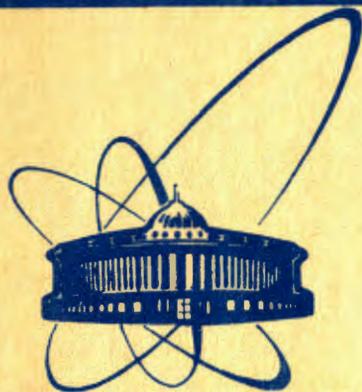


28/IV-84



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
Дубна

2108/84

11-84-61

Е.П.Жидков, В.А.Михайлов, А.В.Федоров

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРРЕКЦИИ
ДЕФОРМИРОВАННОЙ РАВНОВЕСНОЙ ОРБИТЫ
В ТЯЖЕЛОИОННОМ СИНХРОТРОНЕ

1984

Для исследований в области релятивистской ядерной физики и физики атомного ядра в ОИЯИ планируется создание ускорительного комплекса тяжелых ионов $^{71}/$. Одной из составных частей комплекса является тяжелоионный синхротрон (ТИС), предназначенный для ускорения ионов до энергий в несколько сотен МэВ/нуклон. Магнитная структура ТИСа состоит из шестнадцати периодов. Динамические характеристики периода для частот бетатронных колебаний $\nu_x = 4,8$, $\nu_z = 3,85$ представлены на рис. I.

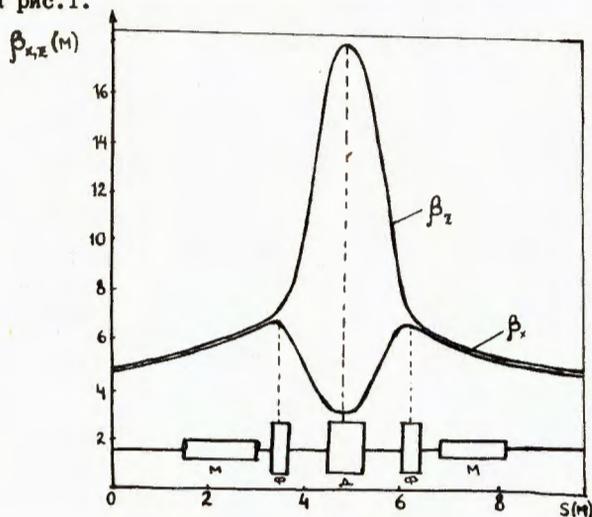


Рис. I.

В идеальной магнитной структуре равновесная орбита совпадает с геометрической осью вакуумной камеры. Наличие разного рода возмущений магнитного поля, ошибки в изготовке структурных элементов приводят к тому, что равновесная орбита деформируется и отклоняется от идеальной. Так как частицы пучка совершают колебания вокруг равновесной орбиты, то, вследствие ее деформации, часть пучка может быть потеряна. Поэтому нашей задачей является оценка (в рамках заданных допусков на возмущения) максимального отклонения деформированной орбиты и последующая ее коррекция. Для коррекции орбиты в свободных

от поля промежутках ускорителя расставляется M датчиков, измеряющих положение равновесной орбиты, и N корректоров (рис.2). Необходимо, используя минимальное число датчиков и корректоров и исходя из измеренных положений равновесной орбиты, так подобрать силу корректоров, чтобы отклонение орбиты от идеальной не превышало 4 мм в горизонтальной плоскости и 3 мм в вертикальной.

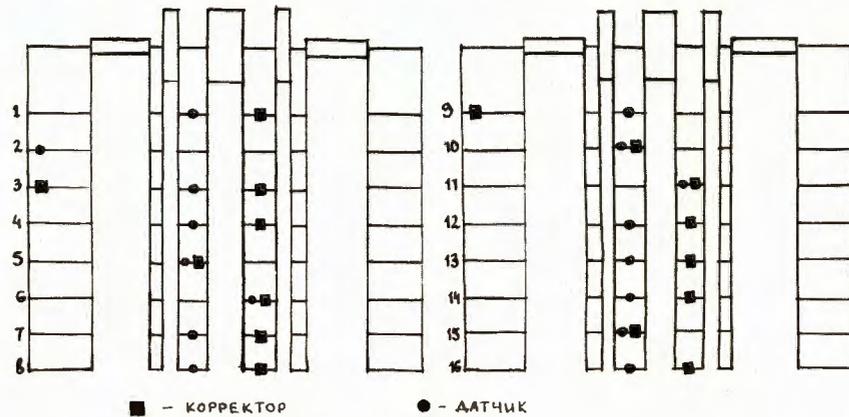


Рис.2.

I. Максимальное отклонение замкнутой орбиты

Источниками искажения орбиты являются: разброс индукций $\Delta B_z/B_0$ в дипольных магнитах, их поворот вокруг продольной оси на угол α , поперечное смещение квадрупольных линз $\Delta X, \Delta Z$ и др. Обычно предполагают, что эти возмущения распределены нормально, статистически независимы и имеют нулевые математические ожидания. Существуют по крайней мере два способа аналитической оценки максимального отклонения замкнутой орбиты в синхротронах. В первом случае^{/2/} предполагается, что отклонение орбиты на любом азимуте ускорителя распределено нормально, с нулевым математическим ожиданием, а наибольшее значение достигается в точке максимального значения $\beta_{x,z}$ - функций. Среднеквадратичное значение отклонения определяется формулой:

$$\langle x, z \rangle = \frac{\beta_{x,z}^{1/2} \max}{2\rho |\sin \pi \nu_{x,z}|} \left[\sum_i m_i \left\langle \frac{\Delta B_{z,x}}{B_0} \right\rangle^2 S_i \int_{S_i} \beta_{x,z} ds \right]^{1/2},$$

где i - указывает тип структурного элемента, m_i - число однотипных элементов, S_i - эффективная длина, ρ - радиус кривизны в дипольных магнитах, $\frac{\Delta B_x}{B_0} = \alpha B_0$ - в дипольных магнитах, $\frac{\Delta B_z}{B_0} = G \Delta X$ и $\frac{\Delta B_x}{B_0} = G \Delta Z$ - в квадрупольных линзах, G - градиент в линзах. Максимальное отклонение орбиты с вероятностью 95% не будет превышать

$$(x, z)_{\max} = 2 \langle x, z \rangle.$$

Второй метод оценки максимального отклонения орбиты^{/3/} исходит из того, что основной вклад в отклонение орбиты вносят гармоники разложения орбиты в ряд Фурье с номерами, близкими к частотам бетатронных колебаний. Максимальное отклонение орбиты для 4-х гармоник разложения (в ТИСе это 3+6 для горизонтальной плоскости и 2+5 для вертикальной) с вероятностью 98% не превышает значения

$$(x, z)_{\max} = 2 \left[\sum_{n=N-1}^{N+2} \langle x, z \rangle_n^2 \right]^{1/2} \left[1 + (\nu_{x,z} - M_{x,z})(1 - \nu_{x,z} + M_{x,z}) \right],$$

где $\langle x, z \rangle_n = \frac{\nu_{x,z}^2 \beta_{x,z}^{1/2} \max}{(\nu_{x,z}^2 - n^2) \pi \rho} \left[\sum_i m_i \left\langle \frac{\Delta B_{z,x}}{B_0} \right\rangle^2 S_i \int_{S_i} \beta_{x,z} ds \right]^{1/2}$

- среднеквадратичное значение амплитуды n -ой гармоники. $M_{x,z}$ - целая часть от $\nu_{x,z}$.
Оценки максимального отклонения орбиты, выполненные этими методами, для $\langle \frac{\Delta B_z}{B_0} \rangle = 10^{-3}$; $\langle \alpha \rangle = 3 \cdot 10^{-4}$; $\langle \Delta X \rangle = \langle \Delta Z \rangle = 0,1$ мм дают приблизительно одинаковые результаты: $X_{\max} = 14$ мм, $Z_{\max} = 15$ мм.

Проводилась также численная оценка максимального отклонения замкнутой орбиты. Для двухсот наборов нормально распределенных возмущений с заданными среднеквадратичными значениями находился максимум отклонения по следующей методике. Так как производные x' и z' не меняют своего значения в свободных от поля промежутках, то ищутся те магнитные элементы, где производные имеют противоположный знак на входе и на выходе из элемента. Максимум отклонения достигается в той точке магнитного элемента, где производная обращается в ноль. На рис.3 представлены гистограммы распределения величины максимального отклонения замкнутой орбиты в X и Z плоскостях. На рис.4 представлены гистограммы распределения максимального отклонения по магнитным элементам.

2. Коррекция замкнутой орбиты

В линейном приближении скорректированная равновесная орбита представляет собой суперпозицию орбит, создаваемых возмущенным магнитным полем синхротрона и полями корректоров. В нормированных пере-

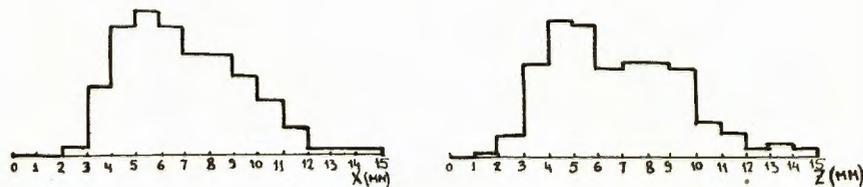


Рис.3.

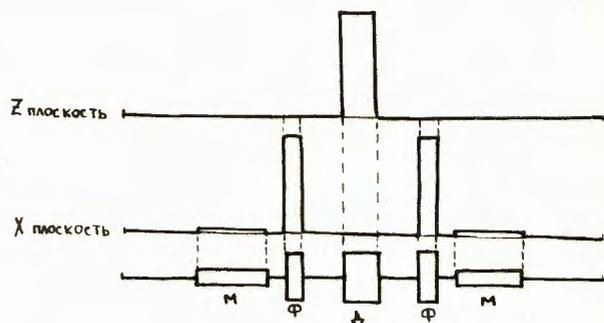


Рис.4.

менных $(\eta, \varphi) / 2$ скорректированная орбита представляется выражением

$$\eta_{\text{скор}}(\varphi) = \eta(\varphi) + \sum_{j=1}^N \eta_j(\varphi),$$

где $\eta(\varphi)$ - описывает отклонение деформированной равновесной орбиты,

$\eta_j(\varphi)$ - описывает орбиту, созданную полем в j -м корректоре.

Функция $\eta_{\text{скор}}(\varphi)$ является решением дифференциального уравнения

$$\tilde{\eta}_{\text{скор}}''(\varphi) + \nu_{x,z}^2 \tilde{\eta}_{\text{скор}}(\varphi) = \nu_{x,z}^2 \beta_{x,z}^{3/2}(\varphi) f(\varphi) \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\tilde{\eta}_{\text{скор}}(\varphi) = \tilde{\eta}_{\text{скор}}(\varphi + 2\pi), \quad \tilde{\eta}_{\text{скор}}'(\varphi) = \tilde{\eta}_{\text{скор}}'(\varphi + 2\pi), \quad (2)$$

где

$$f(\varphi) = \begin{cases} f_i & \text{в } i\text{-м магнитном элементе} \\ u_j & \text{в } j\text{-м корректоре} \\ 0 & \text{вне их.} \end{cases}$$

Если разрешить уравнение (1) с условиями (2), то для скорректированной орбиты получим следующее выражение

$$\eta_{\text{скор}}(\varphi) = \eta(\varphi) + \sum_{j=1}^N u_j \int_{\psi_j - \frac{\Delta\psi_j}{2}}^{\psi_j + \frac{\Delta\psi_j}{2}} \beta_j^{3/2}(t) \cos(\pi - |\varphi - t|) dt, \quad (3)$$

где ψ_j и $\Delta\psi_j$ - координата центра и длина j -го корректора.

Скорректированная орбита является непрерывной 2π -периодической функцией от φ и поэтому ее можно представить в виде ряда Фурье

$$\eta_{\text{скор}}(\varphi) = \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^N u_j\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k + \frac{2\sin\pi\nu}{\nu} \frac{\nu^2}{\nu^2 - k^2} \sum_{j=1}^N u_j \cos k\psi_j\right) \cos k\varphi + \left(b_k + \frac{2\sin\pi\nu}{\nu} \frac{\nu^2}{\nu^2 - k^2} \sum_{j=1}^N u_j \sin k\psi_j\right) \sin k\varphi,$$

где a_k и b_k - коэффициенты разложения $\eta(\varphi)$ в ряд Фурье. Нашей задачей является минимизация отклонения $\eta_{\text{скор}}(\varphi)$, исходя из известных значений $\eta(\varphi_i)$, $i=1, \dots, M$, за счет выбора сил корректоров u_j , $j=1, \dots, N$.

3. Методы коррекции замкнутой орбиты

Будем минимизировать отклонение $\eta_{\text{скор}}(\varphi)$ следующими способами:

1. Минимизировать сумму квадратов отклонений в измеренных M точках φ_i , $i=1, \dots, M$ /4.10/

$$\min_{u_j} \sum_{i=1}^M (\eta(\varphi_i) + \sum_{j=1}^N u_j \eta_j(\varphi_i))^2 \quad (4)$$

2. Минимизировать квадратичное отклонение на отрезке $[0, 2\pi]$ /4.13/

$$\min_{u_j} \int_0^{2\pi} (\eta(\varphi) + \sum_{j=1}^N u_j \eta_j(\varphi))^2 d\varphi \quad (5)$$

3. Подавлять гармоники в разложении $\eta(\varphi)$ в ряд Фурье, имеющие наибольшую амплитуду /4.9/.

Рассмотрим методы 1,2,3 более подробно с точки зрения удобства применения, скорости, экономии памяти ЭВМ. Учитывая, что в выражении (3) интегрирование проводится по отрезкам длиной $\Delta\psi_j \ll 2\pi$, заменим интегралы средним значением и обозначим

$$\tilde{u}_j = u_j \Delta\psi_j \beta_j^{3/2}(\psi_j).$$

Тогда $\eta_{\text{корр}}(\varphi) = \eta(\varphi) + \sum_{j=1}^N \tilde{u}_j \cos \nu(\pi - |\varphi - \psi_j|)$.

Для нахождения минимума квадратичных функционалов (4) и (5) приравняем к нулю частные производные по \tilde{u}_j , в результате получим системы линейных алгебраических уравнений для нахождения \tilde{u}_j :

$$A_1^T A_1 u = A_1^T b_1 \quad \text{и} \quad A_2 u = b_2,$$

где

$$A_1 = \{a_{ij}^1\} = \cos \nu(\pi - |\varphi_i - \psi_j|), \quad i=1,2,\dots,M; \quad j=1,2,\dots,N,$$

$$A_2 = \{a_{ij}^2\} = \int_0^{2\pi} \cos \nu(\pi - |\varphi - \psi_i|) \cos \nu(\pi - |\varphi - \psi_j|) d\varphi = \\ = \pi \cos \nu(\pi - |\psi_i - \psi_j|) - |\psi_i - \psi_j| \sin \pi \nu \sin \nu(\pi - |\psi_i - \psi_j|) - \frac{\sin 2\pi \nu \cos \nu(\pi - |\psi_i - \psi_j|)}{2}, \\ i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Матрица A_1 может получаться вырожденной в зависимости как и от места расположения датчиков и корректоров, так и от их взаимного расположения. Например, при $\varphi_i < \psi_j$ для любых i и j $\text{rang}(A) = 1$. Поэтому нахождение нормального решения системы требует применения методов регуляризации [5]. Для этого решается система

$$(A_1^T A_1 + \alpha E) u = A_1^T b_1,$$

где $\alpha > 0$, E - единичная матрица. Параметр α выбирается из условия $\|A_1 u - b_1\| \leq \epsilon$, $\epsilon = 0,01$.

Матрица A_2 является матрицей Грама для системы функций $\cos \nu(\pi - |\varphi - \psi_j|)$, $j=1, \dots, N$. Эта система функций линейно независима. Действительно, если бы эти функции были линейно зависимы, то хотя бы одна из них являлась бы линейной комбинацией остальных:

$$\cos \nu(\pi - |\varphi - \psi_{j_0}|) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^N a_j \cos \nu(\pi - |\varphi - \psi_j|). \quad (6)$$

Рассмотрим левую и правую часть выражения (6) в такой окрестности точки ψ_{j_0} : $[\psi_{j_0} - \delta, \psi_{j_0} + \delta]$, чтобы в нее не попали точки ψ_j , $j=1, \dots, N$, $j \neq j_0$. Правая часть выражения (6) в этой окрестности является непрерывной функцией, а левая имеет особенность в точке ψ_{j_0} . Следовательно, предположение о линейной зависимости функций неверно. Отсюда следует, что матрица A_2 всегда является симметричной положительно определенной матрицей и не требует дополнительных затрат при ее обращении.

Что касается метода 3, то для него можно выписать явные выражения для сил корректоров:

$$\tilde{u}_j = -\frac{\nu}{2 \sin \pi \nu} \int_0^{2\pi} \frac{\eta(\varphi)}{U_j(\psi_j)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} U_j''(\varphi) + U_j(\varphi) \right) d\varphi,$$

где

$$U_j(\varphi) = \sin \frac{\varphi - \psi_j}{2} \dots \sin \frac{\varphi - \psi_{j-1}}{2} \sin \frac{\varphi - \psi_{j+1}}{2} \dots \sin \frac{\varphi - \psi_N}{2}.$$

Таким образом, метод 3 не требует обращения матриц, поэтому наиболее экономичный, но менее точный из рассмотренных.

4. Численные эксперименты

Для заданных допусков на возмущения (п.1) методами 1,2,3 проводилась коррекция равновесной орбиты. На рис.5 представлены гистограммы распределения максимального отклонения деформированной равновесной орбиты после ее коррекции.

Численные эксперименты по моделированию коррекции замкнутой орбиты позволяют сделать следующие выводы:

- в рамках заданных допусков на возмущения магнитного поля и ошибок в востровке магнитов, отклонение деформированной орбиты от идеальной не превышает 15 мм;

- коррекция орбиты описанными методами позволяет уменьшить отклонение орбиты до 3,5 мм в горизонтальной плоскости и 2 мм - в вертикальной. Для этого достаточно использовать 16 датчиков и 16 корректоров;

- увеличение числа датчиков не приводит к существенному уменьшению максимального отклонения. Уменьшение же числа датчиков и корректоров до 13 приводит к отклонению орбиты, которое превышает требуемое.

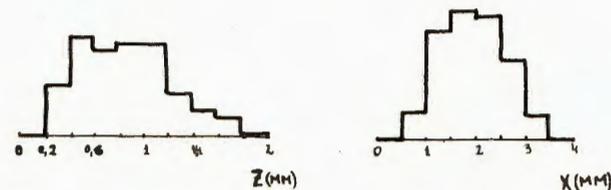


Рис.5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балдин А.М. и др. ОИЯИ, 9-11796, Дубна, 1978.
2. Брук Г. Циклические ускорители заряженных частиц. Атомиздат, М., 1970.
3. Gluckstern R.L. Particle Accelerators, 1978, vol.8, p.203.
4. Динев Д. ОИЯИ, Р9-82-504, Дубна, 1982.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. "Наука", М., 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 февраля 1984 года.

Жидков Е.П., Михайлов В.А., Федоров А.В.
11-84-61
Моделирование коррекции деформированной равновесной орбиты
в тяжелоионном синхротроне

Рассматриваются методы коррекции равновесной орбиты для проектируемого в ОИЯИ тяжелоионного синхротрона. Получено выражение для отклонения равновесной орбиты, позволяющее находить методы коррекции минимизацией этого отклонения в различных нормах. Рассматриваются вопросы использования этих методов при моделировании коррекции на ЭВМ. На основе заданных среднеквадратичных значений возмущений магнитного поля и ошибок в установке магнитных элементов, приводился аналитический и численный расчет максимального отклонения деформированной равновесной орбиты. Исходя из полученного максимального и требуемого отклонения равновесной орбиты, находятся необходимое качество коррекции и необходимое число корректоров. Приводятся результаты численного моделирования максимального отклонения и коррекции равновесной орбиты.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод авторов.

Zhidkov E.P., Mikhailov V.A., Fedorov A.V.
11-84-61
Simulation of Closed Orbit Correction
in the Heavy-Ion Synchrotron

Methods are considered for correction of the closed orbit in the Heavy-Ion Synchrotron of the projected JINR Accelerating Complex. The expression for the closed orbit distortion is obtained and the possibility is shown to find the method of closed orbit correction by minimization of this distortion in different norms. Some problems of application of these methods for the correction simulation by a computer are examined. Analytical and numerical calculations of the maximum orbit distortion are made based on the given mean square values of the magnetic field errors and the magnet disalignments. The necessary quality of correction and the necessary numbers of correctors are obtained through the numerical simulation of closed orbit correction. The results of such simulation and calculation of the maximum orbit distortion are presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna 1984