сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

11-83-881

Р.М.Ямалеев

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПУТЕМ РЕДУКЦИИ К ИНТЕГРАЛЬНОМУ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЯМ

1983

ОБОЗНАЧЕНИЯ ЧАСТО УПОТРЕБЛЯЕМЫХ СИМВОЛОВ И СЛОВОСОЧЕТАНИЙ

1. L - дифференциальный оператор с потенциальной функцией: $L \equiv d^2/dx^2 + V(x)$.
2. $\int K$ - интегральный оператор вида $\int Ky \equiv \int_a^b K(x, x')y(x')dx'$.
3. $\int GK$ - ядро интегрального оператора $\int GK \equiv \int_a^b G(x,x'')K(x'',x')dx''$.
4. ИУ - интегральное уравнение.
5. ДУ - дифференциальное уравнение.
6. ИДУ - интегродифференциальное уравнение.

1. МЕТОД РЕДУКЦИИ ИДУ К ИУ И ДУ

В настоящее время разработаны достаточно эффективные методы численного решения ДУ и ИУ /см., например, /[1,2]/. Поэтому, когда речь идет о решении ИДУ, естественно, наиболее простой путь - попытаться свести его к решению ИУ или ДУ. Метод сведения ИДУ к ИУ и ДУ состоит в следующем.

Рассмотрим линейное неоднородное ИДУ следующего вида:

$$Ly + \lambda y + \int Ky = F, \qquad /1.1/$$

с заданными краевыми /или начальными/ условиями. Допустим, что нам известна функция Грина $G(x, x')$ для оператора L. Она удовлетворяет уравнению

$$(L + \lambda)\, G(x, x') = \delta(x - x'). \qquad /1.2/$$

Тогда ИДУ /1.1/ можно переформулировать в ИУ вида

$$y + \int Ny = f, \qquad /1.3/$$

где

$$N = \int GK, \quad f = \int GF. \qquad /1.4/$$

Теперь допустим, что ядро ИДУ $K(x, x')$ представимо /или аппроксимируемо с заданной точностью/ в виде конечной суммы:

$$K(x,x') = \sum_{n=1}^{N'} a_n \phi_n(x) \psi_n(x'). \qquad /1.5/$$

Подставляя /1.5/ в /1.1/, получим ДУ:

$$Ly + \sum_{n=1}^{N} d_n \phi_n = F, \qquad /1.6/$$

здесь

$$d_n = \int_a^b \psi_n(x') y(x') dx'. \qquad /1.7/$$

Будем искать решения /1.6/ в виде суммы N + 1 неизвестных функции:

$$y = y_0 + \sum_{n=1}^{N} d_n y_n, \qquad /1.8/$$

которые находятся как решения уравнений

$$Ly_0 = F, \quad Ly_n = -\phi_n \quad (n = 1,2,\ldots N). \qquad /1.9/$$

Коэффициенты d_n удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{N} d_k B_{nk} = b_n, \qquad /1.10/$$

где

$$B_{nk} = \delta_{nk} - \int_a^b \psi_n(x') y_k(x') dx',$$
$$b_n = \int_a^b y_0(x) \psi_n(x) dx. \qquad /1.11/$$

Таким образом, если имеет место /1.5/, то ИДУ /1.1/ сводится к системе несвязанных ДУ /1.9/ и к системе алгебраических уравнений /1.10/ [3].

Здесь мы рассмотрели два пути решения ИДУ: /I/ ИДУ свели к ИУ; /II/ ИДУ свели к ДУ и системе алгебраических уравнений. Метод /II/ более прост, однако он применим только в случае, когда справедливо представление /1.5/. В случае численной реализации метода /I/ мы сталкиваемся с необходимостью решения уравнения /1.2/. δ - функция в правой части /1.2/ создает большие неудобства при численной реализации метода. В настоящей работе предлагается метод решения ИДУ /обозначим его через /III//, свободный от указанных недостатков. Он является своеобразной модификацией метода /I/. Суть его состоит в следующем.

Рассмотрим ИДУ

$$(L(x) + \lambda) y(x) + \int_a^b K(x,x') y(x') dx' = F(x) \qquad /1.1a/$$

с краевыми условиями $y(a) = A$, $y(b) = B$. Решение /1.1a/ будем искать как решение ИУ вида

$$y(x) + \int_a^b N(x,x') y(x') = f(x). \qquad /1.3a/$$

Уравнения /1.1a/ и /1.3a/ действительно совпадают на решениях, если $N(x,x')$ и $f(x)$ будут удовлетворять уравнениям

$$L(x) f(x) + \lambda f(x) = F(x), \qquad /1.12/$$

$$(L(x) + \lambda) N(x,x') = K(x,x') \qquad /1.13/$$

с краевыми условиями $f(a) = A$, $f(b) = B$, $N(a,x') = N(b,x') = 0$ при $a \le x' \le b$. В этом можно убедиться в результате непосредственной подстановки $y = -\int Ny + f$ в уравнение /1.1a/.

Связь методов /I/ и /III/ выражена в формулах /1.4/. Действительно, умножив правую и левую части уравнения /1.2/ на функцию $K(x',x'')$ и проинтегрировав по переменной x', получим

$(L(x) + \lambda)(\int G(x,x') K(x',x'') dx') = K(x,x'')$, то есть уравнение /1.13/.

Аналогично, умножив /1.2/ на $F(x')$ и проинтегрировав по x', получим /1.12/. Если ядро $K(x,x')$ может быть представлено в виде /1.5/, то

$$N(x,x') = -\sum_{n=1}^{N} a_n y_n(x) \psi_n(x'), \quad f(x) = y_0(x). \qquad /1.14/$$

В этом случае ИУ /1.3/ превращается в алгебраическое уравнение /1.10/. Так устанавливается связь методов /II/ и /III/.

Эффективность метода /III/ находится в прямой зависимости от эффективности применяемых методов для решения ДУ и ИУ. В частности, для решения ИУ /1.3/ можно применять итерационные методы [4]. Если ИУ /1.3/ решать итерационным способом, то нет необходимости решать /1.13/ при каждом X'. В этом случае достаточно найти функцию $R_n(x) = \int_a^b N(x,x') y^{(n)}(x') dx'$ как решение уравнения

$$(L(x) + \lambda) R_n(x) = \Pi_n(x), \qquad /1.15/$$

где $\Pi_n(x) = \int_a^b K(x,x') y^{(n)}(x') dx'$. Здесь $y^{(n)}(x)$ - решение ИДУ после n-й итерации.

2. РЕШЕНИЕ ИДУ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Рассмотрим ИДУ на собственные значения вида

$$\Phi_1(y,\lambda) \equiv Ly + \lambda y + \int Ky = 0 \qquad /2.1/$$

на интервале $[a, b]$ с граничными условиями

$$\Phi_2(y,\lambda) \equiv y_x'(x) + A(\lambda)\, y(x) = 0, \quad (x = a),$$

$$\Phi_3(y,\lambda) \equiv y_x'(x) + B(\lambda)\, y(x) = 0, \quad (x = b) \qquad /2.2/$$

и с условием нормировки

$$\Phi_4(y,\lambda) \equiv \int y^2(x)dx - 1 = 0. \qquad /2.3/$$

Задачу /2.1/-/2.3/ будем решать методом Ньютона-Канторовича [5], с помощью которого нелинейную задачу /2.1/-/2.3/ можно свести к линейной неоднородной задаче на каждом шаге итерации:

$$\Phi'_{i(y,\lambda)}(y_n, \lambda_n)\,\Delta(y,\lambda) = -\Phi_i(y_n, \lambda_n) \quad (i = 1,2,3,4). \qquad /2.4/$$

(y_n, λ_n) - решение, найденное на n-м шаге итерации. Если сходимость процесса обеспечена, то при $n \to \infty$ $(y_n, \lambda_n) \to (y^*, \lambda^*)$, где (y^*, λ^*) - решение задачи /2.1/-/2.3/. Чтобы обеспечить хорошую сходимость /в практических задачах это 3-5 итераций/, необходимо иметь хорошо подобранный спектр начальных значений и функций. При вычислении начальных данных для задач типа /2.1/-/2.3/ можно использовать результаты [6].

Подставляя явный вид функционала из /2.1/-/2.3/, получим

$$L\Delta y + \Delta\lambda y + \lambda\Delta y + \int K\Delta y = -\Phi_1(y,\lambda), \qquad /2.5/$$

$$\Delta y_x' + A_\lambda' \Delta\lambda y + A(\lambda)\,\Delta y = -(y_x' + Ay)\big|_{x=a},$$

$$\Delta y_x' + B_\lambda' \Delta\lambda y + B(\lambda)\,\Delta y = -(y_x' + By)\big|_{x=b}, \qquad /2.6/$$

$$2\int y\,\Delta y\, dx = -(\int y^2 - 1). \qquad /2.7/$$

Представим Δy в следующем виде:

$$\Delta y = v_0 + \mu v, \quad \mu = \Delta\lambda. \qquad /2.8/$$

Из /2.5/-/2.7/ получим следующие уравнения для v_0, v, μ:

$$Lv_0 + \lambda v_0 + \int Kv_0 = -\Phi_1(y,\lambda), \quad v_0' + Av_0 = -\Phi_2(y,\lambda) \quad (x = a),$$

$$v_0' + Bv_0 = -\Phi_3(y,\lambda) \quad (x = b); \qquad /2.9/$$

$$Lv + \lambda v + \int Kv = -y, \quad v' + Av = -A_\lambda' y \quad (x = a), \quad v' + Bv = -B_\lambda y \quad (x = b); \qquad /2.10/$$

$$(2\int yv_0 + 2\int yv\mu) = -(\int y^2 - 1). \qquad /2.11/$$

Уравнение /2.9/ можно записать как однородное краевое уравнение для $z = v_0 + y$:

$$Lz + \lambda z + \int Kz = 0, \qquad z_x' + Az = 0 \quad (x = a),$$

$$z_x' + Bz = 0 \quad (x = b). \qquad /2.12/$$

Как известно, оно имеет только тривиальное решение $z = 0$, таким образом

$$v_0 = -y. \qquad /2.13/$$

ИДУ /2.10/ есть линейное неоднородное уравнение вида /1.1/. Поэтому для решения /2.10/ будем применять метод, описанный в разделе 1.

Коль скоро найдены функции v_0 и v, из условия /2.11/ находим величину $\mu = \Delta\lambda$. Таким образом, согласно /2.8/ мы нашли

$$\Delta y = v_0 + \mu v = -y + \Delta\lambda v. \qquad /2.14/$$

В уравнениях /2.5/-/2.7/ (y, λ) являются начальными приближениями для n-й итерации; обозначим их соответственно через (y_n, λ_n).

Решая уравнения /2.9/-/2.11/, находим Δy_n, $\Delta\lambda_n$. Таким образом, имеем возможность определить начальные приближения для следующей, $n + 1$-й, итерации:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n, \quad \lambda_{n+1} = \lambda_n + \Delta\lambda_n. \qquad /2.15/$$

3. РЕШЕНИЕ ИДУ В ОБЛАСТИ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА

Предположим, что ИДУ

$$Ly + k^2 y + \int Ky = 0 \qquad /3.1/$$

имеет такие операторы L и $\int K$, для которых при $k^2 \geq 0$ существует непрерывный спектр. Тогда можно сформулировать следующую задачу /рассеяния/: найти решения /3.1/ для заданного $k^2 \geq 0$ с начальными условиями

$$y(0) = 0, \quad y'_x(0) = c, \qquad /3.2/$$

c - произвольная константа, определяющая нормировку решения.

Выделим в потенциале /3.1/ короткодействующие (V_k) и дальнодействующие ($V_Д$) члены

$$V(r) = V_Д(r) + V_k(r), \qquad /3.3/$$

а оператор $\int K$, будем полагать, действует в ограниченной области ($r \le R$). Обозначим через $F(r)$ и $G(r)$ регулярное и нерегулярное решения ИДУ

$$Ly + k^2 y + V_Д\, y = 0. \qquad /3.4/$$

С учетом решений /3.4/ асимптотическое поведение решения /3.1/ можно представить в виде

$$y(r) = a(k)\,[\cos\delta(k)\, F(r) - \sin\delta(k)\, G(r)]. \qquad /3.5/$$

Здесь $a(k)$, $\delta(k)$ - амплитуда и фаза рассеяния, относящаяся к короткодействующей части $V(r)$ и $\int K$.

Задачу /3.1/-/3.2/ можно решать в трех различных постановках /7/. В настоящей работе мы будем применять метод В из /7/. Суть этого метода состоит в переформулировке задачи Коши /3.1/-/3.2/ в краевую задачу типа /1.12/-/1.13/:

$$y(0) = 0, \quad y(r)|_{r=R} = c, \qquad /3.6/$$

где c - как и прежде, произвольная константа. При этом нормировка решения определяется с точностью до функции

$$f(r) = \cos\delta(k)\, F(r) - \sin\delta(k)\, G(r). \qquad /3.7/$$

Предполагается, что $r = R$ не является нулем функции /3.7/.

После того как решение ИДУ /3.1/ найдено, с помощью известных формул

$$a^2(k) = [(G(r)\frac{dy}{dr} - ky\frac{d}{dr}G(r))^2 + (F(r)y'_r - kF'_r(r)y^2]/k,$$

$$\delta(k) = \operatorname{arctg}\{\frac{F(r)y'_r - kF'_r(r)y}{G(r)y'_r - kG'_r(r)y}\} \quad (r = R)$$

находим $a(k)$ и $\delta(k)$.

4. ПРИЛОЖЕНИЕ

Метод решения линейного неоднородного ИДУ /1.1/ с заданными краевыми условиями, описанный в разделе 1 /метод /III//, сравнительно просто может быть реализован в виде вычислительной программы. В настоящее время библиотеки математического обеспечения ЭВМ содержат достаточно хорошо разработанные программы ДУ и ИУ, поэтому, используя метод /III/ и обращаясь к библиотечным программам решения ДУ и ИУ, сравнительно простым способом может быть написана программа численного решения ИДУ типа /1.1/. В этом состоит удобство в практической реализации метода /III/. Применение метода представляется наиболее целесообразным и в тех случаях, когда пользователь уже имеет метод и программу решения ДУ с достаточно сложным оператором, но столкнулся с необходимостью включить в уравнение интегральный оператор.

Изложенный метод /III/ не только применим, но и эффективен для численного решения ИДУ с сингулярным ядром в интегральном операторе, поскольку в результате решения ДУ вида

$$LN = K \qquad /4.1/$$

получим несингулярное достаточно гладкое ядро $N(x, x')$. На рисунке приведены кривые $f_k(x) = K(x, x_c)$, $f_N(x) = N(x, x_c)$, где x_c - середина заданного отрезка $[a, b]$. В /4.1/ оператор L имеет вид

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + \lambda + 2/(1 + \exp((x - 3)*0.3)), \qquad /4.2/$$

а ядро

$$K(x, x') = \ln\left|\frac{x + x'}{x - x'}\right|. \qquad /4.3/$$

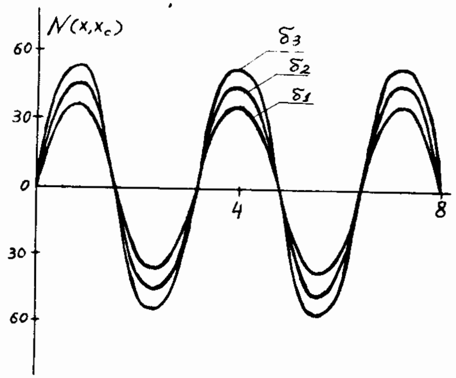
Линия $x = x'$ ($x' = x_c$) имеет логарифмическую особенность. В численных расчетах ядро $K(x, x')$ на линии особенности заменялось на ядро $K(x, x + \delta)$. Кривые $f_k(x)$, $f_N(x)$ приведены для различных δ ($\delta_1 = 10^{-2}$, $\delta_2 = 10^{-6}$, $\delta_3 = 10^{-10}$). Как видно из рисунка, $f_N(x)$ не имеет особых точек. Таким образом, к ядру $N(x, x')$ могут быть применены обычные формулы интерполяции.

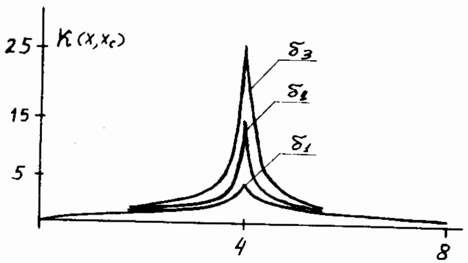
В приведенном примере сингулярная точка ядра /4.3/ может быть устранена. Действительно, вычислим интеграл в интервале $[x - \delta, x + \delta]$:

$$I(\delta) = \int \ln|x - x'|\, y(x')\,dx'. \qquad /4.4/$$

Аппроксимируя в заданном интервале решение $y(x)$ полином и пользуясь табличными интегралами вида $I_{/табл/} = \int \ln z\, z^n dz$, получим

$$\lim_{\delta \to 0} I(\delta) = 0. \qquad /4.5/$$





В табл.1 и 2 приведены результаты проверки метода /III/ в численных экспериментах. Лучшая проверка метода - это сравнение с аналитическим решением. С этой целью проведено сравнение аналитического решения и решения полученного численно ИДУ вида /1.1/ с операторами

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad V(x) = -x^2, \ \lambda = 0, \qquad /4.6/$$

$$K(x, x') = \cos x \cos x' - \sin x \sin x', \qquad /4.7/$$

$$F(x) = -\sin x + V(x)\sin x + ((1 - \cos^2 R)\cos x + (\sin 2R/2 - R)\sin x)/2 \qquad /4.8/$$

с граничными условиями

$$y(0) = 0, \quad y(R) = \sin(R). \qquad /4.9/$$

ИДУ с операторами /4.6/-/4.8/ и граничными условиями /4.9/ имеет аналитическое решение

$$y_A(x) = \sin(x). \qquad /4.10/$$

При расчетах использовалась равномерная сетка узлов на отрезке $0 \le r \le R$, где $R = 8$, с шагом $h = 0,1$.

Задача аппроксимировалась конечно-разностной граничной задачей с использованием трехточечной симметричной разностной схемы точности порядка $O(h^2)$.

Для решения ДУ вида /1.12/-/1.13/ применялся метод прогонки/1/. В табл.1 приведены значения $y_A(x)$ и $y_B(x)$ -решения, полученного в результате численной реализации метода. В табл.2 - несколько собственных значений, полученных на ЭВМ для ИДУ с операторами

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - x^2, \qquad /4.11/$$

$$K(x, x') = K_0/(1 + \exp|\frac{x - x'}{2}| + \exp|\frac{x + x'}{2}|), \quad K_0 = 0{,}1. \qquad /4.12/$$

В качестве начальных были использованы собственные значения оператора L /4.11/:

Таблица 1

x	0,5	I,0	I,5	2,0	2,5	3,0
y_A	0,4794	0,84I4	0,9974	0,9093	0,5985	0,I4II
y_B	0,4784	0,8406	0,9974	0,9098	0,599I	0,I4I6
x	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
y_A	-0,3507	-0,7568	-0,9775	-0,9589	-0,7055	-0,2794
y_B	-0,3504	-0,7567	-0,9775	-0,9590	-0,7056	-0,2795

Таблица 2

Число узлов решения	Начальные собственные значения	Собственные значения ИДУ	Невязка	Число итерации
0	3	2,96I36	$I{,}7 \cdot IO^{-7}$	2
I	5	6,99805	$3{,}7 \cdot IO^{-6}$	2
2	7	I0,99403	$3{,}4 \cdot IO^{-5}$	4
3	9	I4,999II	$2{,}6 \cdot IO^{-8}$	2
4	II	I8,99706	$4{,}4 \cdot IO^{-5}$	4

$$Ly = -k^2 y, \qquad /4.13/$$

с теми же граничными условиями, что и для ИДУ: $y(0) = 0$, $y(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Собственные значения /4.13/ известны: $k^2 = 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$.

Как видно из табл.2, сходимость процесса Ньютона-Канторовича обеспечивается через 2-4 итерации /при этом невязка - правая часть ИДУ /1.1/ - равна $\delta \sim 10^{-5}$/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. Теория разносных схем. "Наука", М., 1977; Бахвалов Н.С. Численные методы. "Наука", М., 1975.

2. Михлин С.Г. Интегральные уравнения. ОГИЗ, Л., 1949.
3. Баатар Д., Пузынин И.В., Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р11-12775, Дубна, 1979.
4. Гареев Ф.А и др. ЖВМ и МФ, 1977, 17, 2, с.407; Виницкий С.И. и др. ОИЯИ, Р4-10942, Дубна, 1977.
5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. "Наука", М., 1977.
6. Гизаткулов М.Х., Пузынин И.В., Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р11-10029, Дубна, 1976.
7. Баатар Д., Пузынин И.В., Ямалеев Р.М. ОИЯИ, 11-81-386, Дубна, 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1983 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Ямалеев Р.М. 11-83-881
Метод численного решения интегродифференциального уравнения путем редукции к интегральному и дифференциальному уравнениям

Предложен численный метод решения интегродифференциального уравнения для задачи на собственные значения и задачи рассеяния. Суть метода состоит в редукции исходного уравнения к интегральному и дифференциальному уравнениям. Рассмотрена связь данного метода с известными методами сведения к интегральному уравнению или к системе несвязанных дифференциальных уравнений. Метод проверен в численных экспериментах.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Yamaleev R.M. 11-83-881
A Numerical Method Solution of Integro-Differential Equation with Reduction to Integral and Differential Equations

A numerical method for solving an integro-differential equation for the eigenvalue problem and scattering problem is presented. The idea of the method consists of reducing the initial equation to integral and differential ones. The relation of this method with the known methods of reducing to the integral equation or to a system of incoherent differential equations is considered. The method is tested in numerical experiments.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой