

**сообщения
Объединенного
института
ядерных
исследований
Дубна**

11-84-802 ef

**Э.А. Айрян*, Б.Н. Хоромский, И.П. Юдин,
О.И. Юлдашев**

**ПРОГРАММА РЕШЕНИЯ
КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ
ДИВЕРГЕНТНОГО ТИПА
В ОБЛАСТЯХ СТУПЕНЧАТОЙ КОНФИГУРАЦИИ**

* Ереванский физический институт

1984

В работе рассматриваются численные алгоритмы на последовательности сеток нахождения приближенных решений краевых задач для одного класса квазилинейных уравнений эллиптического типа. Задачи такого типа возникают при численном моделировании магнитостатических полей и, в частности, в связи с необходимостью определения оптимальных по ряду характеристик конфигурации дипольных и квадрупольных магнитов сверхпроводящего синхротрона для энергии 1,5 ГэВ по протонам, создаваемого в ЛВЭ ОИЯИ [1].

Приводится краткое описание комплекса программ GRIDS, реализующего многосеточный алгоритм при решении указанного класса задач.

1. Краевая задача

Пусть замкнутая кривая Γ , состоящая из конечного числа прямолинейных отрезков, параллельных осям Ox и Oy , разделяет плоскость R^2 на внутреннюю и внешнюю области Ω_I и Ω_e , так что $R^2 = \Omega_I \cup \Gamma \cup \Omega_e$. Требуется найти функции $U_i(\zeta)$, $i=1,2$, $\zeta = (x,y) \in R^2$, удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta U_1 = f_1(\zeta), \zeta \in \Omega_e, U_1(\infty) = 0,$$

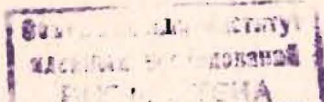
$$\operatorname{div}(\nu(|\operatorname{grad} u_2|) \operatorname{grad} u_2) = S_2, \zeta \in \Omega_I$$

$$U_1(\zeta) = U_2(\zeta), \zeta \in \Gamma,$$

$$\nu(|\operatorname{grad} u_2|) \frac{\partial u_2}{\partial n} = \frac{\partial u_1}{\partial n}, \zeta \in \Gamma,$$

(I)

где $\frac{\partial}{\partial n}$ означает производную по внутренней нормали к границе Γ . Заданные функции $f_1(\zeta)$, $S_2(\zeta)$, $\nu(\zeta)$ обладают требуемой гладкостью и обеспечивают существование решения задачи (I).



2. Метод решения

Пусть область Ω_I содержится в прямоугольнике $\Pi = \{(x, y): |x| \leq a, |y| \leq b\}$ с границей Γ_1 . Уравнение (1) заменяем задачей отыскания трех функций V_1, V_2, u_2 , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nu(\lg \operatorname{grad} u_2)) \operatorname{grad} u_2 &= f_2(x), \quad x \in \Omega_I, \\ \Delta V_1 &= f_1(x), \quad x \in \Pi \setminus \Omega_I \\ V_1(x) &= u_2(x), \quad \nu(\lg \operatorname{grad} u_2) \frac{\partial u_2}{\partial n} = \frac{\partial V_1}{\partial n}, \quad x \in \Gamma_1, \\ u_1(x) &= V_2(x), \quad \frac{\partial V_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n}, \quad x \in \Gamma_1 \\ (E+K)V_2 - L \frac{\partial V_2}{\partial n} &= \phi_1(x), \quad x \in \Gamma_1, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma = \emptyset. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь интегральные операторы K и L определены на контуре Γ_1 и заданы соотношениями

$$Kz = \int_{\Gamma_1} k(t,s) z(s) ds, \quad Lz = \int_{\Gamma_1} l(t,s) z(s) ds, \quad t \in \Gamma_1,$$

$$l(t,s) = \frac{1}{\sigma} \ln r^{-1}(t,s), \quad K(t,s) = \frac{d(t)}{\sigma} \frac{\partial}{\partial n_s} \ln r^{-1}(t,s);$$

$r(t,s)$ — расстояние между точками t и s , $d(t)$ — угол между отрезками границы, выходящими из точки t .

Если же пересечение $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Gamma_0$ не пусто, то в системе (2) условие $\frac{\partial V_1}{\partial n} = \frac{\partial V_2}{\partial n}, x \in \Gamma_1$ заменяется на следующие

$$\begin{aligned} \nu(\lg \operatorname{grad} u_2) \frac{\partial u_2}{\partial n} &= \frac{\partial V_2}{\partial n}, \quad x \in \Gamma_0, \\ \frac{\partial V_1}{\partial n} &= \frac{\partial V_2}{\partial n}, \quad x \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_0, \end{aligned} \quad (3)$$

вытекающие из системы (2). Обозначим

$$u(x) = \begin{cases} u_2(x), & x \in \Omega_I, \\ V_1(x), & x \in \Pi \setminus \Omega_I \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} f_2(x), & x \in \Omega_I, \\ f_1(x), & x \in \Pi \setminus \Omega_I. \end{cases}$$

Итерационный процесс, используемый нами для решения (2), имеет вид (задано $u^k(x), x \in \Gamma_1$, вычисляем $u^{k+1}(x), x \in \Gamma_1$)

$$Gu = f(x), \quad x \in \Pi, \quad u(x) = u^k(x), \quad x \in \Gamma_1, \quad (4a)$$

$$V^{k+1} = \frac{\partial u}{\partial n}, \quad x \in \Gamma_1, \quad (4б)$$

$$(E+K)u^{k+1/2} - L(\nu(\lg \operatorname{grad} u))V^{k+1} = \phi_1(x), \quad x \in \Gamma_1, \quad (4в)$$

$$u^{k+1} = (1-\eta)u^k + \eta u^{k+1/2}, \quad 0 < \eta < 1. \quad (4г)$$

Здесь дифференциальный оператор G определяется в области Π , согласно (2).

Имеется возможность на первом шаге процесса (4) ставить смешанное краевое условие $\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = \beta, x \in \Gamma_1$, аналогично [2]. В результате необходимо, вообще говоря, многократно решать краевую задачу (4a) и, быть может, граничное интегральное уравнение (ГИУ) (4в). В ряде задач достаточно ограничиться лишь однократным решением задачи (4a). Некоторые вопросы, связанные со сходимостью процесса (4), изложены в [3].

Замечание I. В задачах магнитостатики уравнение (1) описывает Z -овую компоненту векторного потенциала магнитного поля в (X, Y) -приближении, где $\nu = \frac{1}{\mu}$, μ — магнитная проницаемость среды, а f_1 и f_2 задают плотность токов. Дальнейшее изложение проводим в терминах краевых задач магнитостатики [4, 5].

3. Разностная задача

Для дискретизации уравнения построим в расчетной области Π равномерную сетку с прямоугольными ячейками

$$\Omega = \{(x_i, y_j): x_{i+1} = x_i + h_{ix}, y_{j+1} = y_j + h_{jy}, i=1, \dots, N_x, j=1, \dots, N_y\}.$$

Предполагается, что границы расчетной области и внутренние границы раздела сред с различными характеристиками являются узловыми линиями. Искомая сеточная функция u_{ij} определена в узлах сетки Ω . На рис. I изображена ячейка сетки, окружающая внутренний узел со значениями векторного потенциала u_{ij} .

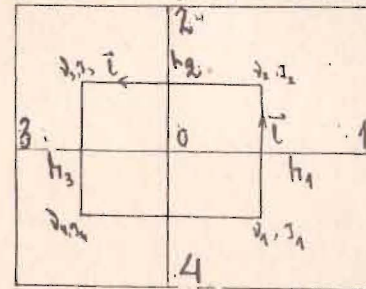


Рис. I

Магнитная проницаемость μ и плотность тока j в пределах одной ячейки полагаются постоянными. Стандартным образом интегрируя равенство (4a) в пределах элементарной ячейки и применяя формулу Грина, получим [6]

$$\int_V \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) d\vec{e} = \int_S f(x,y) dx dy,$$

где \vec{e} - граница, а S - площадь ячейки. Вычисляя интегралы по формуле прямоугольников и заменяя производные соотношениями, получаем разностную схему для определения

$$\left(\frac{h_3}{4} + \frac{h_4}{4} \right) \frac{A_0 - U_4}{h_4} + \left(\frac{h_3}{4} + \frac{h_1}{4} \right) \frac{A_0 - A_2}{h_2} + \left(\frac{A_0 - A_2}{h_3} \right) \left(\frac{h_1}{4} + \frac{h_2}{4} \right) + \left(\frac{h_2}{4} + \frac{h_4}{4} \right) \frac{A_0 - A_1}{h} - 0.5 F_{ij},$$

где $F_{ij} = \gamma_1 h_1 h_4 + \gamma_2 h_1 h_2 + \gamma_3 h_3 h_2 + \gamma_4 h_3 h_4$, $h_i^2 \equiv h_i$, $h_j^2 \equiv h_j$;

μ - в каждой элементарной ячейке вычисляется через значения векторного потенциала в вершинах ячейки. Например, μ_1 вычисляется по формуле

$$\mu_1 = \mu \left(\int_{\vec{e}} \text{grad} u \right) = \mu \left(\sqrt{\frac{(u_{11} + u_{12} - u_{13} - u_{14})^2}{2h_{11}}} + \sqrt{\frac{(u_{12} + u_{13} - u_{14} - u_{11})^2}{2h_{12}}} \right).$$

Для решения системы разностных уравнений (5) применяем метод верхней релаксации. Значение релаксационного параметра ω выбирается из интервала (0,2) по схеме, рассмотренной в работах [7,8]. Как правило, в каждой среде выбирается свой параметр релаксации. Проведя некоторое количество итераций, пересчитываем значения магнитной проницаемости с последующей нижней релаксацией. Значение параметра нижней релаксации выбирается из интервала (0,1) в процессе численных расчетов [9]. Для ускорения процесса верхней релаксации решения уравнения (5) используем многосеточную организацию расчетов. Сначала решаем задачу на грубой сетке, затем, производя размельчение сетки Ω , либо какой-то ее части и используя полученные решения на грубых сетках в качестве начального приближения для итерационного процесса верхней релаксации, находим решение на мелкой сетке.

Замечание 2. При выполнении равенства

$$U_{ij}^h = U_{ij}^* + h^d C_1 + \eta_h, \quad \eta_h = o(h^d), \quad d > 0,$$

где U^* - точное решение задачи (4а); для ускорения процесса можно применять метод, предложенный в [10].

Замечание 3. В программе имеется возможность выполнения массовых расчетов, т.е. многократное обращение к программе при различных значениях входных данных (расположение токовых обмоток, значение плотности тока, разные таблицы задания магнитной проницаемости и т.д.).

Замечание 4. При наличии двух или более осей симметрии расчеты можно проводить лишь в соответствующем секторе.

5. Краткое описание основных блоков комплекса программ GRIDS и программы NBIEQD, реализующих алгоритмы решения задач (4а) и (4в) соответственно

- 1) GRIDS -- Программа организации расчетов на последовательности сеток.
- 2) GXY -- Блок задания конфигурации магнитной системы.
- 3) STEP -- Построение прямоугольной сетки в расчетной области.
- 4) COEFF -- Подпрограмма получения коэффициентов разностных уравнений.
- 5) BOUND -- Блок задания граничных условий и начального приближения для итерационного процесса.
- 6) FR, FR1 -- Задание расположений токовых участков и вычисления плотности тока.
- 7) DNPRD -- Программа решения системы нелинейных разностных уравнений методом верхней релаксации.
- 8) SRELAX, SRELAX1 -- Подпрограммы вычисления параметров верхней релаксации в различных средах (воздушных и железных).
- 9) AM, MAG005 -- Блоки, организующие пересчет магнитной проницаемости μ . В случае, когда μ задано таблицей для ее вычисления, используем интерполяцию кубическими сплайнами.
- 10) INTG12, G12 -- Интерполирование значений потенциала со вспомогательных сеток на основную сетку (получение начального значения для итерационного процесса на основной сетке).
- INTLQ, INTRQ
- 11) BH -- Блок вычисления магнитного поля H и магнитной индукции B после нахождения потенциала.
- 12) HELP1, GARAN, IEQD, BASIN, FURYE -- Подпрограммы для пересчета значений потенциала на требуемый радиус и выполнение гармонического анализа. Пересчет выполняется с помощью граничных интегральных уравнений.

- 13) *AMP* - Подпрограмма, вычисляющая нормальную производную на Γ_1 .
- 14) *NBIEQD*, *ITER* - Подпрограммы, формирующие алгебраическую систему при решении методом граничных элементов внешней задачи Неймана для кусочно-линейной дискретизации и решающие эту систему методом Зейделя (предусмотрена возможность применения метода верхней релаксации).

Результаты численных расчетов по программе *NBIEQD* приведены в /11/.

Приведем параметры, характеризующие работу программы *GRIDS*, на примере решения задачи дипольного магнита типа "оконная рама".

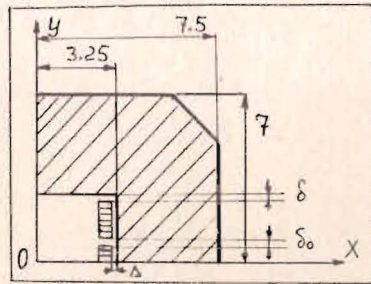


Рис.2

На рис.2 изображена расчетная область. Железный экран рассматриваемого магнита изготавливается из стали $Fe+3.96\%Si$.

Результаты расчетов на ЭЕМ CDC-6500 иллюстрируются в таблице, где K_{ng}, K_{ng} - количество итераций в методе верхней релаксации при многосеточной и обычной организации расчетов соответственно, а t_{ng}, t_{ng} - соответствующие времена в секундах: ξ - точность итерационного процесса (5) N - количество расчетных точек.

Сравнения показывают, что при выполнении расчетов при одинаковом количестве расчетных точек по программе *GRIDS* нужно в 5 раз, а для достижения одинаковой точности - более чем в 10 раз меньше времени ЭЕМ по сравнению с программой *POISSON* /12/.

В заключение авторы выражают благодарность Е.П.Жидкову за поддержку, а также М.С.Касчиеву и П.Г.Акишину за плодотворные обсуждения.

Таблица

ξ	N	K_{ng}	K_{ng}	t_{ng}	t_{ng}
10^{-5}	2Ix2I	90	90	12	12
	4Ix4I	48	180	26	96
	8Ix8I	38	360	85	768
10^{-6}	2Ix2I	118	118	16	16
	4Ix4I	96	236	53	128
	8Ix8I	146	472	326	1024

Литература

1. Шелаев И.А., Юдин И.П. ОИЯИ, 9-12346, Дубна, 1979.
2. Осмоловский В.Г., Ривкинд В.Я. О методе разделения областей для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. ЖВМ и МФ, 1981, т.21, № 1, с.35-39.
3. Айрян Э.А. и др. ОИЯИ, П11-82-871. Дубна, 1982.
4. Брехна Г. Сверхпроводящие магнитные системы. Мир, М., 1976.
5. Дойников Н.И. Постановка задач численного анализа полей нелинейных магнитных систем. Л., В.И., 1976 (препринт НИИЭФА).
6. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М., Наука, 1976.
7. Дойников Н.И., Симаков А.С. К оптимизации параметра верхней релаксации.
8. Салле В.А., Computer J., V.4., №1, 1966.
9. Ворожцов С.В. и др. ОИЯИ, 19-5013, Дубна, 1970.
10. Айрян Э.А., Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, 5-81-820, Дубна, 1981.
11. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Юлдашев О.И. ОИЯИ, П11-82-659, Дубна, 1982.
12. Ворожцов С.В. и др. ОИЯИ, В1-11-12070, Дубна, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 декабря 1984 года.

СООБЩЕНИЯ, КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ, ПРЕПРИНТЫ И СБОРНИКИ ТРУДОВ КОНФЕРЕНЦИЙ, ИЗДАВАЕМЫЕ ОБЪЕДИНЕННЫМ ИНСТИТУТОМ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ЯВЛЯЮТСЯ ОФИЦИАЛЬНЫМИ ПУБЛИКАЦИЯМИ.

Ссылки на СООБЩЕНИЯ и ПРЕПРИНТЫ ОИЯИ должны содержать следующие элементы:

- фамилии и инициалы авторов,
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс публикации,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы /при необходимости/.

Пример:

1. *Первушин В.Н. и др. ОИЯИ, Р2-84-849, Дубна, 1984.*

Ссылки на конкретную СТАТЬЮ, помещенную в сборнике, должны содержать:

- фамилии и инициалы авторов,
- заглавие сборника, перед которым приводятся сокращенные слова: "В кн."
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс издания,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы.

Пример:

Колпаков И.Ф. В кн. XI Международный симпозиум по ядерной электронике, ОИЯИ, Д13-84-53, Дубна, 1984, с.26.

Савин И.А., Смирнов Г.И. В сб. "Краткие сообщения ОИЯИ", № 2-84, Дубна, 1984, с.3.

Айрян Э.А. и др.

11-84-802

Программа решения квазилинейного уравнения дивергентного типа в областях ступенчатой конфигурации

Приводится краткое описание комплекса программ, реализующего численные алгоритмы на последовательности сеток для решения одного класса квазилинейных уравнений, возникающих в магнитостатике. Использование экстраполированных решений с грубых сеток в качестве начального приближения для итерационного процесса на более мелкой сетке приводит к существенному сокращению числа итераций. Эффективность алгоритма иллюстрируется результатами численных расчетов.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Ayrjan E.A. et al.

11-84-802

A Program for the Solution of Quasilinear Divergent Type Equation in the Steplike Domains

The description of the GRIDS program, which realized numerical multigrid algorithms for the solution of one class of quasilinear equations, appearing in magnetostatics is given. The extrapolating solution from greater meshes to a smaller one is used as an input point for the iterational process. This leads to the great reduction of the iterations number. The efficiency of the algorithm is illustrated by the numerical calculations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984