

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

A - 394

11-83-558

АКИШИН
Павел Григорьевич

**МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
В ЗАДАЧАХ МАГНИТОСТАТИКИ**

Специальность 01.01.07 – вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 1983

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации.

Научные руководители:

доктор физико-математических наук,
профессор

Е. П. ЖИДКОВ

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник

С. Б. ВОРОЖЦОВ

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник

В. В. ДИКУСА

кандидат физико-математических наук,
доцент

В. С. БОНДАРЕНКО

Ведущее научно-исследовательское учреждение:

Вычислительный центр Сибирского отделения АН СССР, г. Новосибирск.

Автореферат разослан "31" октября 1983 г.

Защита диссертации состоится "1" декабря 1983 г. в 10-30
в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного
института ядерных исследований, г. Дубна.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета

кандидат физико-математических наук

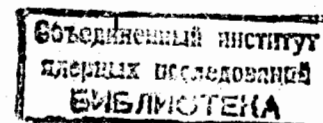
Иван З. М. Иванченко

Актуальность

При проектировании и эксплуатации различных физических установок возникает необходимость в изучении магнитостатических полей. Выбор оптимальных вариантов конструкций электромагнитов в крупных электрофизических установках с учетом того, что они относятся к числу весьма дорогостоящих элементов, имеет важное практическое значение. Одним из наиболее эффективных современных методов решения подобных задач является численный эксперимент. Численное моделирование позволяет исследовать картину магнитного поля значительно полнее, быстрее и дешевле, чем это можно сделать методами экспериментальной физики. В некоторых случаях поставить физический эксперимент представляется весьма трудной, либо совсем невыполнимой задачей, например, когда требуется определить магнитное поле внутри ферромагнетика. В этих случаях численный эксперимент является единственным способом исследования.

Существует три основных типа постановок задач магнитостатики: дифференциальный, интегральный и смешанный. Они различаются характером уравнений, используемых для описания магнитостатического поля. Каждый класс методов имеет как свои достоинства, так и свои недостатки. Предпочтительное использование того или иного метода определяется геометрией магнита, формой токовых элементов, уровнем локализации поля, характером распределения поля и так далее.

Диссертация посвящена методу второго типа – методу интегральных уравнений. Если метод граничных интегральных уравнений достаточно хорошо изучен и широко используется, то метод объемных интегральных уравнений содержит много вопросов как в теоретическом плане, так и при практическом использовании. Основная трудность заключается в трехмерности самих уравнений, что предъявляет жесткие требования к качеству дискретизации интегральных уравнений, к методам решения дискретизованных уравнений. При больших значениях магнитной проницаемости имеет место плохая обусловленность дискретизованных задач. Ввиду большого количества многократных, в общем случае, сингулярных интегралов возникают затруднения при вычислении коэффициентов матриц, входящих в уравнения. Эффективность использования метода интегральных уравнений для расчета физических установок связана с решением подна-



тых проблем. Все это определяет актуальность разработки методов решения поставленных вопросов.

Работы, положенные в основу диссертации, выполнены в соответствии с проблемно-тематическим планом научно-исследовательских работ Объединенного института ядерных исследований в Дубне.

Цель работы

Целью диссертационной работы является разработка и теоретическое обоснование численных методов решения задач магнитостатики, что включает:

- построение дискретизованных уравнений;
- теоретическое обоснование свойств дискретизованных задач;
- разработка математических методов и алгоритмов, необходимых для реализации предлагаемых дискретизаций;
- разработка итерационных процессов для решения нелинейных дискретизованных уравнений;
- применение разработанных алгоритмов для решения конкретных прикладных задач.

Научная новизна

В отличие от традиционных методов дискретизации объемных интегральных уравнений магнитостатики введением дополнительного интегрирования по точкам наблюдения построены кусочно-постоянная и кусочно-линейная дискретизации. Проведено теоретическое обоснование рассматриваемых дискретизованных задач. Доказаны теоремы существования решения. Для кусочно-постоянной дискретизации доказаны теоремы единственности решения и непрерывной зависимости от входных данных. При стремлении диаметра разбиения области к нулю показана сходимость решений дискретизованных задач к решению непрерывной задачи и получены неулучшаемые в классе кусочно-постоянных функций оценки скорости сходимости. Разработаны итерационные методы решения нелинейных дискретизованных уравнений. Доказана теорема о сходимости итерационного процесса к решению от любого начального приближения со скоростью геометрической прогрессии. Разработана методика вычисления коэффициентов матриц, входящих в дискретизованные уравнения и в связи с этим сформулированы методы приведения многократных сингулярных интегралов к комбинации регулярных интегралов меньшей кратности. В случае постоянной магнитной проницаемости исследовано поведение поля в окрестности угловых точек.

Практическая ценность

Разработанная и теоретически обоснованная методика позволяет выписывать дискретизованные задачи интегральных уравнений магнито-

статике более высокого порядка точности, чем существующие. Метод решения нелинейных дискретизованных уравнений, предложенный в диссертации, позволил получить распределение поля в магнитных системах, которые не удавалось рассчитать ранее. Методы и алгоритмы, развитые в диссертации, применялись для расчета конкретных физических установок. При разработке изохронного циклотрона мощного нейтронного источника с дейтронным пучком энергии 35 МэВ и потоком $10^{14}-10^{15} \text{ н/см}^2 \cdot \text{с}$ в Лаборатории ядерных проблем Объединенного института ядерных исследований в Дубне проведен трехмерный расчет магнитостатического поля секторного электромагнита. Проведен расчет электростатического поля от сложной конфигурации электродов (дуант, противодуантная рамка, источник ионов, шток источника горизонтального ввода, пулер), необходимый при анализе динамики движения пучка в центральной области фазотрона. При этом методом решения большого количества прямых задач решалась обратная задача - определение необходимой конфигурации электродов. Проведен расчет поля в дипольном магните с учетом угловых особенностей. Часть результатов, полученных в диссертации, имеет самостоятельное прикладное значение: разработанный и реализованный в виде комплекса программ на языке фортран алгоритм разбиения на тетраэдры области, представляемой в виде объединения многогранников; новые оптимальные кубатурные формулы для тетраэдров; методика вычисления многомерных сингулярных интегралов.

Сравнение результатов расчетов с реальными данными и с расчетами, использующими дифференциальную постановку задач магнитостатики, позволяет сделать вывод, что метод интегральных уравнений является эффективным инструментом для расчета магнитных систем физических установок.

Апробация работы

Основные результаты диссертационной работы докладывались на Международном совещании по программированию и математическим методам решения физических задач (Дубна, 1977 г.), на шестой международной школе по применению математики в технике (Варна, НРБ, 1980 г.), на Всесоюзной школе по численным методам решения задач математической физики (Рига, 1982 г.), на Международной конференции по расчетам магнитных полей COMPMAG (Гренобль, Франция, 1978 г.).

Публикации

Основное содержание диссертации опубликовано в девяти печатных работах.

Структура и объем работы

Диссертация изложена на 101 странице машинописного текста и состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 98 наименований, пяти таблиц и тридцати рисунков.

Содержание диссертации

Во введении дается краткий обзор литературы по вопросам математического моделирования нелинейных задач магнитостатики, приводится круг изучаемых проблем. Пусть $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i$ есть разбиение замкнутой ограниченной области Ω ($\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$, $\Omega \in R^3$), причем мера пересечения Ω_i с Ω_j при $i \neq j$ равна нулю. Пусть $\{f_k(\bar{x}), k=1, \dots, N\}$ есть набор функций, ассоциированных с разбиением $\{\Omega_k\}$

$$f_k(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \bar{x} \in \Omega_k \\ 0 & \bar{x} \notin \Omega_k \end{cases}$$

Кусочно-постоянная дискретизация интегральных уравнений магнитостатики описывается следующей системой нелинейных уравнений

$$\int_{\Omega} f_k(\bar{a}) \left(\sum_{\ell=1}^N \frac{\bar{B}_{\ell}}{\mu(\|\bar{B}_{\ell}\|)} f_{\ell}(\bar{a}) \right) dV_{\bar{a}} = \mu_0 \int_{\Omega} \bar{H}^S(\bar{a}) f_k(\bar{a}) dV_{\bar{a}} + \int_{\Omega} f_k(\bar{a}) dV_{\bar{a}} \frac{\sqrt{\bar{a}}}{4\pi} \left[\int_{\Omega} \left(\sum_{\ell=1}^N \bar{B}_{\ell} \left(1 - \frac{1}{\mu(\|\bar{B}_{\ell}\|)} \right) f_{\ell}(\bar{x}) \right), \sqrt{\bar{a}} \frac{1}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} \right] dV_{\bar{x}} \quad (I)$$

$K=1, 2, \dots, N$

Вектор $\bar{H}^S(\bar{a})$ в (I) — есть поле от токовых обмоток, вычисляемое по закону Био-Савара, \bar{B}_k — индукция магнитного поля в Ω_k , $\mu(x)$ — магнитная проницаемость, μ_0 — абсолютная магнитная проницаемость вакуума. Аналогично выписываются дискретизации более высокого порядка. Для кусочно-линейной дискретизации в качестве набора $\{f_k(\bar{x})\}$ в (I) берутся кусочно-линейные функции. Запишем (I) сокращенно в виде

$$[C] \hat{B} = \hat{H}^S + ([C] + [D]) \hat{M}(\hat{B}) \quad (2)$$

где $[C]$ и $[D]$ симметричные матрицы размера $[3N \times 3N]$, $\hat{B} = (\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_N)^T$, $\hat{M}(\hat{B}) = (\bar{M}_1(1 - \frac{1}{\mu(\|\bar{B}_1\|)}, \dots, \bar{M}_N(1 - \frac{1}{\mu(\|\bar{B}_N\|)}))^T$, $\hat{H}^S = (\int_{\Omega} \bar{H}^S(\bar{a}) f_1(\bar{a}) dV_{\bar{a}}, \dots, \int_{\Omega} \bar{H}^S(\bar{a}) f_N(\bar{a}) dV_{\bar{a}})^T$.

Первая глава посвящена вопросам теоретического обоснования рассматриваемых дискретизаций. Все дальнейшие рассуждения проводятся в предположении, что для $M(B) = B(1 - \frac{1}{\mu(B)})$ при любом B выполняется неравенство

$$0 \leq M(B) \leq M_{\max} \quad (3)$$

Для любого типа железа неравенство (3) имеет место. Дополнительно потребуем, чтобы для произвольных B_1 и B_2 выполнялось неравенство

$$|M(B_1) - M(B_2)| \leq g |B_1 - B_2| \quad (4)$$

где $0 \leq g < 1$ и не зависит от B_1 и B_2 . Неравенство (4) имеет место для безгистерезисных сред.

На основе принципа Шаудера, используя неравенство (3), в § I.1 доказываются теоремы существования решения у всех рассматриваемых во введении дискретизаций интегральных уравнений магнитостатики.

В § I.2 доказывается теорема о единственности решения дискретизованной задачи (I).

В § I.3 доказывается непрерывная зависимость решения (I) от внешнего поля \bar{H}^S . Пусть $\bar{H}^S = \hat{H}^S + \Delta \hat{H}^S$, и \hat{B} удовлетворяет уравнению

$$[C] \hat{B} = \hat{H}^S + ([C] + [D]) \hat{M}(\hat{B}) \quad (5)$$

Пусть $V_{\min} = \min_k \int_{\Omega} f_k(\bar{a}) dV_{\bar{a}} > 0$. Имеет место теорема

Теорема

Решение \hat{B} системы (2) непрерывно зависит от вектора \hat{H}^S .

Имеют место оценки

$$\|\hat{B} - \tilde{B}\| \leq \frac{2}{1-g^2} \frac{\|\Delta \hat{H}^S\|}{V_{\min}}$$

$$\|\hat{M}(\hat{B}) - \hat{M}(\tilde{B})\| \leq \frac{2g}{1-g^2} \frac{\|\Delta \hat{H}^S\|}{V_{\min}}$$

$$([C](\hat{B} - \tilde{B}), (\hat{B} - \tilde{B})) \leq \frac{4([C]^{-1} \Delta \hat{H}^S, \Delta \hat{H}^S)}{(1-g^2)^2}$$

$$([C](\hat{M}(\hat{B}) - \hat{M}(\tilde{B})), (\hat{M}(\hat{B}) - \hat{M}(\tilde{B}))) \leq \frac{4g^2([C]^{-1} \Delta \hat{H}^S, \Delta \hat{H}^S)}{(1-g^2)^2}$$

В этом же параграфе доказывается сходимость в метрике $L^2(\Omega)$ кусочно-постоянных решений (I) к решению исходных интегральных уравнений. При стремлении к нулю диаметра h разбиения области Ω на подобласти Ω_i ($\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$) показано, что уклонение решения дискретизованной задачи от решения непрерывной в метрике $L^2(\Omega)$ есть величина порядка $O(h)$.

Вторая глава посвящена вопросам практической реализации рассматриваемых дискретизаций. При вычислении коэффициентов матриц, входящих в дискретизованные уравнения, возникает проблема вычисления большого количества, в общем случае, сингулярных, шестикратных интегралов. В тех случаях, когда эти интегралы удается взять аналитически, это приводит к громоздким выражениям от плохо вычисляемых на ЭВМ функций. Как правило, эти интегралы не представляются в виде конечных выражений от элементарных функций. В связи с этим в диссертации интегралы определяются численно с использованием кубатурных формул. В тех случаях, когда подинтегральная функция сингулярна, применение кубатурных формул затруднительно. Во второй главе разрабатывается методика вычисления подобных интегралов.

В § 2.1. рассматриваются вопросы разбиения области на базисные элементы. Так как тетраэдры - достаточно удобные элементы для описания сложных границ, в этом параграфе разрабатывается один алгоритм разбиения на тетраэдры области, представляемой в виде объединения многогранников. Алгоритм реализован в виде комплекса программ на языке фортран. Так как подинтегральная функция значительно изменяется в пределах элемента, возникает необходимость в привлечении кубатурных формул высокого порядка точности. Ввиду большого количества интегралов, подлежащих вычислению, накладываются особенно жесткие ограничения на оптимальность кубатурных формул. В связи с этим в § 2.2 выводятся новые оптимальные кубатурные формулы шестого и седьмого порядка точности для тетраэдров.

На основе понятия однородных функций в § 2.3 разрабатывается методика приведения многократных сингулярных интегралов к комбинации регулярных интегралов меньшей кратности. Рассматриваются обобщения данной теории. Доказана одна теорема о понижении порядка интегрирования. Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int_0^b dx \int_{G(x)} F(x, \bar{y}) dv_{\bar{y}} \quad (6)$$

$G(x)$ - область из R^N , параметрически зависящая от x ; \bar{y} - вектор из $G(x)$. Сформулируем следующие четыре условия:

- Интеграл (6) сходится абсолютно.
- Интеграл $\int_{G(x)} F(x, \bar{y}) dv_{\bar{y}}$ сходится абсолютно и есть непрерывная функция параметра x из полуинтервала $(0, b]$.
- Существует γ такое, что область $G(\lambda x)$ получается из $G(x)$ растяжением в λ^γ раз относительно начала координат для всех λ из отрезка $[0, 1]$.

D. Функция $F(x, \bar{y})$ такова, что $F(\lambda x, \lambda^\gamma \bar{y}) = \lambda^k F(x, \bar{y})$, здесь γ то же самое, что и в C и $0 \leq \lambda \leq 1$.

Теорема

Пусть выполняются условия A, B, C, D и $\gamma_{N+1+k} \neq 0$. Тогда $\int_0^b dx \int_{G(x)} F(x, \bar{y}) dv_{\bar{y}} = \frac{b}{1+\gamma_{N+1+k}} \int_{G(b)} F(b, \bar{y}) dv_{\bar{y}}$.

В § 2.4. предлагаются два метода решения нелинейных дискретизованных уравнений. Первый метод ориентирован на решение дискретизованных задач магнитостатики достаточно общего вида (в рамках интегральной постановки). Вторым алгоритмом предполагается для решения дискретизованной системы (2). Рассмотрим следующий итерационный процесс

$$[C] \hat{B}_{k+1} = \hat{H}^S + ([C] + [D]) \hat{M}(\hat{B}_k) \quad k=0, 1, \dots \quad (7)$$

Пусть $\hat{R}(\hat{B}_0) = \hat{H}^S + ([C] + [D]) \hat{M}(\hat{B}_0) - [C] V_0$; имеет место следующая теорема.

Теорема

Итерационный процесс (7) сходится от любого начального приближения \hat{B}_0 к решению \hat{B} системы (2) со скоростью геометрической прогрессии, и имеет место неравенство

$$\|\hat{B}_k - \hat{B}\| \leq \frac{g^k}{1-g} \sqrt{\frac{([C]^{-1} \hat{R}(\hat{B}_0), \hat{R}(\hat{B}_0))}{V_{\min}}}$$

где $V_{\min} = \min_k \int_{\Omega} f_k(\bar{a}) dv_{\bar{a}}, \quad 0 \leq g < 1$.

В третьей главе рассматриваются как теоретические, так и прикладные вопросы.

В § 3.1. изучаются вопросы поведения интегральных уравнений при стремлении точки наблюдения к границе железа. Показывается, что в случае гладкой границы существует предел интегрального оператора, что позволяет записать уравнения для точки на границе. Для постоянной магнитной проницаемости в двумерном случае изучается поведение интегральных уравнений поля в окрестности угловых точек.

В § 3.2 рассматривается двумерный расчет магнитного поля с учетом угловых особенностей. Приводится расчет электростатического поля сложной конфигурации электродов фазотрона с использованием граничных интегральных уравнений.

В § 3.3 приводится расчет трехмерного секторного магнита циклотрона мощного нейтронного источника на энергию дейтронов 35 МэВ и потоком $10^{14} - 10^{15}$ н/(см². с).

В § 3.4 приводится описание комплекса программ, реализующих кусочно-постоянную дискретизацию, рассматриваются вопросы регуляризации решений при больших значениях магнитной проницаемости.

В заключении приводятся основные результаты диссертации:

1. В диссертации изучены кусочно-постоянная и кусочно-линейная дискретизации в рамках интегрального подхода. Доказаны теоремы существования решения у рассматриваемых в диссертации дискретизаций, а также у дискретизаций, положенных в основу пакетов прикладных программ по расчету магнитостатических полей. "GFUN3D" (Резерфордская лаборатория) и "MAGSYS" (ОИЯИ).

2. Доказана единственность решения, а также его сходимость к непрерывному для кусочно-постоянной дискретизации. Показана непрерывная зависимость решения от входных данных. Получены неулучшаемые в классе кусочно-постоянных функций оценки скорости сходимости дискретизованных решений к непрерывному.

3. Разработан и реализован на языке фортран генератор разбиения на тетраэдры области, представляемой в виде объединения выпуклых многогранников.

4. В диссертации получены две оптимальные кубатурные формулы для тетраэдров шестого и седьмого порядка точности.

5. На основе понятия однородных функций разработана теория приведения многократных сингулярных интегралов к комбинации регулярных интегралов меньшей кратности.

6. В диссертации разработан эффективный итерационный алгоритм решения дискретизованных нелинейных уравнений магнитостатики, который получил свое дальнейшее развитие в широко используемом в ОИЯИ пакете программ по расчету магнитных систем ускорителей методом интегральных уравнений "MAGSYS".

7. Для кусочно-постоянной дискретизации разработан итерационный алгоритм решения нелинейных уравнений. Доказана теорема о сходимости итерационного процесса от любого начального приближения со скоростью геометрической прогрессии.

8. Проведены исследования поведения интегрального уравнения магнитостатики при стремлении точки наблюдения к границе области. В случае постоянной магнитной проницаемости проведен расчет поля с учетом его поведения в угловых точках.

9. Методом граничных интегральных уравнений проведен расчет ускоряющего поля, создаваемого сложной конфигурацией электродов в центральной области фазотрона.

10. Проведен трехмерный расчет секторного магнита изохронного циклотрона мощного нейтронного источника с дейтронным пучком энергии 35 МэВ и потоком $10^{14} - 10^{15}$ н/(см².с).

Работы, положенные в основу диссертации:

1. Akishin P.G., Vorozhtsov S.B., Zhidkov E.P. Calculation of the magnetic field of the isochronous cyclotron sector magnet by the integral equation method. - COMPUMAG Conference, Grenoble, France, 1978.
2. Акишин П.Г., Ворожцов С.Б., Жидков Е.П. Численные эксперименты по применению метода интегральных уравнений к решению трехмерных магнитостатических полей. ОИЯИ, ДЮ, II-II264, Дубна, 1978.
3. Акишин П.Г., Жидков Е.П. О существовании решений дискретизованных задач магнитостатики. ОИЯИ, РII-8I-826, Дубна, 1981.
4. Акишин П.Г., Жидков Е.П. О единственности решения дискретизованных задач магнитостатики. ОИЯИ, II-83-427, Дубна, 1983.
5. Акишин П.Г., Ворожцов С.Б., Жидков Е.П. Генерирование трехмерной тетраэдральной сетки в приложении к методу конечных элементов. ОИЯИ, Р5-12569, Дубна, 1979.
6. Акишин П.Г., Жидков Е.П. Некоторые кубатурные формулы для симплексов. ОИЯИ, II-8I-395, Дубна, 1981.
7. Акишин П.Г., Ворожцов С.Б., Шакун М.Г. К расчету двумерных электростатических полей методом граничных интегральных уравнений. ОИЯИ, 9-83-2, Дубна, 1983.
8. Акишин П.Г., Жидков Е.П. Вычисления магнитного поля методом интегральных уравнений в случае постоянной магнитной проницаемости. ОИЯИ, РII-82-702, Дубна, 1982.
9. Акишин П.Г., Жидков Е.П. Об одном методе интегрирования однородных функций нескольких переменных. ОИЯИ, II-8I-3I4, Дубна, 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 июля 1983 года.