяния.

2). Разработка алгоритмов и программ для классификации интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений и решение некоторых актуальных классификационных задач.

Научная новизна.

1). Развит итерационный метод глобального построения общего решения уравнений Чу-Лоу в форме системы нелинейных разностных уравнений. Метод основан на разложении общего решения по степеням произвольной функции $C(w)$, определяющей структуру инвариантной кривой уравнения Чу-Лоу.

2). На основе программной реализации предложенного метода на языке аналитических вычислений REDUCE-2 впервые найдены в кубичном приближении матричные элементы S-матрицы статического p-волнового πN-рассеяния.

3). Для физически интересных решений уравнений Чу-Лоу впервые получены локальные ограничения $C(0)=-265$ и $C(1/2)=0$ на произвольную функцию $C(w)$.

4). Разработаны машинные алгоритмы и созданы программы на языках аналитических вычислений REDUCE-2 и PL/1 - FORMAC для классификации формально интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений $u_t = F(u,u_1,\ldots,u_n)$.

5). Созданные программы впервые использовались для классификации уравнений вида $u_t = u_5 + f(u,u_1,u_2,u_3)$, обладающих бесконечной серией законов сохранения. Полный список таких уравнений содержит два новых интегрируемых уравнения, для которых с помощью ЭВМ доказано наличие нетривиальной алгебры Ли-Бэклунда.

6). Впервые получен полный с точностью до преобразований $u \to \varphi(u)$ список формально интегрируемых уравнений седьмого и девятого порядков типа уравнений Кортевега-де Вриза. Показано, что все такие уравнения исчерпываются симметриями известных интегрируемых уравнений пятого порядка.

Практическая ценность. Результаты диссертации могут использоваться:

а) для описания экспериментальных данных по низкоэнергетическому p-волновому πN-рассеянию;

б) для классификации интегрируемых эволюционных уравнений произвольного вида с помощью ЭВМ.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на научных семинарах ЛВТА ОИЯИ, НИИЯФ МГУ, университета им.К.Маркса (Лейпциг), на Рабочем совещании по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике (Дубна, 1982), на Международном совещании по программированию и математическим методам решения физических задач (Дубна, 1983), на Всесоюзной конференции "Системы для аналитических преобразований в механике" (Горький, 1984).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 12 статей.

Объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех разделов, заключения, четырех приложений и списка литературы (123 наименования) и содержит 120 страниц машинописного текста, в том числе 2 рисунка.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается обзор литературы по тематике диссертации, а также изложение основных результатов диссертации по каждому разделу.

Раздел I посвящен описанию приближенно-аналитического метода решения уравнений Чу-Лоу и его реализации на ЭВМ с помощью программной системы аналитических вычислений REDUCE-2.

В подразделе I.I дается обзор известных результатов исследования уравнений Чу-Лоу в форме системы нелинейных разностных уравнений на матричные элементы статистической S-матрицы p-волнового πN-рассеяния. Эта система имеет вид:

$$S_i(w+1) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{3} A_{ij} S_j(w)}, \qquad A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 16 \\ -2 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad (I)$$

$$S_i(w)\, S_i(1-w) = 1, \quad i=1,2,3,$$

где переменная w связана с энергией ν рассеивающегося π-мезона соотношением $w = \frac{1}{\ } \arcsin\nu$, $S_i(w)$ являются мероморфными и вещественными функциями. Формулируются дополнительные ограничения на $S_i(w)$, означающие правильное пороговое поведение p-волн и наличие в нуле полюса первого порядка (борновского полюса). Приводится известная формулировка системы (I) в терминах функций $x(w)$, $y(w)$, $z(w)$, обладающих определенной четностью по w и связанных с матричными элементами S_i дробно-рациональными преобразованиями. Такая формулировка позволила установить, что физически интересные решения должны содержаться в общем решении системы (I), зависящем от трех произвольных мероморфных функций $\beta(w)$, $D(w)$ и $C(w)$, удовлетворяющих определенным свойствам четности и периодичности. Зависимость от первых двух из них тривиально учитывается заменой $S_i(w) \to D(w)\, S_i(w+\beta(w))$, поэтому задача сводится к нахождению зависимости общего решения от функции $C(w)$, которая определяет структуру инвариантной кривой уравнений Чу-Лоу

$$y(w) = f(x(w),C(w)) \,. \tag{2}$$

Для нахождения зависимости от функции $C(w)$ предлагается искать общее решение системы (I) в виде степенного ряда

$$S_i(w) = \sum_{j=0}^{\infty} S_{ij}(w)\, C^j(w) \,, \tag{3}$$

где $S_{io}(w)$ - известное точное решение системы (I) с конечным числом полюсов.

В подразделе I.2 изложен метод вычисления коэффициентов $S_{ij}(w)$ разложения (3). Показано, что подстановка разложений

$$\begin{aligned} f(x,C) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)C^n \,, \\ x(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n(w)C^n(w) \,, \\ y(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(w)C^n(w) \,, \\ z(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} z_n(w)C^n(w) \end{aligned} \tag{4}$$

в функциональное уравнение для инвариантной кривой и систему нелинейных разностных уравнений на функции $x(w)$, $y(w)$, $z(w)$ сводит исходную нелинейную задачу к бесконечной цепочке линейных неоднородных разностных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, решение которых позволяет рекуррентно находить коэффициенты разложений (4). Получены расчетные формулы для вычисления неоднородных частей этих уравнений в произвольном порядке n. **Разработана** техника решения уравнений линейной цепочки, состоящая в сведении их к уравнениям с рациональными неоднородными частями и разложении последних на элементарные дроби. Развитый метод иллюстрируется на примере вычисления **инвариантной кривой уравнений Чу-Лоу в кубичном по C приближении.**

В подразделе I.3 описывается реализация предложенного метода на ЭВМ с помощью программной системы аналитических вычислений REDUCE-2. Разработаны алгоритмы и программы, позволяющие автоматизировать все громоздкие аналитические преобразования, связанные с построением общего решения уравнений Чу-Лоу в форме (3), а именно:

I) нахождение неоднородных частей уравнений линейной цепочки,

2) решение указанных уравнений,

3) вычисление коэффициентов $S_{ij}(w)$ разложения (3) на основе разложений (4).

Для автоматизации выкладок пункта 2) предложен простой, но эффективный алгоритм разложения рациональных функций на элементарные дроби. Алгоритм реализован в виде процедуры FRACT на внешнем языке системы REDUCE-2.

Раздел 2 посвящен построению общего решения уравнений Чу-Лоу в виде разложения (3) в кубичном приближении по $C(w)$, исследованию его асимптотики в области упругого порога и нахождению локальных ограничений на функциональный произвол в общем решении.

В подразделе 2.I в рамках предложенного метода и на основе его программной реализации найден явный вид квадратичных членов разложения (3). В отличие от линейных членов разложения (3), которые являются рациональными функциями переменной w, квадратичные члены содержат неэлементарные функции $\xi(w)$ и $\eta(w)$, выражающиеся через известную Ψ-функцию Эйлера.

В подразделе 2.2 найден явный вид кубичных членов разложения (3). Кроме функций $\xi(w)$ и $\eta(w)$, кубичные члены содержат две новые неэлементарные функции $b(w)$ и $d(w)$, которые не сводятся к известным специальным функциям. Для этих функций получено аналитическое представление в виде сходящихся степенных рядов.

В подразделе 2.3 исследуется связь общего решения уравнений Чу-Лоу в форме (3) с известным локальным представлением общего решения в окрестности упругого порога πN-реакции (при $\mathrm{Re}\, w \to \infty$). В указанной окрестности общее решение может быть представлено формальными рядами

$$S_i(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma_{ij}(C(w))}{w^j} \,, \tag{5}$$

в которых коэффициенты σ_{ij} являются полиномами по $C(w)$. Разложениям (5) соответствует разложение для инвариантной кривой в окрестности точки $x=0$

$$f(x,C) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(C)x^{2i} \,, \tag{6}$$

где β_i - полиномы по C.

Показано, что при преобразовании фазовой плоскости (x,y), генерируемом исходными нелинейными разностными уравнениями на функции

$x(w)$, $y(w)$, точка фазовой плоскости, соответствующая решению с борновским полюсом, асимптотически стремится к началу координат вдоль кривой параболического типа, которая описывается разложением (6), оборванным на некоторой степени x. Отсюда сделан вывод об асимптотическом характере локального разложения (6) и соответствующих им разложений (5). Показано, что для коэффициентов $S_{ij}(w)$ разложения (3) можно выбрать различные представления в областях $\operatorname{Re} w > 0$ и $\operatorname{Re} w < 0$ комплексной w-плоскости таким образом, что они будут обладать асимптотическими разложениями при $\operatorname{Re} w \to +\infty$ и $\operatorname{Re} w \to -\infty$ соответственно, согласующимися с локальными разложениями (5). Рассмотрены дополнительные ограничения на общее решение уравнений Чу-Лоу в форме (3). С помощью численного анализа для решений с борновским полюсом получено локальное ограничение $C(0) \approx -265$ на произвольную функцию $C(w)$. Ненулевое значение $C(0)$ закрывает возможность компенсации обнаруженного сингулярного поведения старших коэффициентов разложения (3) $S_{ij}(w) \underset{w\to 0}{\sim} \frac{1}{w^{2(j-2)}}$, $j \geq 3$ за счет функционального произвола в общем решении. Отсюда сделан вывод о неприменимости разложения (3) в окрестности точки $w=0$. Показано, что правильное пороговое поведение разложения (3) обеспечивается, если представить его с учетом функционального произвола в виде

$$S_i(w) = D(w) \sum_{j=0}^{\infty} S_{ij}(w+\beta(w))C^j(w)$$

и наложить на функции β, D и C локальные ограничения

$$\beta(w) \underset{w\to\frac{1}{2}}{\sim} \frac{1}{(w-1/2)^3}, \quad D(w) = 1 + O((w-1/2)^3), \quad C(w) \underset{w\to 1/2}{\to} 0 .$$

При таких ограничениях ряды (3) являются разложениями по малому параметру в окрестности упругого порога πN-реакции.

Раздел 3 посвящен разработке алгоритмов и программ, предназначенных для классификации формально интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений вида

$$u_t = F(u, u_1, \ldots, u_n). \qquad (7)$$

В подразделе 3.I дается краткий обзор основных результатов теории формально интегрируемых эволюционных уравнений. Для уравнений (7) приводятся определения формальной интегрируемости, закона сохранения, симметрии Ли-Бэклунда и формулируются известные теоремы, устанавливающие связь между этими понятиями. В одной из теорем сформулированы необходимые и достаточные условия формальной интегрируемости. Такими условиями является наличие у уравнения (7) бесконечной серии законов сохранения определенного вида. Описывается метод классификации формально интегрируемых эволюционных уравнений, основанный на этой теореме.

В подразделе 3.2 предлагаются алгоритмы, позволяющие реализовать на ЭВМ следующие этапы классификации формально интегрируемых уравнений (7):

I) вычисление плотностей законов сохранения;

2) проверка условий формальной интегрируемости и получение эквивалентных этим условиям уравнений на функцию F;

3) нахождение нетривиальных симметрий заданного уравнения (7);

4) нахождение дифференциальных подстановок (преобразований Бэклунда), связывающих два заданных уравнения вида (7).

В подразделе 3.3 описывается высокоэффективная программа FORMINT на языке системы аналитических вычислений PL/1 - FORMAC, полностью реализующая алгоритмы подраздела 3.2. В отличие от первоначальной версии на языке системы REDUCE-2, программа FORMINT является универсальной и может использоваться на всех этапах классификации и дальнейшего исследования формально интегрируемых уравнений произвольного вида (7).

Раздел 4 посвящен решению некоторых актуальных классификационных задач с помощью созданных автором программ на языках систем REDUCE-2 и PL/1 - FORMAC.

В подразделе 4.I описано применение созданных автором программ к классификации уравнений вида

$$u_t = u_5 + f(u, u_1, u_2, u_3), \qquad (8)$$

обладающих бесконечной серией нетривиальных законов сохранения. Для уравнений (8) приведен явный вид нескольких необходимых условий существования бесконечной серии законов сохранения. Исходя из этих условий на ЭВМ получена переопределенная система дифференциальных уравнений на функцию f. В результате решения переопределенной системы получился список из двадцати конкретных уравнений вида (8). С помощью программы FORMINT, описанной в подразделе 3.3, для этих уравнений проверялось выполнение нескольких следующих условий существования бесконечной серии законов сохранения. В результате проверки часть уравнений отсеялась. Для оставшихся тринадцати уравнений было показано, что они действительно обладают бесконечной серией законов сохранения. При этом использовалась следующая лемма, доказанная в диссертации.

Лемма. Пусть уравнение $v_t = G(v, v_1, \ldots, v_n)$ обладает бесконечной серией законов сохранения. Тогда, если существует преобразование Бэклунда $v = \varphi(u, u_1, \ldots, u_m)$, $m \geq 1$, переводящее решение уравнения $u_t = F(u, u_1, \ldots, u_n)$ в решения уравнения $v_t = G(v, v_1, \ldots, v_n)$, то уравнение $u_t = F(u, u_1, \ldots, u_n)$ также имеет бесконечную серию законов сохранения. Для уравнений полученного списка приводится явный вид преобразований Бэклунда, сводящих эти уравнения к известным уравнениям типа уравнений Кортевега-де Вриза, которые обладают бесконечной серией законов сохранения. Полученный список содержит два новых интегрируемых уравнения:

$$u_t = u_5 + 5(u_2-u_1^2 + ae^{2u} + be^{-u})u_3 - 5u_1u_2^2 + u_1^5 + \quad (9)$$
$$+ 15ae^{2u}u_1u_2 + 5(ae^{2u} + be^{-u})^2u_1 .$$

$$u_t = u_5 + 5(u_2 - u_1^2 + ae^{2u} + be^{-4u})u_3 - 5u_1u_2^2 + u_1^5 + \quad (10)$$
$$+ 15(ae^{2u} - 4be^{-4u})u_1u_2 + 90be^{-4u}u_1^3 + 5(ae^{2u} + be^{-4u})^2u_1 .$$
$$a,b \in C.$$

Уравнение (9) было независимо и несколько ранее найдено в работе Fujimoto A., Watanabe Y., Math. Jap., 1983, 28, p.43 , где классифицировались уравнения (8), обладающие симметриями седьмого порядка. Уравнение (10) в этой работе упущено. С помощью ЭВМ нами проверено, что оно также обладает симметрией седьмого порядка.

В подразделе 4.2 решается задача о классификации формально интегрируемых уравнений седьмого и девятого порядков типа уравнений Кортевега-де Вриза (КдВ). Уравнения типа КдВ седьмого и девятого порядков имеют собственно следующий общий вид:

$$u_t = u_7 + \lambda_1 uu_5 + \lambda_2 u_1u_4 + \lambda_3 u_2u_3 + \lambda_4 u^2u_3 + \lambda_5 uu_1u_2 + \quad (11)$$
$$+ \lambda_6 u_1^3 + \lambda_7 u^3u_1 .$$

$$u_t = u_9 + \lambda_1 uu_7 + \lambda_2 u_1u_6 + \lambda_3 u_2u_5 + \lambda_4 u_3u_4 + \lambda_5 u^2u_5 +$$
$$+ \lambda_6 uu_1u_4 + \lambda_7 uu_2u_3 + \lambda_8 u_1^2u_3 + \lambda_9 u_1u_2^2 + \lambda_{10}u^3u_3 + \quad (12)$$
$$+ \lambda_{11}u^2u_1u_2 + \lambda_{12}u\,u_1^3 + \lambda_{13}u^4u_1 , \qquad \lambda_i \in \mathbb{C} .$$

С помощью программы FORMINT для уравнений (1),(12) были получены переопределенные системы нелинейных алгебраических уравнений на параметры λ_i, эквивалентные нескольким первым условиям формальной интегрируемости. Разработан эффективный метод решения таких систем, сводящий проблему к последовательному решению линейных и квадратных алгебраических уравнений на λ_i. Решение полученных нелинейных систем указанным методом приводит к списку конкретных уравнений вида (11),(12). Проверка на ЭВМ нескольких последующих условий формальной интегрируемости для полученных уравнений показала, что все нелинейные формально интегрируемые уравнения вида (11),(12) исчерпываются симметриями известных уравнений типа КдВ третьего и пятого порядков. Полученный результат подтверждает гипотезу о том, что это справедливо и для уравнений типа КдВ произвольного порядка.

В приложении 1 содержится пример обращения к процедуре FRACT , реализующей разложение рациональных функций на элементарные дроби.

В приложении 2 даны явные выражения для матричных элементов статической S -матрицы p -волнового πN -рассеяния в кубичном по $C(w)$ приближении.

В приложении 3 приводится пример выдачи программы FORMINT .

В приложении 4 выписана система нелинейных алгебраических уравнений на параметры, входящие в правую часть уравнения типа КдВ девятого порядка.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Развит приближенно-аналитический метод построения общего решения уравнений Чу-Лоу, сводящий исходную систему нелинейных разностных уравнений к цепочке линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.
2. Развитый метод реализован на ЭВМ на основе системы аналитических вычислений REDUCE-2 . В частности, для решения уравнений линейной цепочки предложен и реализован в системе REDUCE-2 эффективный алгоритм разложения рациональных функций на элементарные дроби.
3. Найдены квадратичные и кубичные члены разложения для матричных элементов статической S -матрицы p-волнового πN -рассеяния. Показано, что асимптотическое разложение построенного решения в пороговой области дает известное локальное представление общего решения уравнений Чу-Лоу.
4. Получены локальные ограничения на функциональный произвол для физически интересных решений уравнений Чу-Лоу. Показано, что при таких ограничениях построенное решение является разложением по малому параметру в окрестности упругого порога πN -реакции.
5. Впервые реализован на ЭВМ метод классификации интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений, основанный на понятии формальной интегрируемости. Разработаны машинные алгоритмы проверки условий интегрируемости, вычисления плотностей законов сохранения и симметрий Ли-Бэклунда, а также нахождения преобразований Бэклунда, связывающих эволюционные уравнения. Указанные алгоритмы реализованы в программах на языках REDUCE-2 и PL/1 - FORMAC.
6. Созданные программы использовались при классификации уравнений вида $u_t = u_5 + f(u,u_1,u_2,u_3)$, обладающих бесконечной серией законов сохранения. Полный список содержит два новых интегрируемых уравнения.

7. Найдены все интегрируемые уравнения седьмого и девятого порядков типа уравнения Кортевега-де Вриза. Показано, что все такие уравнения исчерпываются симметриями известных интегрируемых уравнений пятого порядка.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Гердт В.П.,Жарков А.Ю. Разложение рациональных функций на элементарные дроби в системе REDUCE-2. ОИЯИ, Р5-82-187, Дубна, 1982.
2. Гердт В.П., Жарков А.Ю. Решение уравнений Чу-Лоу в квадратичном приближении. ТМФ, 1982, т.53, № 3, с.384-392.
3. Гердт В.П., Жарков А.Ю. Кубичное приближение и локальные ограничения на функциональный произвол в общем решении уравнений Чу-Лоу. ТМФ, 1983, т.55, № 3, с.469-474.
4. Гердт В.П., Жарков А.Ю. Итерационный метод построения общего решения уравнения Чу-Лоу с использованием системы REDUCE-2. В кн.: Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике. ОИЯИ, Д11-83-511, Дубна, 1983, с.232-241.
5. Гердт В.П., Жарков А.Ю. Об асимптотическом разложении общего решения уравнений Чу-Лоу. ОИЯИ, Р5-84-431, Дубна, 1984.
6. Жарков А.Ю., Свинолупов С.И., Швачка А.Б. Исследование интегрируемости нелинейных эволюционных уравнений с использованием систем аналитических вычислений на ЭВМ. ОИЯИ, Р11-84-346, Дубна, 1984.
7. Жарков А.Ю., Швачка А.Б. Алгоритмы и программы для исследования интегрируемости нелинейных эволюционных уравнений. В кн.: Труды Международного совещания по программированию и математическим методам решения физических задач. ОИЯИ, Д10,11-84-818, Дубна, 1984.
8. Жарков А.Ю., Швачка А.Б. Исследование интегрируемости нелинейных эволюционных уравнений с использованием системы аналитических вычислений REDUCE-2. ОИЯИ, Р11-83-914, Дубна, 1983.
9. Gerdt V.P, Shvachka A.B., Zharkov A.Yu. FORMINT - a program for classification of integrable nonlinear evolution equations. - JINR, E11 - 84 - 400, Dubna, 1984.
10. Гердт В.П., Жарков А.Ю., Швачка А.Б. FORMINT - программа исследования интегрируемости нелинейных эволюционных уравнений. В кн.: Системы для аналитических преобразований в механике. Изд-во Горьковского госуд.ун-та им. Н.И.Лобачевского. Горький, 1984, с.115.

11. Жарков А.Ю., Свинолупов С.И., Соколов В.В. Об эволюционных уравнениях пятого порядка, обладающих бесконечной серией законов сохранения. Деп. ВИНИТИ, № 4384-84, 1984, 9 с.
12. Гердт В.П., Жарков А.Ю., Швачка А.Б. Классификация интегрируемых уравнений высших порядков типа уравнений Кортевега-де Вриза. ОИЯИ, Р5-84-489, Дубна, 1984.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 декабря 1984 года.