ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

11-83-866

АЛЕКСАНДРОВ ЛЮБОМИР

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ МЕТОДЫ НЬЮТОНОВСКОГО ТИПА

Специальность: 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна 1983

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук профессор В.Я.АРСЕНИН

доктор физико-математических наук профессор Б.Н.ПШЕНИЧНЫЙ

доктор физико-математических наук профессор В.Н.СТРАХОВ

Ведущая организация:

Вычислительный центр АН СССР, Москва

Защита состоится "14" июня 1984 года в 13 часов на заседании специализированного совета Д 047.01.07 при Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ по адресу: г. Дубна, Московской области.

Автореферат разослан "4" мая 1984 г.

Ученый секретарь специализированного совета
кандидат физико-математических наук

З.М.ИВАНЧЕНКО

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертации разработан новый класс методов ньютоновского типа (R -процессы) для решения нелинейных операторных уравнений. Эти методы обладают некоторой универсальностью. Универсализация методов ньютоновского типа достигается применением пошаговой аддитивной регуляризации*) и ее согласованием с полулокальной теорией сходимости /I-II/, аналогичной теории сходимости метода Ньютона, построенной Л.В. Канторовичем. На основе полученных теоретических результатов в диссертации разработаны новые алгоритмы для решения нелинейных систем уравнений, которые применяются для автоматизации исследования различных классов нелинейных задач ядерной физики.

Актуальность проблемы. Задача автоматизации исследования нелинейных систем численных уравнений (н.с.у.) при помощи ЭВМ, сводящаяся к нахождению всех их решений в заданной области вместе с оценками отклонений псевдорешений от точных, является фундаментальной задачей вычислительной математики. Для ее решения необходимы теоретическая и алгоритмическая разработка универсальных методов решения н.с.у. Рассматриваемые в диссертации R-процессы ньютоновского типа обладают следующими свойствами универсальности: (У1) расширение области сходимости и возможность решения н.с.у. с увеличенным числом неизвестных по сравнению с нерегуляризованными вариантами; (У2) возможность построения эффективных псевдорешений в случае плохой обусловленности, или вырожденности производной; (У3) устойчивость построенных псевдорешений к малым колебаниям входных данных и ошибкам округления; (У4) скорость сходимости R -процессов около решения (в случае невырождения производной) сравнимой со скоростью сходимости нерегуляризованных вариантов.

---

*) K.Levenberg. Quart. Appl.Math., 2, 1944, 164-168; D.Marquart. SIAM J. Appl.Math., 11, 1963, 431-442; А.Н.Тихонов, В.Б.Гласко. ЖВМ и МФ, 5, № 3, 1965, 463-473 и др.

R-процессы – один из классов методов, разрабатываемых в настоящее время, для которого одновременно присущи свойства (УI)-(У4). Это обеспечило решение в ОИЯИ н.с.у. в двух новых постановках: (ПI) автоматизация решения потоков однотипных н.с.у.; (П2) организация эвристического исследования обратных нелинейных задач с неуточненной математической моделью.

В постановке (ПI) решение всех задач потока, вместе с заданием начальных приближений, рассматривается как единый вычислительный процесс. Постановка (П2) основывается на циклическом выполнении действий: (ДI)-исследование вопроса о существовании решений путем численного построения псевдорешений; (Д2)-исследование изолированности найденных псевдорешений вместе с оценкой наследственных ошибок; (Д3)-внесение коррективов в математическую модель задачи на основе полученных численных результатов и привлечения дополнительной информации о задаче.

Работы[/I-25/], положенные в основу диссертации, выполнены в соответствии с проблемно-тематическим планом научно-исследовательских работ Объединенного института ядерных исследований.

<u>Исследования, включенные в диссертацию, имеют следующие цели</u>:

а) Построение единой полулокальной теории сходимости R-процессов, охватывающей подклассы R-процессов типа Ньютона-Канторовича (NK) и Гаусса-Ньютона (GN).

б) Построение полулокальной теории сходимости непрерывных аналогов R-процессов.

в) Вывод законов поведения аддитивных регуляризаторов из полулокальных теорем сходимости.

г) Разработка общего алгоритмического подхода автоматизации исследования н.с.у.

д). Применение R-процессов при решении различных типов реальных нелинейных задач и проверка их эффективности на известных тестовых примерах.

<u>Научная новизна и значимость работы</u>. В диссертации впервые разработана единая теория полулокальной сходимости итеративных R-процессов ньютоновского типа, позволившая сформулировать общий принцип авторегуляризации[/I-4/]. Исходя из полулокальной теории сходимости впервые были построены авторегуляризационные функции, оказавшиеся более удачными при разработке алгоритмов автоматизации исследования н.с.у., чем функции, выведенные из локальных теорем сходимости. В диссертации также впервые разработана полулокальная теория сходимости непрерывных R-процессов типов NK и GN, обобщающая известный подход М.К.Гавурина. В частности, при помощи более точных интегральных неравенств из теории устойчивости дифференциальных уравнений в сравнении с неравенством Гронуоллы доказаны утверждения о применимости R-процессов типов NK и GN в случае вырождения производной в решении. Эти результаты аналогичны теореме Неша-Мозера-Цендера о существовании неявной функции в вырожденном случае. Однако основное значение теории сходимости непрерывных траекторий ньютоновского типа состоит в выяснении общих свойств применяемых аддитивных регуляризаторов и в выводе оценок скоростей сходимости R-траекторий и присоединенных к ним траекторий невязки задачи. При помощи проективного метода интегральных многообразий Н.Н.Боголюбова впервые получено качественное описание поведения стабильной и критической координаты R-траекторий ньютоновского типа. На основе R-процессов разработан общий алгоритмический подход автоматизации исследования н.с.у. при помощи ЭВМ. Универсальные свойства R-процессов позволили разработать новый приближенный метод решения задач на собственные значения в квантовой механике – метод стержневых сплайнов (м.с.с.)[/I3-I6/], при помощи которого решены сингулярные квазипотенциальные уравнения бесконечного порядка из теории поля.

При помощи R-процессов получен ряд новых результатов, относящихся к основным характеристикам ядерных систем и частиц[/I7-24/].

<u>Практическая ценность работы</u>. Универсальные алгоритмы ARP (авторегуляризованный процесс типа GN[/3,6,8/]), ARPC (процесс ARP с компенсированной регуляризацией[/5,6,8/]), ERP (экспоненциально регуляризованный процесс типа GN[/2,I7/]), RPBC (R -процесс с наилучшей поправкой[/6,8/]) реализованы в программной системе REGN , которая с I973 г. находит применение в различных областях современной физики. Система REGN применяется прежде всего при автоматизации исследования н.с.у. в постановках (ПI) и (П2). В частности, алгоритмы REGN были использованы для решения впервые в ОИЯИ следующих задач: I) Автоматизация обработки дискретных гамма-спектров; 2) Определение времен заселения ротационных состояний редкоземельных ядер; 3) Вычисление коллективных параметров и энергий деформированных ядер; 4) Определение ширин распада высоковозбужденных составных ядер; 5) Определение характеристик многократной ионизации, возникающей в ионной ловушке при электронном ударе; 6) Проведение зависящего от энергии фазового анализа упругого рассеяния $\pi^{\pm}$ -мезонов на ^{4}He ; 7) Определение бозе-конденсатной добавки в сверхтекучем гелии; 8) Определение зависимостей характеристик упругого рассеяния адронов и множественного рождения частиц от квантовых чисел при высоких и сверхвысоких энергиях; 9) Решение обратной задачи о спаривании в ротационной модели нечетных деформированных ядер; I0) Определение основных состоя-

ний многочастичных систем при помощи метода локально-масштабного преобразования.

Кроме ОИЯИ, программная система REGN применяется также в ряде научно-исследовательских институтов СССР и в других странах.

Следующие основные результаты диссертации выдвигаются для защиты:

I. Разработана единая теория полулокальной сходимости регуляризованных методов ньютоновского типа. Сформулирован принцип авторегуляризации методов ньютоновского типа. Из общей теории полулокальной сходимости получено обоснование регуляризованных методов типа Ньютона-Канторовича, Гаусса-Ньютона и метода касательных гипербол. Это обоснование охватывает регуляризованные процессы с разностными аппроксимациями производных, а также процессы с компенсированной регуляризацией. Решен вопрос о проверяемости начальных условий в полулокальных теоремах сходимости.

2. Разработана полулокальная теория сходимости для непрерывных регуляризованных траекторий приближения типа Ньютона-Канторовича и Гаусса-Ньютона. Эта теория охватывает случай вырождения оператора $f'(x)$ (или оператора $f'^*(x)f'(x)$), в том числе и в решении. Теоретически обоснован эффект замедления скорости траектории приближения $x(t)$ при $t\to\infty$ по сравнению со скоростью убывания траектории невязки $fx(t)-\bar{y}$ к нулю в вырожденном случае.

3. Получено одно обобщение теоремы Боголюбова о существовании устойчивых интегральных многообразий, в котором разбиение спектра линейного оператора из главной части дифференциального уравнения согласовано с константами Липшица для нелинейной части дифференциального уравнения и стабильной координаты интегрального многообразия. При помощи теоремы о существовании интегральных многообразий дается качественное описание стабильной и критической координат для непрерывных R-траекторий типа Ньютона-Канторовича.

4. Теоретически и алгоритмически разработан метод стержневых сплайнов для приближенного решения задач на собственные значения дифференциальных уравнений. Этот метод применен к сингулярным квазипотенциальным уравнениям бесконечного порядка. С помощью метода стержневых сплайнов и авторегуляризованного метода типа Гаусса-Ньютона решены релятивистские обратные задачи для связанных состояний кварк-антикварковых c- и b-систем и установлен релятивистский эффект для системы из c-кварков.

5. На основе результатов, полученных из полулокальной теории сходимости итерационных методов ньютоновского типа, разработаны универсальные алгоритмы для решения нелинейных систем уравнений (авторегуляризованные процессы, R-процессы с экспоненциально убывающими регуляризаторами, R-процессы с компенсированной регуляризацией). Эти алгоритмы реализованы в программной системе REGN . На ее основе предложен подход эвристического исследования нелинейных задач с неуточненной математической моделью. Проведено сравнение алгоритмов системы REGN с алгоритмами других авторов, с использованием известных тестовых задач. Сравнение показывает, что основное преимущество алгоритмов REGN состоит в равномерном проявлении свойств универсальности (УI)-(У4) по параметрам алгоритмов.

6. Система REGN применена автором для решения следующих прикладных задач: автоматизация обработки дискретных гамма-спектров атомных ядер[17]; обратная задача спаривания в роторной модели для нечетных деформированных ядер[18]; определение бозе-конденсата в сверхтекучем гелии[21]; зависящий от энергии фазовый анализ упругого рассеяния $\pi^{\pm}$ -мезонов на ^4He [20]; зависимость полных сечений адронов при высоких энергиях от квантовых чисел [22,24]; автоматизация численного определения параметров широких атмосферных ливней космических лучей[23]; определение параметров магнитной системы для создания однородного поля[19]; проектирование конических и гипоидных пространственных передач со спиральными зубьями для использования в машиностроении.

Апробация работы. Результаты, вошедшие в диссертацию, докладывались на семинарах по вычислительной математике ЛВТА (ОИЯИ), в Институте ядерных исследований в Сверке (Варшава), в Ягеллонском университете (Краков), в Институте вычислительной математики при Копенгагенской политехнике; на международных конференциях по программированию и математическим методам решения физических задач (Дубна, 1969 г.; 1973 г.), по реакторной физике (Варшава, 1968 г.; Варна, 1976 г.), по малочастичным задачам в физике ядра и элементарных частиц (Квебек, 1974 г.), по физике высоких энергий (Лос-Аламос, 1975 г.), по физике космических лучей (Киото, 1979 г.), по использованию ЭВМ типа ЕС (Дубна, 1982 г.); на четвертом конгрессе механиков НРБ (Варна, 1981 г.) и на общелабораторных семинарах ЛЯП, ЛТФ и ЛВТА в ОИЯИ.

Публикации. Основное содержание диссертации отражено в 25 публикациях в виде сообщений ОИЯИ и статей в журналах ЖВМ и МФ, Дифф. ур., ЖЭТФ, ЯФ, J. Radional. Chem. и J. of Comput. Phys.

Объем работы. Диссертация состоит из предисловия, четырех глав, четырех программных приложений и заключения. В ней доказано 40 утверждений и представлено I9 численных примеров. Основной текст диссертации составляет 284 машинописные страницы. Она содержит также 86 страниц программного текста, 33 таблицы, I3 блок-схем, 3 рисунка и библиографию из I72 наименований.

II. СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В главе I "Полулокальная сходимость методов ньютоновского типа" даны основные определения, используемые в диссертации, и изложена единая теория сходимости R-процессов. §I.I имеет характер общего введения. В нем дается постановка решения нелинейного операторного уравнения

$$Fx \equiv \varphi(x)(fx-\bar{y})+\alpha x=0 \tag{I}$$

при помощи R-процесса /5,8,I0/

$$\begin{gathered} x_0,\ x_{k+1}=x_k-v_k(A_k+\tau_k)^{-1}Fx_k, \\ x_k\in D_f,\ \tau_k\in \mathcal{R}(A_k),\ k=0,1,\dots,K^*\le\infty, \end{gathered} \tag{2}$$

где $f: D_f\subseteq E_1\to R_f\subseteq E_2$, $\varphi(x): R_f\to R_\varphi\subseteq E_3$, $\alpha: D_f\to R_\varphi$ – заданные операторы, а $\bar{y}\in E_2$; $\varphi(x)$ – такой линейный оператор, что (I) разрешимо в D_f; D_f – выпуклая открытая область; E_1, E_2, E_3 – B-пространства; оператор α -регуляризатор задачи, и A_k, $\tau_k: D_f\to R_\varphi$, $v_k: D_f\to D_f$ $(\exists v_k^{-1}\in\mathcal{L}(E_1))$ – заданные ограниченные линейные операторы.

В §I.I обсуждается вопрос о возможности применения полулокальных теорем сходимости для обоснования R-процессов и дается общая постановка о накоплении ошибок при решении возмущенной задачи

$$\tilde{F}x \equiv \tilde{\varphi}(x)(\tilde{f}x-\tilde{y})+\alpha x=0 \tag{I'}$$

возмущенным процессом

$$\begin{gathered} \tilde{x}_0\equiv x_0,\ \tilde{x}_{k+1}=\tilde{x}_k-v_k(\tilde{A}_k+\tilde{\tau}_k)^{-1}(\tilde{F}\tilde{x}_k+\Delta_k), \\ \tilde{x}_k\in D_f,\ \tilde{\tau}_k\in\mathcal{R}(\tilde{A}_k),\ k=0,1,\dots,\tilde{K}^*, \end{gathered} \tag{2'}$$

где Δ_k – невязка уравнения $(\tilde{A}_k+\tilde{\tau}_k)v_k^{-1}(\tilde{x}_{k+1}-\tilde{x}_k)=-\tilde{F}\tilde{x}_k$ и $\tilde{A}_k = A_k+\delta A_k$, $\tilde{F}\tilde{x}_k=Fx_k+\delta_k$, $\delta_k=\delta\varphi_k(\tilde{f}x_k-\tilde{y})+\tilde{\varphi}_k(\delta f x_k-\delta y)$, $\tilde{\varphi}_k = \varphi_k+\delta\varphi_k$, $\tilde{f}\tilde{x}_k=fx_k+\delta f x_k$, $\tilde{y}=\bar{y}+\delta y$, $\tilde{\tau}_k=\tau_k+\delta\tau_k$.

Чтобы привести основную теорему о полулокальной сходимости процессов (2) и (2'), сформулируем некоторые условия.

Если существуют вещественные функции $t_i(\xi_1,\xi_2)$, $0\le\xi_i<\infty$, $i=1,2$, со свойством $0\le t_i(\xi_1,\xi_2)\le t_i(\xi_1^*,\xi_2^*)$ при $\xi_l\le\xi_i^*$, а также $t_3(\xi)$, $0\le\xi<\infty$ такие, что при заданных постоянных $p\ge1$ и $N\ge0$ для всех $k=0,1,\dots,K^*$ выполнены неравенства

$$\|x_{k+1}-x_k\|\le t_1(b_k,\rho_k)\rho_k, \tag{3}$$

$$\rho_{k+1}\le t_2(b_k,\rho_k)\rho_k^p, \tag{4}$$

$$\|\tau_k v_k^{-1}\|\le N t_3(\rho_k)b_k\rho_k, \tag{5}$$

где $b_k=\|v_k(A_k+\tau_k)^{-1}\|$, $\rho_k=\|Fx_k\|$, то будем говорить, что относительно процесса (2) выполнена гипотеза H_1.

Если для всех x, $x^*\in D_f$ выполнено неравенство

$$\|A(x)(v(x))^{-1}-A(x^*)(v(x^*))^{-1}\|\le M\|x-x^*\|,\ M=const,$$

то будем говорить, что относительно процесса (2) выполнена гипотеза H_2.

Относительно процесса (2) с $K^*=\infty$ и процесса (2') с фиксированным $K^*\ge2$ предполагается выполнение условий:

(C_1) (начальное условие) x_0 и τ_0 удовлетворяют неравенствам

$$b_0<\gamma,\ \psi_0<1,\ \nu>1,\ \beta+\nu\psi_0\le1\quad(\gamma=const),$$

где

$$\beta=t_2(\gamma,\rho_0)\rho_0^{p-1},\ \psi_0=(2Mt_1(\gamma,\rho_0)+\gamma N t_3(\rho_0))b_0\rho_0,\ \nu=\frac{\gamma^2}{(1-\psi_0)(\gamma-b_0)b_0};$$

(C_2) для всех $k=0,1,\dots,K^*$ операторы τ_k и v_k подчинены неравенству $\|\tau_{k+1}v_{k+1}^{-1}-\tau_k v_k^{-1}\|\le\|\tau_k v_k^{-1}\|$;

(C_3) $\bar{S}(x_1,\sigma)\subseteq D_f$, $\sigma=t_1(\gamma,\rho_0)\beta\rho_0/(1-\beta^p)$;

(C_4) для всех $k=0,1,\dots,\tilde{K}^*-1$ возмущения δA_k удовлетворяют неравенству $\omega_k\|\delta A_k\|<1$, где $\omega_k=\gamma-(\gamma-\tilde{b}_0)\ell_k(\tilde{\rho}_0)$, $\ell_k=\beta^{1+p+\dots+p^{k-1}}$ при $k=1,2,\dots$ и $\ell_0=1$.

В §I.2 доказана следующая основная полулокальная

Теорема I.2.I. Пусть для R-процессов (2) и (2') в предположении выполнимости гипотезы H_1, H_2 выполнены условия (C_1) – (C_3) с одними и теми же функциями t_i, $i=1,2,3$ и постоянными N, p, M и γ. Пусть также выполнено условие (C_4). Тогда: I) R-процесс (2) сходится, $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x_\infty\in\bar{S}(x_1,\sigma)$ и x_∞ удовлетворяет (I); 2) справедливы оценки

$$\|x_k-x_\infty\|\le\varkappa_k(\rho_0),\ k=1,2,\dots, \tag{6}$$

$$\|\tilde{x}_{\tilde{K}^*}-x_\infty\|\le\varkappa_{\tilde{K}^*}(\tilde{\rho}_0)+\theta_{\tilde{K}^*},\ \tilde{K}^*=2,3,\dots, \tag{7}$$

где $\varkappa_k=t_1(\gamma,\rho_0)\rho_0\ell_k(\rho_0)/(1-\beta^{p^k})$

и $$\theta_{\tilde{K}^*}=\sum_{k=0}^{\tilde{K}^*-1}\frac{\omega_k(\tilde{\rho}_0\ell_k(\tilde{\rho}_0)\omega_k\|\delta A_k\|+\|\delta_k\|+\|\Delta_k\|)}{1-\omega_k\|\delta A_k\|}.$$

Если существует вещественная функция $t_4(\xi)$, $0 \le \xi < \infty$ такая, что $0 \le t_4(\xi) \le t_4(\xi^*)$ при $\xi \le \xi^*$, $\lim\limits_{\xi \to 0} t_4(\xi) = 0$ и $\|\tau_k\| = t_4(\rho_k)$, $k=0,1,\dots$ то, согласно определению из работы /3/, процесс (2) – авторегуляризован.

Теорема I.2.I позволяет построить конкретные авторегуляризационные функции t_4. В §I.2 доказана следующая, охватывающая более общий случай,

Лемма I.2.3. Выполнение для всех $k=0,1,\dots,k^*$ любого из неравенств

$$\|\tau_k v_k^{-1}\| \le \tfrac{1}{2}\left[\left(\|A_k v_k^{-1}\|^2 + 4Nt_3(\rho_k)\rho_k\right)^{\frac{1}{2}} - \|A_k v_k^{-1}\|\right], \tag{8}$$

$$\|\tau_k\| \le \tfrac{1}{2}\left[\left(\|A_k\|^2 + 4Nt_3(\rho_k)\rho_k/\|v_k^{-1}\|\right)^{\frac{1}{2}} - \|A_k\|\right], \tag{9}$$

$$\|v_k^{-1}\| \le N t_3(\rho_k)\rho_k / \left(\|\tau_k\| (\|\tau_k\| + \|A_k\|)\right) \tag{I0}$$

вызывает выполнение неравенства (5) гипотезы H_1.

В качестве $t_4(\rho_k)$ берется правая часть неравенства (9). Выбранные таким образом авторегуляризаторы обладают рядом преимуществ перед авторегуляризаторами, выведенными из локальных теорем сходимости *).

В том же параграфе доказана теорема I.2.2 о полулокальной сходимости процесса (2), понимаемого как регуляризованный по ходу выполнения. Теорема I.2.2 отличается от теоремы I.2.I более простыми условиями. В ней гипотеза H_1 заменена гипотезой H_1', в которой предполагается существование функций t_1 и t_2, удовлетворяющих неравенствам (3) и (4), а условия (C_1) и (C_2) заменены соответственно условиями: (C_1') –начальные значения x_0 и τ_0 удовлетворяют неравенству $\beta < 1$; (C_2') – операторы τ_k и v_k выбираются так, что для всех $k=0,1,\dots$ выполнено неравенство $b_k < \gamma$.

В §I.3 приведены следствия теорем I.2.I и I.2.2 о R-процессах типа NK, получаемые из (2) при заменах: (NK_1) $A_k = F'(x_k)$; (NK_2) $A_k = f'^*(x_k)f'(x_k) + f''(x_k)(fx_k - \bar{y})$, $\varphi_k = f'^*(x_k)$ в предположении, что E_1 и E_2 – H-пространства и $E_3 \equiv E_1$; (NK_3) (случай R-процесса типа касательных гипербол) $A_k = F'(x_k)$, $v_k = I_{E_1} - \frac{1}{2}S_k$, $S_k = \left[(F'(x_k)+\tau_k)^{-1}F''(x_k)(F'x_k+\tau_k)^{-1}Fx_k\right]^{-1}$ в предположении, что $E_3 \equiv E_2 \equiv E_1$.

Случай (NK_1) содержит в себе обычный R-процесс типа NK /I/: $A_k = f'(x_k)$, $\varphi_k = I_{E_1}$, $v_k = I_{E_1}$ ($E_3 \equiv E_2 \equiv E_1$). Здесь же приведено следствие теоремы I.2.I для R-процессов типа NK с разностной аппроксимацией производной. Изложен также вычислительный подход проверяемости начального условия (C_1), который сводится к нахождению положительных корней кубического уравнения.

---

*) K.M.Brown, J.E.Dennis, Numer. Math., 18, 1972, 289-297.
В.В.Ермаков, Н.Н.Калиткин. ЖВМ и МФ, 2I, №2, I98I, 49I-497 и др.

В §I.4 приведены следствия теорем I.2.I и I.2.2 о R-процессах типа GN, получаемые из (2) при заменах: (GN_1) $A_k = f'^*(x_k)f'(x_k) + \alpha'(x_k)$, $\varphi_k = f'^*(x_k)$, $v_k = I_{E_1}$, $\tau_k = \varepsilon_k I_{E_1}$, $\varepsilon_k = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\tau_k^2 + 4N\rho_k^q} - \tau_k\right)$, где $\tau_k = \|A_k\|$, $N = \varepsilon_0(\varepsilon_0+\tau_0)/\rho_0^q$, $\varepsilon_0 \ge 0$, $q \ge 1$ (ε_0 и q – постоянные) в предположении, что E_1, E_2 – H-пространства и $E_3 \equiv E_1$; (GN_2) – как в случае (GN_1) с той разницей, что $\varphi_k = \left[I_{E_1} - \varepsilon_k\left(f'^*(x_k)f'(x_k) + \alpha'(x_k) + \varepsilon_k I_{E_1}\right)^{-1}\right] f'^*(x_k)$ (R-процесс с компенсированной ругуляризацией). Далее в этом параграфе отмечены достаточные условия, обеспечивающие R-процессам типа GN квадратическую скорость сходимости (т.е. в оценках (6) и (7) $p=2$) и приведено следствие теоремы I.2.I для R-процесса (GN_1) с разностной аппроксимацией производной.

В заключительном параграфе главы I приведен обзор новых ядерно-физических результатов, полученных автором и другими авторами при помощи R-процессов. Как правило, получение этих результатов обеспечено наличием в R-процессах свойств (УI)-(У4).

Глава II "Непрерывные аналоги" содержит обоснования применения непрерывных R-траекторий приближения ньютоновского типа /7,II/. Основное место уделено сходимости при $t \to \infty$ R-процесса типа NK /II/

$$\frac{dx}{dt} = -\left(f'(x) + \tau(x)\right)^{-1}(fx - \bar{y}), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \le t < \infty, \quad \tau(x) \in \mathcal{R}(f'(x)) \tag{II}$$

и R-процесса типа GN /I0/

$$\frac{dx}{dt} = -\left(f'^*(x)f'(x) + \tau(x)\right)^{-1} f'^*(x)(fx - \bar{y}), \quad x(t_0) = x_0, \quad \tau(x) \in \hat{\mathcal{R}}(f'^*(x)f'(x)) \tag{I2}$$

к решению уравнения

$$fx = \bar{y}, \quad \bar{y} \in R_f, \quad f: S(x_0,\rho) \subset E_1 \to R_f \subset E_2, \tag{I3}$$

где в случае процесса (II) E_1 и E_2 – B-пространства, а в случае процесса (I2) E_1 и E_2 – H-пространства.

При невырождении производной $f'(x)$ в §2.I доказано обобщение теоремы М.К.Гавурина о непрерывном аналоге метода Ньютона, а именно:

Теорема 2.I.I. /II/ Пусть в сфере $S(x_0,\rho)$ выполнены соотношения

$$p(x) \equiv \|\tau(x)(f'(x)+\tau(x))^{-1}\| \le \varepsilon < 1, \tag{I4}$$

$$\|(f'(x)+\tau(x))^{-1}\| \le \gamma, \tag{I5}$$

где $\rho > \rho_0 = \frac{r}{1-\varepsilon}\|f x_0 - \bar{y}\|$, ε и r – постоянные. Тогда : I) R-процесс (II) имеет решение $x(t) \subset \bar{S}(x_0, \rho_0)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$, существует $\lim x(t) = x_\infty \in \bar{S}(x_0, \rho_0)$ и x_∞ удовлетворяет уравнению (I3); 2) для всех $t \geq t_0$ справедливы оценки

$$\|f x(t) - \bar{y}\| \leq \mu(t), \|x(t) - x_\infty\| \leq \frac{r}{1-\varepsilon}\mu(t), \ \mu(t) = \|f x_0 - \bar{y}\| e^{-(1-\varepsilon)(t-t_0)}. \quad (I6)$$

Далее доказывается, что при наличии хотя бы одной точки вырождения производной f'(x) в $S(x_0, \rho)$ условие (I4) невыполнимо для любой нормы в пространстве операторов $\mathcal{L}(E_1)$ и таким образом теорема 2.I.I неприменима в вырожденном случае. Однако, применяя более точные интегральные неравенства при оценке длины траектории $x(t) - x_0, t_0 \leq t < \infty$, приходим к замене условия (I4) более общим условием, и в конечном счете к справедливой в вырожденном случае теореме сходимости:

Теорема 2.I.2. /II/ Пусть процесс (II) обладает решением $x(t) \subset S(x_0, \rho)$ для всех $t > t_0$ таким, что на нем выполнены соотношения $\lim\limits_{t\to\infty} q(t) = \infty$, $\int_{t_0}^{\infty} e^{-q(s)} ds \leq Q < \infty$, $\|(f'(x) + \tau(x))^{-1}\| \leq r$, где $q(t) = t - t_0 - \int_{t_0}^{t} p(s) ds$, $\rho > \rho_0 = r Q \|f x_0 - \bar{y}\|$. Тогда I) существует $\lim x(t) = x_\infty \in \bar{S}(x_0, \rho_0)$ и x_∞ удовлетворяет (I3); 2) для всех $t > t^*$, где $t^* > t_0$ – достаточно большая постоянная, такая, что $q(t) > 0$ при $t > t^*$, справедлива оценка

$$\|f x(t) - \bar{y}\| \leq \|f x_0 - \bar{y}\| e^{-q(t)}. \quad (I7)$$

Эта теорема охватывает трудный случай, когда решение x_∞ уравнения (I3) является точкой вырождения производной $f'(x)$. Примером тому служит задача о решении уравнения $\cos x = -1, \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ на основе процесса (II) при $t_0 = 1$ и $\tau(x) = 1 - \sin x$. Имеем: $x(t) = \arccos \frac{1-t^2}{1+t^2} \xrightarrow[t\to\infty]{} x_\infty$, $r = 1$, $\int_1^{\infty} e^{-q(s)} ds = \frac{\pi}{2}, x_\infty = \pi$ и оценка (I7) выполняется с равенством.

Приведем два следствия теоремы 2.I.2., в которых точки вырождения производной не являются решениями (I3).

Следствие 2.I.I. /II/ Пусть задача (II) имеет решение $x(t) \in S(x_0, \rho)$ для любого $t > t_0$, такое, что на нем выполнено как неравенство (I5), так и условие

$$\frac{1}{\tau_0}\int_t^{t+\tau_0} p(s) ds \leq \varepsilon < 1 , \quad (I8)$$

где $\rho > \rho_0 = \frac{r}{1-\varepsilon} e^{\varepsilon\tau_0}\|f x_0 - \bar{y}\|$, а ε – постоянная. Тогда выполнены утверждение I) теоремы 2.I.I. и утверждение 2) теоремы 2.I.I. при $\mu(t) = e^{\varepsilon\tau_0}\|f x_0 - \bar{y}\| e^{-(1-\varepsilon)(t-t_0)}$.

Следствие 2.I.2. /II/ Пусть задача (II) имеет решение $x(t) \subset S(x_0, \rho)$ для любого $t > t_0$, такое, что $x(t_0)$ – право-изолированная точка вырождения и существует внутренний кусок вырождения $\{x(t) / t_0 < t_1 \leq t \leq t_2 < \infty\}$, а остальные части траектории $\{x(t) / t_0 < t < t_1\}$ и $\{x(t) / t_2 < t < \infty\}$ являются невырожденными кусками. Пусть, также, на $x(t)$, $x_0 \leq t < \infty$ выполняются неравенства (I5) и (I8), при $\tau_0 > t_2 - t_1$ и $\rho > \rho_0$. Тогда справедливо утверждение следствия 2.I.I.

Приведенное ниже следствие теоремы 2.I.2 имеет место в случае вырождения производной в решении (I3) и в то же время содержит оценку скорости сходимости траектории процесса (II).

Следствие 2.I.3. /II/ Пусть задача (II) имеет решение $x(t) \subset S(x_0, \rho)$ для любого $t > t_0$, пределом которого (если существует) является изолированная точка вырождения, а любая часть траектории $\{x(t) / t_0 \leq t \leq t_2\}$ (для любого фиксированного $t_2 \in [t_0, \infty)$) является невырожденным куском. Пусть также на $x(t)$, $t_0 \leq t < \infty$ выполнено как неравенство (I5), так и неравенство

$$p(x(t)) \leq \alpha t / (\alpha t + \beta),$$

где $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 2$ – целые числа, такие, что $\beta > 2\alpha$ и $\rho > \rho_0 = r\frac{\alpha t_0 + \beta}{\beta - \alpha}\|f x_0 - \bar{y}\|$. Тогда справедливо утверждение I) теоремы 2.I.2, а также утверждение: 2') для всех $t \geq t_0$ справедливы оценки

$$\|f x(t) - \bar{y}\| \leq \|f x_0 - \bar{y}\| \left(\frac{\alpha t_0 + \beta}{\alpha t + \beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad (I9)$$

$$\|x(t) - x_\infty\| \leq \rho_0 \left(\frac{\alpha t_0 + \beta}{\alpha t + \beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha} - 1}. \quad (20)$$

Оценки (I9) и (20) показывают характерное замедление убывания к нулю при $t \to \infty$ траектории R-процесса (II) по сравнению с траекторией невязки $f x(t) - \bar{y}$ в случае вырождения производной $f'(x)$ в решении x_∞ уравнения (I3). Отметим, что доказательство следствий 2.I.2 и 2.I.3 выполнено в предположении, что $E_2 \equiv E_1$ и E_1 – H – пространство.

Дальше, в §2.I, доказываются утверждения о непрерывном R-процессе GN , аналогичные утверждениям 2.I.I и 2.I.2 и устанавливается устойчивость t_τ -псевдорешений /IO/, построенных с помощью методов (II) и (I2), к колебаниям входных данных. В §2.I также приводится регуляризованный вариант метода вариации параметра, рассматриваемого на полуоси $[0, \infty)$, который асимптотически превращается в непрерывный R-процесс типа NK /7/, а также дважды регуляризованный процесс /9,IO/

$$\frac{dx}{dt} = -\left(A + \left(\frac{\alpha}{t} + \varepsilon\right) I\right)^{-1} \left(\left(A + \frac{\alpha}{t} I\right) x - \bar{y}\right), \quad x(1) = x_0, \quad 1 \le t < \infty \tag{21}$$

(α, $\varepsilon > 0$ – постоянные),
для решения вырожденной линейной системы

$$A x = \bar{y}, \quad \bar{y} \in R_A, \quad A^T = A, \quad A \ge 0 . \tag{21'}$$

Доказывается /10/, что для любого x_0 процесс (21) сходится к нормальному решению уравнения (21').

В §2.2 главы II используется теорема Н.Н.Боголюбова об устойчивых интегральных многообразиях для обоснования непрерывного R-процесса (11) как метод решения уравнения (13) и как средство исследования его устойчивости. В начале §2.2 приводится обобщение теоремы Боголюбова, в котором разбиение спектра линейного оператора A главной части дифференциального уравнения согласовано с константами Липшица для нелинейной части дифференциального уравнения и стабильной координаты интегрального многообразия. В случае, когда $E_2 \equiv E_1$ и E_1 – H – пространство, получено следующее следствие теоремы Боголюбова: предел $x_\infty(x_0)$ процесса (11) удовлетворяет P_2 -преобразованному уравнению $P_2(x_0)(f x - \bar{y}) = 0$, а при выполнении условия $P_1(x_0)(f x_0 - \bar{y}) = 0$ предел $x_\infty(x_0)$ удовлетворяет исходному уравнению (13). Здесь $P_1(x_0)$ и $P_2(x_0)$ – проекторы на инвариантные подпространства оператора A, соответствующие спектральным множествам $\sigma_1(A)$ и $\sigma_2(A)$ $\left(\sigma(A) = \sigma_1(A) \cup \sigma_2(A)\right)$, такие, что существует число $\alpha > 0$ со свойством: $|Re\, s| < \alpha$ при $s \in \sigma_1(A)$ и $Re\, s < -\alpha$ при $s \in \sigma_2(A)$.

В главе Ш дается обоснование метода стержневых сплайнов и приводятся результаты его применения в некоторых прямых и обратных задачах квантовой механики. Идея метода стержневых сплайнов следующая /13/: Для построения приближенного решения $(\tilde{z}, \tilde{y}) \in Z \times \tilde{F}_p(X)$ системы

$$\begin{cases} \left[\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu(x,z) \dfrac{d^\nu}{dx^\nu} + u(x,z) \right] y(x,z) = 0 \quad \left(x \in X = [x_н, x_к], z \in Z = [z_н, z_к]\right), & (22) \\ g(z, y(x,z)) = \gamma_0 \quad \left(\gamma_0 = const \in G_0 = [\gamma_{0н}, \gamma_{0к}], \ \gamma_0 \ne 0\right), & (23) \end{cases}$$

где при заданных $\bar{n}$ и n, таких, что $2 \le n \le \bar{n} \le \infty$, и при заданной функции – стержень решения $p(x,z) \in C^{\bar{n},1}(P)$ с $P = X \times Z$, используется множество

$$\tilde{F}_p(X) = \{ S_2(x)\, p(x,z) / S_2(x) \in S_N(X) \} \tag{24}$$

вместо множества

$$F_{p,n}(X) = \{ \varphi(x)\, p(x,z) / \varphi(x) \in C^n(X) \} . \tag{25}$$

В (22) предполагается, что $a_\nu, u \in C^{0,1}(P)$. В (23) предполагается, что $g(z,y) : Z \times C^{n,1}(P) \to G_0$ – ограниченный вещественный функционал такой,

что при замене $y = \gamma y^*$ ($\gamma \in G = [\gamma_н, \gamma_к]$, $y^* \in C^{n,1}(P)$) он взаимно однозначно преобразует G на G_0. В (24) $S_2(x)$ – натуральный параболический сплайн, а S_N – множество параболических сплайнов, интерполирующих функции $\varphi(x)$ из (25).

Введем обозначения: $h_j^{(\mu)} = u_j x_j^{3-\mu} p_j + D_j^{(\mu)}$ $(\mu = 1,2,3)$,

$$D_j^{(1)} = 2(a_{1j} x_j + a_{2j}) p_j + x_j^2 d_{1j} + 2 x_j d_{2j} + d_{3j} ,$$

$$D_j^{(2)} = a_{1j} p_j + x_j d_{1j} + d_{2j} , \quad D_j^{(3)} = d_{1j} ,$$

$$d_{1j} = \left\{ \left[\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(x,\tilde{z}) \frac{d^\nu}{dx^\nu} \right] p(x,\tilde{z}) \right\} \Big/_{x = x_j} ,$$

$$d_{2j} = \left\{ \left[\sum_{\nu=2}^{n} \nu\, a_\nu(x,\tilde{z}) \frac{d^{\nu-1}}{dx^{\nu-1}} \right] p(x,\tilde{z}) \right\} \Big/_{x = x_j} ,$$

$$d_{3j} = \left\{ \left[\sum_{\nu=3}^{n} \nu(\nu-1)\, a_\nu(x,\tilde{z}) \frac{d^{\nu-2}}{dx^{\nu-2}} \right] p(x,\tilde{z}) \right\} \Big/_{x = x_j} ,$$

где

$$a_{\nu j} = a_\nu(x_j, \tilde{z}), \quad u_j = u(x_j, \tilde{z}), \quad p_j = p(x_j, \tilde{z}),$$

$$\Delta = h_1^{(1)} h_2^{(2)} - h_1^{(2)} h_2^{(1)}, \quad t_j = h_j^{(1)} - 2\bar{x}_j h_j^{(2)} + \bar{x}_j^2 h_j^{(3)} ,$$

$\left\{ \bar{x}_j \,/\, \bar{x}_1 = x_н,\ \bar{x}_{N+1} = x_к,\ \bar{x}_j = \bar{x}_{j-1} + h,\ j = 2,3,\dots,N,\ h = \frac{x_к - x_н}{N},\ N \ge 5 \right\}$ – сетка сплайна $S_2(x)$,

$\left\{ x_j \,/\, x_1 = x_н,\ x_N = x_к,\ x_j = (\bar{x}_j + \bar{x}_{j+1})/2,\ j = 2,3,\dots,N-1 \right\}$ – интерполяционная сетка, а $\alpha_j x_j^2 + \beta_j x_j + \gamma_j$ $(\bar{x}_j \le x_j \le \bar{x}_{j+1})$ – параболы сплайна.

Параболический интерполяционный сплайн $S_2^*(x)$, определенный равенствами:

$$\alpha_j^* = \frac{h_j^{(2)}}{t_j}\left[\beta_1^* + 2\bar{x}_j \alpha_{j-1}^* - 2\sum_{\nu=3}^{j-1}(\alpha_\nu^* - \alpha_{\nu-1}^*)\bar{x}_\nu\right] - \frac{h_j^{(1)}}{t_j}\left[1 - \bar{x}_j^2 \alpha_{j-1}^* + \sum_{\nu=3}^{j-1}(\alpha_\nu^* - \alpha_{\nu-1}^*)\bar{x}_\nu^2\right],$$

$$\beta_j^* = \beta_1^* - 2\sum_{\nu=2}^{j}(\alpha_\nu^* - \alpha_{\mu-1}^*)\bar{x}_\nu ,$$

$$\gamma_j^* = 1 + \sum_{\nu=2}^{j}(\alpha_\nu^* - \alpha_{\nu-1}^*)\bar{x}_\nu^2 , \quad j = 3,4,\dots,N-1 ; \tag{26}$$

$$\alpha_1^* = \left(h_1^{(2)} h_2^{(3)} - h_1^{(3)} h_2^{(2)}\right)/\Delta , \quad \beta_1^* = \left(h_2^{(1)} h_1^{(3)} - h_1^{(1)} h_2^{(3)}\right)/\Delta ,$$

$$\alpha_j^* = \alpha_{j+1}^* , \quad \beta_j^* = \beta_{j+1}^* , \quad \gamma_j^* = \gamma_{j+1}^* , \quad j = 1, N-1 ,$$

$$\gamma_1^* = 1$$

называем <u>базисным сплайном.</u>

В §3.I доказывается основная теорема о существовании приближенных сплайново-стержневых решений задачи (22), (23) (реализации м.с.с. в варианте построения базисного сплайна), а именно:

<u>Теорема 3.I.I.</u> /I3/ Пусть для любого $\tilde{z}$ из заданного подынтервала $Z^* \subset Z$ выполнены неравенства

$$\Delta \neq 0 \ , \ t_j \neq 0 \quad (j = 3, 4, \ldots, N-1) . \tag{27}$$

Тогда: I) решение задачи (22), (23) существует тогда и только тогда, когда уравнение

$$\alpha_N^*(\tilde{z}) h_N^{(1)}(\tilde{z}) + \beta_N^*(\tilde{z}) h_N^{(2)}(\tilde{z}) + \gamma_N^*(\tilde{z}) h_N^{(3)}(\tilde{z}) = 0 \tag{28}$$

имеет на интервале Z^* вещественные корни; 2) если $\tilde{z}^* \in Z^*$ – заданный вещественный корень уравнения (28), то соответствующая ему собственная функция выражается равенством

$$\tilde{y}(x, \tilde{z}^*) = g_{\gamma}^{-1}(\tilde{z}^*, S_2^*(x) p(x, \tilde{z}^*)) \gamma_0 S_2^*(x) p(x, \tilde{z}^*) .$$

Дальше в §3.I доказывается теорема о сходимости м.с.с. /I3/, в которой при предположении о существовании приближенного решения $(\tilde{z}, \tilde{y}) \in Z \times \tilde{F}_p(X)$ и точного решения $(\bar{z}, \bar{y}) \in Z \times F_{p,n}(X)$ задачи (22), (23) утверждается сходимость приближенного решения к точным при $N \to \infty$ со скоростью $O(h^2)$.

В случае невыполнения (27) (или наличия близости к нулю некоторых из значений Δ или t_j) реализация м.с.с. в варианте построения базисного сплайна невозможна (или неустойчива). В этом случае м.с.с. сводится к прямому решению н.с.у. /I3/ относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{N-2}, \alpha_N$, β_1 и γ_1 с последующим определением неизвестных $\beta_j, \gamma_j \ (j = 2, 3, \ldots, N)$ из (26). Для решения этой н.с.у. применяются R-процессы.

В качестве примеров применения м.с.с. в варианте базисного сплайна в §3.I решаются квазипотенциальные уравнения бесконечного порядка (2-го и 4- го порядков в терминах Δ-операции), введенных В.Г.Кадышевским. В §3.I м.с.с. применен к уравнениям 2-го порядка – уравнения Шредингера и квазипотенциального уравнения И.Т.Тодорова для связанных состояний.

В §3.2 дано описание алгоритма численной реализации м.с.с. в варианте построения базисного сплайна для решения упомянутых уравнений бесконечного и низшего порядков из теории поля /I4/. Алгоритм имеет две особенности: надежность определения корней уравнения (28) в интервале Z^* гарантируется применением процесса **ARP** после локализации решений; оценка отклонений $|\bar{z} - \tilde{z}|$, $\max\limits_x |\bar{y}(x, \bar{z}) - \tilde{y}(x, \tilde{z})|$ из теоремы сходимости м.с.с. используется для вычисления ошибок приближенного решения $(\tilde{z}, \tilde{y}(x, \tilde{z}))$. Алгоритм реализован в стандартной программе SPSOL .

В §3.3 поставлена обратная задача для определения массы m тяжелых кварков и константы связи λ на основе экспериментальных масс в векторных мезонах, которые интерпретируются как связанные состояния кварк-антикварковых систем. В случае с-кварков установлено преимущество релятивистской постановки перед классической. Релятивистская масса с-кварка m_c на 4% больше классической, а релятивистская константа λ_c – на 16% меньше классической.

Глава IУ "Алгоритмы для автоматизации исследования н.с.у." содержит полное описание алгоритмов ARP, ARPC, ERP и RPBC , основанные на R-процессах типа GN и полное описание программной системы REGN /6,25/, в которой они реализованы. Система REGN составлена из трех основных подпрограмм: RGN , COMP и SILC . В RGN реализованы алгоритмы ARP , ARPC, ERP , RPBC и некоторые их модификации. Подпрограммы COMP и SILC используют RGN как базисную и реализуют частные случаи R-процессов типа GN , или некоторые их композиции. COMP предназначена для решения н.с.у. в общем случае. В COMP реализован основной композиционный алгоритм, содержащий несколько итераций RPBC с последующим выполнением ARP (или ARPC). Управление ε_0 алгоритма ARP (см. случай (GN_1))находится с помощью выполненных итераций процесса RPBC . Подпрограмма SILC предназначена для построения обобщенного нормального решения линейных систем уравнений с прямоугольными матрицами на основе алгоритма ARP .

Описание составного алгоритма системы REGN и его функционирование при решении различных типов н.с.у. ведется с помощью понятия о макрооперации, основанного на общей идее о нелинейном отображении. При задании управлений макроопераций (числовые параметры составного алгоритма REGN) используется принцип умалчивания. Сами подпрограммы RGN , COMP и SILC рассматриваются как макрооперации. Их применение к конкретным н.с.у. является реализацией конкретной макрооперации. Такое описание составного алгоритма REGN и его функционирования привело к разработке общего алгоритмического подхода для автоматизации исследования н.с.у.

В конце IУ главы проведено сравнение алгоритмов системы REGN между собой и с алгоритмами других авторов на общепринятых тестовых задачах.

В приложении А представлен текст системы REGN на ФОРТРАНе. Приложение Б содержит тестовую программу EXAMP , служащую для проверки работы подпрограмм RGN и COMP . В приложении В дана тестовая программа DEGL, при помощи которой иллюстрируется работа подпрограммы SILC. Наконец, в приложении Г представлена программа COMPAR , служащая для сравнения алгоритмов системы REGN с алгоритмами других авторов.

Результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Л.Александров. Регуляризованные вычислительные процессы Ньютона-Канторовича. ОИЯИ, Р5-5136, Дубна, 1970; ЖВМ и МФ, т. II, № I, 1971, 36-41.
2. Л.Александров. Регуляризованные итерационные процессы для решения нелинейных операторных уравнений. ОИЯИ, Р5-5137, Дубна, 1970.
3. Л.Александров. Авторегуляризованные итерационные процессы типа Ньютона-Канторовича. ОИЯИ, Р5-5515, Дубна, 1970.
4. Л.Александров. О решении некорректно поставленных задач построением регуляризованных и авторегуляризованных итерационных процессов. ОИЯИ, Р5-5790, Дубна, 1971.
5. Л.Александров. О регуляризации итерационных процессов ньютоновского типа. ОИЯИ, Р5-7258, Дубна, 1973.
6. Л.Александров. Программа для решения нелинейных систем уравнений на основе регуляризованных итерационных процессов Гаусса-Ньютона. ОИЯИ, Р5-7259, 1973.
7. Л.Александров. О непрерывных аналогах регуляризованных процессов ньютоновского типа. Сов. по программированию и матем. методам решения физ. задач, ОИЯИ, 10-7707, 1973, 104-109.
8. Л.Александров. Регуляризованные вычислительные процессы ньютоновского типа и их применение на ЭВМ для решения нелинейных систем уравнений. ОИЯИ, Б1-5-9969, Дубна, 1976.
9. Л.Александров. Устойчивое построение нормального решения вырожденных систем алгебраических уравнений. ОИЯИ, Р5-10365, Дубна, 1977.
10. Л.Александров. О численном решении на ЭВМ нелинейных некорректно поставленных задач. ОИЯИ, Р5-10366, Дубна, 1977.
11. Л.Александров. Регуляризованные траектории приближения ньютоновского типа для решения нелинейных уравнений. Дифф. ур., т. XIII, №7, 1977, 1281-1292.
12. Л.Александров. Регуляризованный вычислительный процесс для анализа экспоненциальных зависимостей. ЖВМ и МФ, т. 10, №5, 1970, 1285-1287.
13. Л.Александров, Д.Караджов. Метод приближенного решения задач на собственные значения для линейных дифференциальных уравнений высокого порядка. ЖВМ и МФ, т. 20, №4, 1980, 923-938.
14. Л.Александров, М.Дренска, М.Иванов, Д.Караджов. Алгоритм программы SPSOL для решения радиальных уравнений типа Шредингера на основе метода стержневых сплайнов. ОИЯИ,Р11-80-752, Дубна, 1980.

15. Л.Александров, М.Дренска, Д.Караджов. Применение метода стержневых сплайнов к решению радиального уравнения Шредингера для связанных состояний. ЖВМ и МФ, т. 22, №2, 1982, 375-381.
16. L.Aleksandrov, M.Drenska, D.Karadjov, P.Morozov. Inverse Relativistic Problem for the Bound Quark-Antiquark States, J. of Computational Physics, v. 45, No 2, 1982, 291-299.
17. Л.Александров, В.Гаджоков. Анализ скрытых закономерностей построением регуляризованных итерационных процессов. ОИЯИ, Р5-5294, Дубна, 1970; J. of Radioanalytical Chemistry, v. 9, 1971, 279-292.
18. Л.Александров, Д.Караджов, И.Н.Михайлов, Е.Наджаков, Г.Ходжаев. Обратная задача спаривания в роторной модели нечетного деформированного ядра. Известия АН СССР (сер.физ.), т. XXXVI,№12, 1972, 2586-2596.
19. Л.Александров, Е.П.Жидков, Л.Л.Зиновьева. Определение параметров магнитной системы для создания однородного поля с помощью ЭВМ. ОИЯИ, Р11-8059, Дубна, 1974.
20. Л.Александров, Т.Ангелеску, Ф.Никитиу, И.В.Фаломкин, Ю.А.Щербаков. Зависящий от энергии фазовый анализ $\pi^{\pm}-{}^{4}$He упругого рассеяния. ОИЯИ, Р1-8328, Дубна, 1974.
21. Л.Александров, В.А.Загребнов, Ж.А.Козлов, В.А.Парфенов, В.Б.Приезжев. Высокоэнергетическое рассеяние нейтронов и бозе-конденсат в He^2. ЖЭТФ, т. 68, вып. 5, 1975, 1825-1833.
22. L.Aleksandrov, S.Mavrodiev. The Dependence of High-Energy Hadron--Hadron Total Cross Section in Quantum Numbers, JINR, E2-9936, Dubna, 1976.
23. Л.Александров, И.Киров, Й.Стаменов. К автоматизации численного определения основных параметров широких атмосферных ливней космических лучей. Известия АН СССР (сер.физ.), т. 44, №3, 1980, 583-585.
24. Л.Александров, С.Дренска, С.Щ.Мавродиев. Зависимость эффективного радиуса некоторых адронных взаимодействий от квантовых чисел. ЯФ, т. 32, вып. 2 (8), 1980, 520-523.
25. Л.Александров, М.Дренска, Д.Караджов. Программный пакет REGN для решения нелинейных систем уравнений на основе регуляризованных методов типа Гаусса-Ньютона. ОИЯИ, Б1-11-82-767, Дубна, 1982.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 декабря 1983 года.