187/VI 84

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

11-84-238

В.П.Елисеев, В.В.Корняк, Р.Н.Федорова

REDUCE-ПРОГРАММА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СИММЕТРИЙ ЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1984

I. Введение

Идеи и принципы симметрии играют важную роль в математической физике. Рассматривая случаи точных решений дифференциальных уравнений, можно обнаружить, что большинство из них основано на использовании симметрии уравнений относительно некоторых преобразований. Наиболее часто используемые преобразования - точечные, контактные и Ли-Беклунда/I/. Известны также другие типы преобразований, успешно применявшиеся для исследования симметрийных свойств некоторых классов дифференциальных уравнений/2/. Знание группы симметрий можно использовать различными способами. Можно, например, искать инвариантные решения, строить разложения Ли-Вессио, получать законы сохранения и т.д./I/. Отметим также нелинейный принцип суперпозиции, позволяющий для некоторых нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений выразить общее решение через несколько частных/3/.

В случае точечных и контактных преобразований вычисление группы симметрий (точнее, алгебры Ли этой группы) системы дифференциальных уравнений представляет собой, в общем, стандартную, хотя и трудоемкую задачу, поэтому для ее решения целесообразно использовать ЭВМ. В недавно опубликованной статье/4/ был предложен пакет REDUCE-программ, позволяющих получать алгебру Ли точечных симметрий. Недостатком этого пакета является неуниверсальность программ, т.е. программы нужно модифицировать для каждого типа уравнений. (Тип определяется количеством зависимых и независимых переменных и наивысшим порядком производных). Мы предлагаем универсальную программу на языке системы REDUCE-2/5/ для получения системы определяющих уравнений алгебры Ли точечных и контактных симметрий. На вход программы подается система дифференциальных уравнений, обыкновенных или в частных производных, - на выходе получается система определяющих уравнений, прошедшая дополнительную обработку, заключающуюся в устранении всех линейных и значительной части дифференциальных зависимостей. Такая обработка позволяет сделать систему определяющих уравнений значительно более компактной и удобной для последующего решения вручную. Кроме того, при вводе и выводе используются обозначения для функций и производных, близкие к символике, принятой в математике, что также повышает удобство работы с программой.

При описании основных идей группового анализа будем придерживаться обозначений книги /I/. Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{Z}_k$, состоящее из векторов вида

$$z_k=(x,y,y_1,\dots,y_k)\ .$$

Здесь x – n-мерный вектор независимых переменных, y – m-мерный вектор пространства зависимых переменных, координаты y_i соответствуют частным производным i-го порядка. Система дифференциальных уравнений с максимальным порядком производных k задается в пространстве $\mathbb{Z}_k$ многообразием вида

$$\varepsilon(z_k)=0\ , \qquad \text{(I)}$$

где ε – некоторое отображение из $\mathbb{Z}_k$ в $\mathbb{R}^s$, s – число уравнений.

Рассмотрим вначале точечные преобразования. Пусть однопараметрическая группа точечных преобразований задается уравнениями вида

$$x'=f(x,y,a),\ y'=g(x,y,a)\ , \qquad (2)$$

удовлетворяющими условиям

$$f(x,y,0)=x \quad \text{и} \quad g(x,y,0)=y\ .$$

Здесь a – параметр группы. Разложение f и g в окрестности $a=0$

$$x'=x+a\,\xi(x,y)+O(a^2)$$
$$y'=y+a\,\eta(x,y)+O(a^2)$$

позволяет определить алгебру Ли с помощью векторного поля

$$X=\xi\cdot\partial_x+\eta\cdot\partial_y\ . \qquad (3)$$

Для того, чтобы определить действие алгебры Ли на функции, содержащие переменные y_k, вводится k-е продолжение поля (3)

$$X_k=\xi\cdot\partial_x+\eta\cdot\partial_y+\eta_1\cdot\partial_{y_1}+\dots+\eta_k\cdot\partial_{y_k}\ , \qquad (4)$$

где функции $\eta_1,\dots,\eta_k$ выражаются через ξ и η рекуррентно по формуле продолжения

$$\eta_{k+1}=D\eta_k-y_{k+1}\cdot D\xi\ , \quad k=0,1,2,\dots \qquad (5)$$

Здесь $\eta_0\equiv\eta$ и $D=\partial_x+y_1\cdot\partial_y+\dots+y_k\,\partial_{y_{k-1}}+\dots$ – оператор полного дифференцирования. Симметрия системы уравнений относительно преобразований группы (2) в терминах алгебры Ли выражается равенством

$$X_k\,\varepsilon(z_k)=0\ , \qquad (6)$$

которое должно выполняться на многообразии $\varepsilon(z_k)=0$, т.е. на решениях системы уравнений. Для вычисления полной алгебры Ли точеч-

ных преобразований нужно действовать следующим образом:

I) считая ξ и η неопределенными функциями x и y, выразить через них η_i по формулам (5);

2) затем, подставив ξ, η и η_i в (4), вычислить выражение (6);

3) перейти на многообразие, использовав связь между переменными y_i, задаваемую уравнениями (I), чтобы исключить некоторые из y_i (при $i>0$) из результата предыдущего пункта;

4) полученное выражение разложить по степеням y_i ($i>0$) и приравнять к нулю коэффициенты при различных степенях, поскольку в случае точечных преобразований ξ и η не зависят от производных.

Эти коэффициенты представляют собой линейные однородные выражения относительно ξ, η и их производных по x и y. Условие равенства этих выражений нулю и дает искомые определяющие уравнения. Система определяющих уравнений обычно сильно переопределена, поэтому, как правило, удается получить наиболее общее ее решение и, таким образом, найти полную алгебру Ли.

Касательными преобразованиями называются преобразования, зависящие не только от значений функций, но и от значений производных, т.е. преобразования вида

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y,y_1,y_2,\dots,a) \\ y' &= g(x,y,y_1,y_2,\dots,a) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y'_i &= h_i(x,y,y_1,y_2,\dots,a) \end{aligned} \qquad (7)$$

При этом координаты продолженного векторного поля $\xi,\eta,\eta_1,\eta_2,\dots$ связаны между собой формулой продолжения (5). Известно, что нетривиальные касательные группы (т.е. не сводящиеся к точечным) возможны только в 2 случаях:

I). Если ряд y_1, y_2, ... в формулах (7) неограничен. В этом случае преобразования называются преобразованиями Ли-Беклунда /6/.

2). Если пространство зависимых переменных одномерно, то возможны нетривиальные касательные преобразования 1-го порядка, называемые обычно контактными:

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y,y_1,a) \\ y' &= g(x,y,y_1,a) \\ y'_1 &= h(x,y,y_1,a) \end{aligned} \qquad (8)$$

Известно, что координаты векторного поля

$$X = \xi^i(x,y,\underset{1}{y})\,\partial_{x^i} + \eta(x,y,\underset{1}{y})\,\partial_y + \zeta_i(x,y,\underset{1}{y})\,\partial_{y^i}$$

контактных преобразований имеют следующие представления :

$$\xi^i = -\frac{\partial w}{\partial y_i}, \quad \eta = w - y_i\frac{\partial w}{\partial y_i}, \quad \zeta_i = \frac{\partial w}{\partial x^i} + y_i\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (9)$$

с некоторой функцией $w=w(x,y,\underset{1}{y})$. Алгоритм вычисления алгебры Ли контактных преобразований аналогичен описанному выше алгоритму для случая точечных преобразований. Отличие состоит лишь в том, что для функций ξ , η и ζ используется представление (9) и определяющие уравнения получаются в результате разложения выражения (6) на многообразии $\mathcal{E}(\underset{k}{z})=0$ по степеням переменных $\underset{i}{y}$ при $i>1$, т.к. контактные преобразования зависят от первых производных.

2. Описание программы

Унифицируем обозначения в формулах предыдущего раздела. Представим координаты пространства $\mathbb{Z}_k$ в виде линейно упорядоченной последовательности, причем переменные $\underset{i}{y}$ должны располагаться в лексикографическом порядке. Например, пусть $n=m=2$, тогда координаты пространства $\mathbb{Z}_k$ упорядочиваются следующим образом :

$$x^1, x^2, y^1, y^2, y^1_1, y^1_2, y^2_1, y^2_2, y^1_{11}, y^1_{12}, y^1_{22}, y^2_{11}, y^2_{12}, y^2_{22}, \ldots$$

и т.д. Обозначим i -й элемент такого ряда через z_{ki} . Аналогичный ряд введем для координат векторного поля (4), обозначив элементы ряда через c_{zi} . Тогда

$$\underset{k}{X} = \sum_{i=1}^{N} c_{zi}\,\partial_{z_{ki}} .$$

Здесь $N=n+m\cdot\binom{n+k}{n}$ – размерность пространства $\mathbb{Z}_k$. По такой же схеме введем линейный порядок для функций ξ , η и их производных по x и y , обозначив j -й элемент через $\overset{*}{z}_j$. Для рассмотренного выше примера ряд $\{\overset{*}{z}_j\}$ таков

$$x^1, x^2, y^1, y^2, \overset{*}{x}{}^1, \overset{*}{x}{}^2, \overset{*}{y}{}^1, \overset{*}{y}{}^2, \overset{*}{x}{}^1_{x^1}, \overset{*}{x}{}^1_{x^2}, \overset{*}{x}{}^1_{y^1}, \ldots, \overset{*}{y}{}^2_{y^2}, \overset{*}{x}{}^1_{x^1x^1}, \overset{*}{x}{}^1_{x^1x^2}, \overset{*}{x}{}^1_{x^1y^1}, \ldots$$

Здесь использованы обозначения $\xi \equiv \overset{*}{x}$, $\eta \equiv \overset{*}{y}$. В случае контактных преобразований вводится ряд для характеристической функции w вида

$$x^1, x^2, \ldots, u, p_1, p_2, \ldots, w, w_{x^1}, w_{x^2}, \ldots, w_u, \ldots, w_{p_1}, w_{p_2}, \ldots .$$

Здесь u – зависимая переменная, а p_i соответствует переменной u_{x^i} . J-й элемент этого ряда также будем обозначать через $\overset{*}{z}_j$. Введенные упорядочивания позволяют унифицировать вычислительные алгоритмы. Соответствие обозначений в тексте и программе дается в таблице

Текст	Программа
z_{ki}	ZK(I)
c_{zi}	CZ(I)
$\overset{*}{z}_j$	ZA(J)

Программа состоит из 3 основных частей. I-я часть производит вычисление результата действия продолженного векторного поля на систему уравнений и переход на многообразие (I). 2-я часть выделяет коэффициенты при различных степенях переменных $\underset{i}{y}$. 3-я часть исключает линейные зависимости в системе определяющих уравнений по методу Гаусса-Жордана с учетом дифференциальных следствий одночленных уравнений. При вводе близкие к математической символике обозначения преобразуются в выражения ZK(I) , а на выводе выполняется обратное преобразование выражений ZA(J). Например, если имеются независимые переменные X , T и зависимая U , то на вводе производную U_{XT} нужно представлять в виде U]'X],T . При выводе на печать это выражение будет иметь вид U'X,T . (В других реализациях системы REDUCE вместо] используется ! или знак подчеркивания). Программа преобразует U_{XT} в ZK(7) . Аналогично этому на выводе ZA(15) преобразуется в X # X,U , что означает производную $\overset{*}{X}_{XU}$. Заметим также, что использование операторов ZK(I) и ZA(I) для представления переменных $y^{\ell}_{i_1\ldots i_s}$ и производных позволяет заметно сэкономить память ЭВМ. Например, выражению ZA(15) в обозначениях работы /4/ соответствует выражение DF(XI(1,X(1),X(2),U),X(1),U) , которое имеет значительно более сложную списковую структуру. В случае контактных преобразований для производных характеристической функции W используются обозначения типа W # X,U,PX . Здесь PX обозначает производную зависимой функции по переменной X . Для выполнения всех этих преобразований были определены в символьном режиме системы REDUCE простые операторы. Перечислим процедуры, используемые в программе, с кратким описанием выполняемых ими функций.

Символьные процедуры:

I) RSUBST(A,B,C) – подставляет A в список C вместо B .

2) RCONC(A,B) – из символов A и B строит символ, являющийся их конкатенацией.

3) RINTERN(A) – вставляет в OBLIST символ A , построенный с помощью RCONC . Это нужно для отождествления A с таким же символом, использованным при вводе.

4) RLENGTH(A) – вычисляет длину списка A . Используется в процедуре GAUSS для выбора "главного элемента".

Процедуры в алгебраическом режиме:

5) BINC(N,M) – вычисляет биномиальные коэффициенты $\binom{N}{M}$.

6) PROCD(N,M,P,I,J) – эта процедура в зависимости от конфигурации входа выполняет действия, представленные в таблице

Конфигурация входа	Действие
(N,M,]'или]#,I,Ø)	строит символ, соответствующий ZK(I) или ZA(I) и вставляет его в OBLIST.
(N,M,Ø,I,J)	вычисляет порядковый номер производной I-го элемента линейно упорядоченного ряда по J-й переменной.
(N,M,Ø,I,Ø)	по порядковому номеру переменной $y^{\ell}_{i_1 i_2 \dots i_k}$ вычисляет порядковый номер переменной $y^{\ell}_{i_2 \dots i_k}$, при этом глобальной переменной JD присваивается значение i_1 , а переменной KD – значение K .

7) EXTENSION(L) – алгоритмическая версия формулы продолжения (5), L – порядковый номер координаты продолженного вектора (4) в ряду $\{C_{zi}\}$.

8) COEFFS( ) – выделяет определяющие уравнения как коэффициенты при различных степенях переменных y_i ($i > 0$ или $i > 1$).

9) GAUSS( ) – устраняет линейные зависимости и дифференциальные следствия одночленных уравнений. Используется процедура Гаусса-Жордана с двумя отличиями от применяемой в численной математике. Во-первых, вместо перестановок производится запоминание строк, использовавшихся для подстановок, т.к. перестановка аналитических выражений довольно трудоемкая операция. Во-вторых, опыт показал, что подстановки следует начинать с более коротких строк, т.к. иначе выражения сильно разрастаются. Поэтому в процедуре GAUSS используется выбор "главного элемента" – наиболее короткой строки.

3. <u>Как пользоваться программой. Примеры.</u>

Пользователь должен ввести:

N – число независимых переменных,

M – число зависимых переменных,

NE – число уравнений,

KM – максимальный порядок производных,

VR(1), VR(2),...., VR(N+M) – символы, используемые для обозначения независимых и зависимых переменных (вначале перечисляются независимые),

FF(1),....,FF(NE) – левые части уравнений, производные в которых должны быть записаны в соответствии с порядком, заданным в ряду VR(1),...,VR(N).

SZ(1),....,SZ(NE) – символы производных, вместо которых нужно выполнить подстановки при переходе на многообразие. Необходимо выбирать производные, линейно входящие в соответствующие уравнения.

Очевидно, что если уравнение можно явно разрешить относительно производной, то этому требованию можно удовлетворить. Если NE=M , что чаще всего бывает, то NE можно не задавать. Если в уравнениях имеется высокая степень какой-либо производной, то может возникнуть необходимость ввода числа PM . По умолчанию PM=KM+5 , что достаточно для обработки уравнений с максимальной степенью производной, равной четырем. Если необходимо получить определяющие уравнения контактных преобразований – нужно переменной TANG на вводе присвоить значение, равное I.

Примеры:

Точечные преобразования.

I. Уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ)

$$U_t+UU_x+U_{xxx}=0 \quad . \tag{I0}$$

Вход:

```
M:=NE:=1ǾN:=2ǾKM:=3ǾVR(1):=XǾVR(2):TǾVR(3):=UǾSZ(1):=U]'X],X],XǾ
FF(1):=U]'T+U*U]'X+U]'X],XǾ
```

Выход:

```
INPUT SYSTEM
(1)  U*U'X + U'T + U'X,X,X=0
POINT TRANSFORMATIONS
DETERMINING EQUATIONS (INITIAL NUMBER=21)
(1)      U*U#X + U#T + U#X,X,X=0
(2)        - 3*T#X=0
(3)      3*( -X#X,X + U#X,U)=0
```

```
(4)        - 3*T#U=0
(5)        - 3*X#U=0
(6)       3*X#X - T#T=0
(7)       (2*U*T#T + 3*U# + 9*U#X,X,U - 3*X#X,X,X- 3*X#T)/3=0
(8)       3*U#U,U=0
```

Решение системы уравнений (I)-(8) дает известную 4-параметрическую алгебру Ли группы точечных симметрий уравнения Кортевега-де Фриза (см., например,/6/).

Случай системы уравнений.

2. Уравнения околозвукового установившегося плоскопараллельного течения газа/I/.

$$U_Y = V_X \quad , \quad V_Y = -UU_X \qquad (II)$$

Вход:

```
M:=N:=2;  KM:=1;
VR(1):=X;VR(2):=Y;VR(3)=U;VR(4):=V;SZ(1):=U]'Y;SZ(2):=V]'Y;
FF(1):=U]'Y-V]'X;FF(2):=V]'Y+U*U]'X;
```

Выход:

```
INPUT SYSTEM
(1)        - V'X + U'Y=0
(2)       U*U'X + V'Y=0
POINT TRANSFORMATIONS
DETERMINING EQUATIONS (INITIAL NUMBER=10)
(1)    U#Y - V#X=0
(2)    U#U - V#V + X#X - Y#Y=0
(3)     - Y#U + X#V=0
(4)     - (U*Y#X + X#Y)=0
(5)    U*U#X + V#Y=0
(6)    2*(U*U#V + V#U)=0
(7)     - (U*Y#V + X#U)=0
(8)     - 2*U*V#V + 2*U*U#U + U#=0
```

Оба примера рассматривались в/4/. Как видим, в случае уравнения КдФ, устранение лишних связей привело к существенному уменьшению числа определяющих уравнений. Вообще говоря, чем выше порядок производных в уравнениях, тем значительнее упрощение.

Контактные преобразования.

3. Уравнение стационарного околозвукового течения газа, выраженное через потенциал скоростей/6/. Если для системы (II) ввести потенциал скоростей Ψ, такой, что

$$U=\frac{\partial\Psi}{\partial x}\ ,\ V=\frac{\partial\Psi}{\partial y}\ ,$$

то из (II) можно получить уравнение

$$\Psi_x\Psi_{xx} + \Psi_{yy} = 0\ . \qquad (I2)$$

Поскольку здесь пространство Ψ одномерно, возможно расширение группы симметрий, если использовать контактные преобразования.

Вход:

```
M:=1;N:=KM:=2;
VR(1):=X;VR(2):=Y;VR(3):=PSI;SZ(1):=PSI]'Y],Y;
FF(1):=PSI]'X*PSI]'X],X+PSI]'Y],Y;
TANG:=1;
```

Выход:

```
INPUT SYSTEM
(1)  PSI'X,X*PSI'X + PSI'Y,Y=0
CONTACT TRANSFORMATIONS
DETERMINING EQUATIONS (INITIAL NUMBER=5)
(1)     W#PSI,PSI*PY^2 + W#PSI,PSI*PX^3+ W#X,X*PX+ 2*PY*W#Y,PSI
          + W#Y,Y + 2*PX^2 * W#X,PSI=0
(2)     2*(W#PSI,PX*PY + W#Y,PX + W#X,PY*PX + PX^2*W#PSI,PY)=0
(3)     W#PX,PX + PX*W#PY,PY=0
(4)     W#PSI*PX + 2*W#X,PX*PX + 2*W#PSI,PX*PX^2-2*W#PSI,PY*PY*PX
          + W#x - 2*PX*W#Y,PY=0
```

Уравнение (I2) имеет шестимерную группу точечных симметрий, тогда как группа контактных преобразований бесконечномерна. Наличие столь широкой группы симметрий позволяет свести уравнение (I2) к линейному с помощью так называемого преобразования годографа.

Литература

I. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. "Наука", М., 1978, с.400.

2. Фущич В.И. О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных. - В кн: Теоретико-групповые методы в математической физике. Киев. Изд-во Ин-та математики АН УССР, Киев, 1978, с.5-44.

3. Winternitz P. Nonlinear Action of Lie Groups and Superposition Principles for Nonlinear Differential Eqnations. Physica, 114A, 1982, p.105-113.
4. Schwarz F.A REDUCE Package for Determining Lie Symmetries of Ordinary and Partial Differential Eqnations. Computer Physics Communications. 1982, 27, No2, p. 179-186.
5. Hearn A.C. REDUCE 2 User's Manual, Salt Lake City, 1974.
6. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. "Наука", М., 1983, с.280.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 апреля 1984 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Елисеев В.П., Корняк В.В., Федорова Р.Н. 11-84-238

REDUCE-программа для определения симметрий Ли дифференциальных уравнений

Предложена программа на языке аналитического программирования REDUCE-2 для получения системы определяющих уравнений алгебры Ли точечных и контактных симметрий. Программа обрабатывает систему определяющих уравнений, устраняя все линейные и значительную часть дифференциальных зависимостей, что делает систему более компактной и удобной для последующего решения. При вводе и выводе используются обозначения, близкие к символике, принятой в математике, что также повышает удобство работы с программой. Программа универсальна и не требует модификации для каждого типа уравнений, определяемого количеством зависимых и независимых переменных.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Eliseev V.P., Kornyak V.V., Fedorova R.N. 11-84-238

REDUCE - A Program for Determining Differential Equations Lie Symmetries

The program written in REDUCE-2 analytical programming language is proposed for obtaining a system of determining equations of Lie algebra of point and contact symmetries. The program handles the determining equation system eliminating all the linear and considerable part of differential functions. It makes the system more compact and convenient for the following solution. At the input and output signs are used near to symbols, accepted in mathematics, which is also convenient when operating with the program. The program is multipurpose and does not require modifications for each types of equations determined by a quantity of dependent and independent variables.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984