сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

4540/83

29/VIII-83

11-83-427

П.Г.Акишин, Е.П.Жидков

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТИЗОВАННЫХ ЗАДАЧ МАГНИТОСТАТИКИ

1983

Рассмотрим интегральную постановку задач магнитостатики. Пусть $\bar{H}(a)$ - напряженность магнитного поля в точке $\bar{a}$. Представим ее в виде суммы двух векторов:

$$\bar{H}(\bar{a}) = \bar{H}^{s}(\bar{a}) + \bar{H}^{m}(\bar{a}) , \tag{1}$$

где $\bar{H}^{s}(\bar{a})$ есть поле, создаваемое обмотками с плотностью тока $\bar{J}(\bar{x})$. Пусть Ω_S - объем, занимаемый токовыми элементами, тогда:

$$\bar{H}^{s}(\bar{a}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_S}\left[\bar{J}(\bar{x}) \times \nabla_a \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|}\right] dV_x . \tag{2}$$

Вектор $\bar{H}^{m}(\bar{a})$ в (I) есть добавочное поле, создаваемое в точке $\bar{a}$ в результате намагничивания железа:

$$\bar{H}^{m}(\bar{a}) = \frac{1}{4\pi}\nabla_a\left[\int_{\Omega}\left(\bar{M}(\bar{x}), \nabla_a \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|}\right) dV_{\bar{x}}\right] , \tag{3}$$

где $\bar{M}(\bar{x})$ - намагниченность в точке x, Ω - область, заполненная железом. Пусть $\bar{B}(\bar{a})$ - индукция магнитного поля. Имеют место уравнения, связывающие $\bar{H}(\bar{a})$, $\bar{B}(\bar{a})$, $\bar{M}(\bar{a})$:

$$\begin{aligned} \bar{H}(\bar{a}) &= \frac{\bar{B}(\bar{a})}{\mu\mu_0} , \\ \bar{M}(\bar{a}) &= \frac{\bar{B}(\bar{a})}{\mu_0} - \bar{H}(\bar{a}) , \end{aligned} \tag{4}$$

где μ_0 - абсолютная магнитная проницаемость вакуума, μ - магнитная проницаемость, вне железа тождественно равная единице, а внутри являющаяся нелинейной функцией, характеризующей связь между $\bar{H}$, $\bar{B}$ для данного ферромагнетика. Разрешая (4) относительно $\bar{M}$ и подставляя результат в (I), получаем формулировку, рассматриваемую в /I/,/2/:

$$\frac{\bar{M}(\bar{a})}{\mu-1} = \bar{H}^{s}(a) + \frac{\nabla_a}{4\pi}\left[\int_{\Omega}\left(\bar{M}(\bar{x}), \nabla_a \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|}\right) dV_{\bar{x}}\right] . \tag{5}$$

Разрешая (4) относительно $\bar{B}$, получим постановку задачи, рассматриваемую в /5/:

$$\frac{\bar{B}(a)}{\mu} = \mu_0 \bar{H}^{s}(a) + \frac{\nabla_a}{4\pi}\left[\int_{\Omega}\left(\bar{B}(\bar{x})\left(1-\frac{1}{\mu}\right) \nabla_a \frac{1}{|\bar{x}-a|}\right) dV_x\right] . \tag{6}$$

...довани...

Пусть $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i$, где мера пересечения Ω_i с Ω_j при $i \neq j$ равна 0 . Кусочно-постоянная дискретизация (6) из /3/ будет иметь вид:

$$\frac{\bar{B}_i}{\mu(|\bar{B}_i|)} \int_{\Omega_i} dV_a = \mu_0 \int_{\Omega_i} \bar{H}^s(\bar{a})\, dV_a + \int_{\Omega_i} dV_a \frac{\nabla_a}{4\pi} \Big[\sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega_j} \Big(\bar{B}_j \Big(1 - \frac{1}{\mu(|\bar{B}_j|)}\Big), \nabla_a \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|}\Big) dV_x \Big]. \quad (7)$$

$$i = 1, \ldots, N$$

Данная работа посвящена вопросам теоретического обоснования свойств дискретизации (7). Подобные вопросы для кусочно-постоянной дискретизации (5) исследуются в /2/ в предположении, что магнитная проницаемость $\mu \geq c_0 > 1$. В данной работе удается ослабить это ограничение. Пусть B, H, M есть модули $\bar{B}, \bar{H}, \bar{M}$. Из (4) следует, что B, H, M связаны соотношениями

$$H = \frac{B}{\mu \mu_0}, \quad (8)$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H .$$

В дальнейшем будем предполагать, что для напряженности $H = H(B)$, рассматриваемой как функция B , имеет место неравенство

$$0 < \alpha \leq \mu_0 \frac{\partial H}{\partial B} \leq 1 , \quad (9)$$

где α постоянно для данного типа железа и не зависит от H и B. В предположении (9) удается доказать теоремы единственности и непрерывной зависимости от входных данных решения (7), получены неулучшаемые оценки скорости сходимости решения (7) к решению интегрального уравнения (6), предлагается итерационный метод решения (7). Отметим, что теорема существования решения у системы (7) в предположении ограниченности модуля намагниченности доказывается в /3/.

§ I. Теорема единственности

В этом параграфе доказывается теорема единственности решения (7). Предварительно сформулируем некоторые вспомогательные утверждения. Рассмотрим интегральный оператор, стоящий в правой части (3):

$$A(\bar{M}) = -\frac{\nabla_a}{4\pi} \Big[\int_{\Omega} \Big(\bar{M}(\bar{x}), \nabla_a \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|}\Big) dV_{\bar{x}} \Big] , \quad (10)$$

где Ω - односвязная, ограниченная в R^3 и замкнутая область. Основные свойства его сформулированы в /I/. Пусть $L^2(\Omega)$ есть гильбертово пространство действительных, квадратично суммируемых в Ω вектор-функций со скалярным произведением $(\ ,\ )_\Omega$ и нормой $\|\cdot\|_\Omega$:

$$(\bar{F}, \bar{G})_\Omega = \int_{\Omega} (\bar{F}(x), \bar{G}(x))\, dV_{\bar{x}} ,$$

$$\|\bar{F}\|^2_\Omega = (\bar{F}, \bar{F})_\Omega .$$

Потребуем дополнительно, чтобы $\bar{M}(\bar{x})$ была гладкой функцией. Приведем теорему из /I/.

Теорема I /I/

Оператор A ограничен с $\|A\|_\Omega = 1$.

Оператор A самосопряжен.

Для оператора A имеет место неравенство

$$(A(\bar{M}), \bar{M})_\Omega \geq 0 , \quad (II)$$

причем

$$\inf_{\|\bar{M}\|_\Omega = 1} (A(\bar{M}), \bar{M}) = 0. \quad (I2)$$

Из теоремы I следует

$$(A(M), \bar{M})_\Omega \leq \|\bar{M}\|^2_\Omega . \quad (I3)$$

Повторяя рассуждения в /I/, нетрудно доказать, что утверждения теоремы остаются в силе, исключая (I2), когда $\bar{M}(x)$ - кусочно-постоянная функция.

Пусть $B_2 \geq B_1$; из (8), (9) следует

$$\mu_0 |M(B_2) - M(B_1)| = \Big| \int_{B_1}^{B_2} \Big(1 - \mu_0 \frac{\partial H}{\partial x}\Big) dx \Big| \leq (1-\alpha)\, |B_2 - B_1| .$$

Отсюда для любых B_2 и B_1 выполняется неравенство

$$\mu_0 |M(B_2) - M(B_1)| \leq q\, |B_2 - B_1| , \quad (I4)$$

где $0 \leq q < 1$.

Лемма I

Для любых $\bar{B}_1$ и $\bar{B}_2$ имеет место неравенство

$$\mu_0 \|\bar{M}(\bar{B}_2) - \bar{M}(\bar{B}_1)\| \leq q \|\bar{B}_2 - \bar{B}_1\| , \quad (I5)$$

где $0 \leq q < 1$.

Доказательство

Пусть θ - угол между $\bar{B}_2$ и $\bar{B}_1$. Имеем

$$\|\bar{M}(\bar{B}_1) - \bar{M}(\bar{B}_2)\|^2 = |M(B_1) - M(B_2)|^2 + 4 M(B_1) M(B_2) \sin^2\Big(\frac{\theta}{2}\Big) .$$

Из (I4) следует, что $\mu_0 |M(B)| \leq q\, |B|$ для любого B. Используя этот факт и (I4), получаем

$$\mu_0^2 \|\bar{M}(\bar{B}_1) - \bar{M}(\bar{B}_2)\|^2 \leq q^2 \Big(|B_2 - B_1|^2 + 4 B_1 B_2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\Big) = q^2 \|\bar{B}_2 - \bar{B}_1\|^2 ,$$

и лемма доказана.

Введем следующие обозначения. Пусть $\hat{B}$ есть вектор в R^{3N},

$$\hat{B} = (\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_N)^T ;$$

$\hat{M}(\hat{B})$ есть

$$\hat{M}(\hat{B}) = (\bar{B}_1 (1 - \frac{1}{\mu(|\bar{B}_1|)}), \quad \dots \quad , \bar{B}_N (1 - \frac{1}{\mu(|\bar{B}_N|)}))^T ;$$

, $\hat{H}^S$ есть

$$\hat{H}^S = (\mu_0 \int_{\Omega_1} \bar{H}^S(\bar{a})\, dV_{\bar{a}} \ , \dots , \mu_0 \int_{\Omega_N} \bar{H}^S(\bar{a})\, dV_{\bar{a}})^T ,$$

где $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i$. Обозначим $V_i = \int_{\Omega_i} dV_a \quad (i = 1, \dots, N)$.

Матрица $[C]$ есть диагональная матрица размера $[3N \times 3N]$ вида

$$[C] = \begin{pmatrix} V_1 & & & & & & & & \\ & V_1 & & & & & & & \\ & & V_1 & & & & & & \\ & & & V_2 & & & & 0 & \\ & & & & V_2 & & & & \\ & & & & & V_2 & & & \\ & 0 & & & & & V_N & & \\ & & & & & & & V_N & \\ & & & & & & & & V_N \end{pmatrix} .$$

Пусть $[D]$ есть матрица размера $[3N \times 3N]$ вида

$$[D] = \begin{pmatrix} D_{11} & & D_{1N} \\ & & \\ D_{N1} & & D_{NN} \end{pmatrix} ,$$

где $[D_{ij}]$ - матрицы размера $[3 \times 3]$, такие, что

$$[D_{ij}]\bar{M} = \int_{\Omega_i} dV_a \frac{\nabla_a}{4\pi} \Big[\int_{\Omega_j} (\bar{M}, \nabla_a \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|})\, dV_x \Big] .$$

Сокращенно (7) можно записать в виде

$$[C]\hat{B} = \hat{H}^S + ([C] + [D])\hat{M}(\hat{B}) . \tag{I6}$$

Отметим, что матрицы $[C]$ и $[D]$ - симметричные.

Пусть $\{f_i(\bar{x}), i = 1, \dots, N\}$ - набор функций, таких, что

$$f_i(\bar{x}) = \begin{cases} 1 , & \bar{x} \in \Omega_i . \\ 0 , & \bar{x} \bar{\in} \Omega_i . \end{cases} \tag{I7}$$

Положим $\bar{u}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{N} \bar{u}_i f_i(\bar{x}) \qquad (\bar{u}_i \in R^3)$.

Из (II), (I3) следует

$$\|\bar{u}\|^2_\Omega \geq (A(\bar{u}), \bar{u})_\Omega \geq 0 , \tag{I8}$$

где $A(\bar{u})$ - оператор из (I0). Заметим, что

$$\|\bar{u}\|^2_\Omega = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} f_i^2(\bar{x}) \|\bar{u}_i\|^2 dV_x = ([C]\hat{u}, \hat{u}) ,$$

матрица $[C]$ входит в (I6), а вектор $\hat{u} = (\bar{u}_1, \dots, u_N)^T$.

Аналогично получаем

$$(A(\bar{u}), \bar{u})_\Omega = -([D]\hat{u}, \hat{u}) ,$$

матрица $[D]$ входит в (I6). Учитывая это, из (I8) имеем

$$-([C]\hat{u}, \hat{u}) \leq ([D]\hat{u}, \hat{u}) \leq 0 . \tag{I9}$$

Трансформируем (I9) к виду

$$0 \leq (([C] + [D])\hat{u}, \hat{u}) \leq ([C]\hat{u}, \hat{u}) , \tag{20}$$

где $\hat{u}$ - произвольный вектор в R^{3N}.

Теорема 2

Система (I6) имеет единственное решение.

Доказательство

Доказательство будем проводить от противного. Пусть система (I6) имеет два решения $\hat{B}_1$ и $\hat{B}_2$. Имеем

$$[C]\hat{B}_1 = \hat{H}^S + ([C] + [D])\hat{M}(\hat{B}_1) , \tag{2I}$$

$$[C]\hat{B}_2 = \hat{H}^S + ([C] + [D])\hat{M}(\hat{B}_2) . \tag{22}$$

Вычитая (2I) из (22), получаем:

$$[C](\hat{B}_2 - \hat{B}_1) = ([C] + [D])(\hat{M}(\hat{B}_2) - \hat{M}(\hat{B}_1)) . \tag{23}$$

Для любой симметричной положительной матрицы $[S]$ имеет место неравенство

$$2([S]\bar{x}, \bar{y}) \leq ([S]\bar{x}, \bar{x}) + ([S]\bar{y}, \bar{y}) . \tag{24}$$

Умножая (23) скалярно на $(\hat{B}_2 - \hat{B}_1)$ и учитывая (24), (20), получаем

$$([C](\hat{B}_2 - \hat{B}_1), \hat{B}_2 - \hat{B}_1) \leq ([C](\hat{M}(\hat{B}_2) - \hat{M}(\hat{B}_1)), (\hat{M}(\hat{B}_2) - \hat{M}(\hat{B}_1))) . \tag{25}$$

Заметим, что

$$([C](\hat{M}(\hat{B}_2)-\hat{M}(\hat{B}_1)),(\hat{M}(\hat{B}_2)-\hat{M}(\hat{B}_1))) = \sum_{i=1}^{N} \mu_0^2 \|\bar{M}(\bar{B}_i^2)-\bar{M}(\bar{B}_i^1)\|^2 V_i .$$

Учитывая (15), получаем

$$([C](\hat{B}_2-\hat{B}_1),(\hat{B}_2-\hat{B}_1)) \le g^2([C](\hat{B}_2-\hat{B}_1),(\hat{B}_2-\hat{B}_1)).$$

Из положительной определенности $[C]$ и условия, что $0 \le g < 1$, следует:

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 .$$

Теорема 2 доказана.

§ 2. Сходимость дискретизованных решений

В этом параграфе доказывается теорема о непрерывной зависимости решения от исходных данных и теорема о сходимости решений дискретизованных задач к решению уравнения (6).

Рассмотрим поведение вектора $\hat{B}$ – решения системы (16) в зависимости от вектора $\hat{H}^s$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3

Решение $\hat{B}$ системы (16) непрерывно зависит от вектора $\hat{H}^s$. Пусть $\tilde{B}$ таков, что имеет место равенство

$$[C]\tilde{B} - \hat{H}^s = ([C]+[D])\hat{M}(\tilde{B}) - \bar{\varepsilon} . \tag{26}$$

Тогда справедливы оценки

$$\|\hat{B}-\tilde{B}\| \le \frac{2}{(1-g^2)} \frac{\|\bar{\varepsilon}\|}{\min\limits_{k} V_k} , \tag{27}$$

$$([C](\hat{B}-\tilde{B}),(\hat{B}-\tilde{B})) \le \frac{4([C]^{-1}\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon})}{(1-g^2)^2} . \tag{28}$$

Доказательство

Вычитая (16) из (26), получаем

$$[C](\tilde{B}-\hat{B}) = ([C]+[D])(\hat{M}(\tilde{B})-\hat{M}(\hat{B})) + \bar{\varepsilon} . \tag{29}$$

Умножая (29) скалярно на $(\tilde{B}-\hat{B})$ и учитывая (23) и (24), имеем:

$$([C](\tilde{B}-\hat{B}),(\tilde{B}-\hat{B})) \le ([C](\hat{M}(\tilde{B})-\hat{M}(\hat{B})),(\hat{M}(\tilde{B})-\hat{M}(\hat{B}))) + (\bar{\varepsilon}, \tilde{B}-\hat{B}).$$

Воспользовавшись (15), получаем

$$([C](\tilde{B}-\hat{B}),(\tilde{B}-\hat{B})) \le \frac{2(\bar{\varepsilon},\tilde{B}-\hat{B})}{1-g^2} . \tag{30}$$

Заметим, что отсюда следует $(\bar{\varepsilon},(\tilde{B}-\hat{B})) > 0$.

Далее

$$\min_{k} V_k \|\tilde{B}-\hat{B}\|^2 \le ([C](\tilde{B}-\hat{B}),(\tilde{B}-\hat{B})) \le$$

$$\le \frac{2(\bar{\varepsilon},(\tilde{B}-\hat{B}))}{1-g^2} \le \frac{2\|\bar{\varepsilon}\| \, \|\tilde{B}-\hat{B}\|}{1-g^2} .$$

Откуда следует (27).

Для доказательства (28) воспользуемся теоремой 12 из /4/.

Теорема /4/

Если действительная симметричная матрица $[S]$ положительно определена, то

$$([S]\bar{x},\bar{x})(\bar{y},[S]^{-1}\bar{y}) \ge (\bar{x},\bar{y})^2 . \tag{31}$$

Из (30), (31) следует (28), и теорема доказана.

Пусть $\bar{B}(\bar{x})$ есть решение (6). В дальнейшем будет предполагаться, что $\bar{B}(\bar{x})$ и $\bar{M}(\bar{x}) = \bar{B}(x)\left(1-\frac{1}{\mu(|\bar{B}(x)|)}\right)$ имеют ограниченные вторые производные в Ω, по совокупности переменных. Пусть h – максимальный диаметр Ω_i $(\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \Omega_i)$. Обозначим $\hat{B}(\bar{x}) = \sum\limits_{i=1}^{N} f_i(\bar{x})\bar{B}_i$, где $\hat{B} = (\bar{B}_1, \dots, \bar{B}_N)^T$ есть решение (16), а $\{f_i(\bar{x})\}$ определяется в (17). Аналогично $\hat{M}(x) = \sum\limits_{i=1}^{N} f_i(\bar{x})\bar{M}_i$, где $\bar{M}_i = \bar{B}_i\left(1-\frac{1}{\mu(|\bar{B}_i|)}\right)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4

Имеет место сходимость $\hat{B}(x)$ к $\bar{B}(x)$ в метрике $L^2(\Omega)$:

$$\|\hat{B}(x) - \bar{B}(x)\|_{\Omega} = O(h). \tag{32}$$

Доказательство

Пусть $\bar{a}_k = \int_{\Omega} f_k(\bar{x})\bar{x}\, dV_x$ $(k = 1, \dots, N)$.
Обозначим $\breve{B} = (\bar{B}(\bar{a}_1), \dots, \bar{B}(\bar{a}_N))^T$. Тогда

$$\hat{M}(\breve{B}) = (\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \dots, \tilde{M}_N)^T , \quad \text{где} \quad \tilde{M}_i = \bar{B}(\bar{a}_i)\left(1-\frac{1}{\mu(|\bar{B}(\bar{a}_i)|)}\right) .$$

Пусть

$$\tilde{B}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{N} \bar{B}(\bar{a}_i) f_i(\bar{x}) , \quad \tilde{M}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{N} \tilde{M}_i f_i(\bar{x}) .$$

Обозначим $\Delta B(\bar{x}) = \bar{B}(\bar{x}) - \tilde{B}(\bar{x})$, $\Delta \bar{M}(\bar{x}) = \bar{M}(\bar{x}) - \tilde{M}(\bar{x})$.

Интегрируя (6) по объему Ω_k, получаем:

$$\int\limits_{\Omega_K} (\tilde{B}(\bar{a}) - \tilde{M}(\bar{a}))\, dV_{\bar{a}} - \int\limits_{\Omega_K} \tilde{H}^s(\bar{a})\, dV_{\bar{a}} - \int\limits_{\Omega_K} dV_a \frac{\nabla_a}{4\pi} \Big[\int\limits_{\Omega} (\tilde{M}(\bar{x}), \nabla_a \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|})\, dV_x \Big] =$$

$$= \int\limits_{\Omega_K} (\Delta \bar{B}(\bar{a}) - \Delta \bar{M}(\bar{a}))\, dV_a + \int\limits_{\Omega_K} dV_a \frac{\nabla_a}{4\pi} \Big[\int\limits_{\Omega} (\Delta \bar{M}(\bar{x}), \nabla_a \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|})\, dV_x \Big]. \qquad (33)$$

Заметим, что при $K = 1, 2, \ldots, N$ левая часть (33) есть невязка (16) при $\hat{B} = \tilde{B}$. Оценим правую часть (33). Обозначим ее $\bar{R}_K$. Имеем:

$$\| \bar{R}_K \|^2 \leq 2 \Big(\Big\| \int\limits_{\Omega_K} (\Delta \bar{B}(\bar{a}) - \Delta \bar{M}(\bar{a}))\, dV_a \Big\|^2 + \qquad (34)$$

$$+ \Big\| \int\limits_{\Omega_K} dV_{\bar{a}} \frac{\nabla_a}{4\pi} \Big[\int\limits_{\Omega} (\Delta \bar{M}(\bar{x}), \nabla_a \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|})\, dV_x \Big] \Big\|^2 \Big).$$

Первый член в правой части неравенства (34) есть величина порядка $h^4 V_K^2$. Для второго члена имеет место оценка:

$$\Big\| \int\limits_{\Omega_K} dV_a \frac{\nabla_a}{4\pi} \Big[\int\limits_{\Omega} (\Delta \bar{M}(x), \nabla_a \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|})\, dV_x \Big] \Big\|^2 \leq$$

$$\leq V_K \int\limits_{\Omega_K} \Big\| \frac{\nabla_a}{4\pi} \Big[\int\limits_{\Omega} (\Delta \bar{M}(\bar{x}), \nabla_a \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|})\, dV_x \Big] \Big\|^2 dV_a. \qquad (35)$$

Отсюда для невязки $\hat{R} = (\bar{R}_1, \bar{R}_2, \ldots, \bar{R}_N)^T$ получаем

$$([C]^{-1} \hat{R}, \hat{R}) = \sum_{K=1}^{N} \frac{\| \bar{R}_K \|^2}{V_K} \leq 2 \Big(C_1 h^4 + \int\limits_{\Omega} dV_a \Big\| \frac{\nabla_a}{4\pi} \int\limits_{\Omega} (\Delta \bar{M}(\bar{x}), \nabla_a \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|})\, dV_x \Big\|^2 \Big). \qquad (36)$$

По теореме I

$$\int\limits_{\Omega} dV_a \Big\| \frac{\nabla_a}{4\pi} \int\limits_{\Omega} (\Delta \bar{M}(x), \nabla_a \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|})\, dV_x \Big\|^2 \leq \int\limits_{\Omega} \| \Delta \bar{M}(x) \|^2 dV_x. \qquad (37)$$

Из (36),(37) следует

$$([C]^{-1} \hat{R}, \hat{R}) = O(h^2).$$

По теореме 3 получаем

$$\| \hat{B}(\bar{x}) - \tilde{B}(\bar{x}) \|^2_{\Omega} = ([C](\hat{B} - \tilde{B}), (\hat{B} - \tilde{B})) = O(h^2). \qquad (38)$$

Далее

$$\| \bar{B}(\bar{x}) - \hat{B}(x) \|_{\Omega} \leq \| \bar{B}(x) - \tilde{B}(\bar{x}) \|_{\Omega} + \| \tilde{B}(x) - \hat{B}(\bar{x}) \|_{\Omega}.$$

По построению $\tilde{B}(\bar{x})$

$$\| \bar{B}(\bar{x}) - \tilde{B}(\bar{x}) \|_{\Omega} = O(h),$$

и из (38) следует (32). Теорема 4 доказана. Оценка (32) не улучшаема в классе кусочно-постоянных функций.

§ 3. Итерационный метод решения дискретизованных уравнений

В этом параграфе рассматривается метод решения нелинейных дискретизованных уравнений (16).

Пусть $\hat{B}^K = (\bar{B}_1^K, \bar{B}_2^K, \ldots, \bar{B}_N^K)^T$, $\hat{M}(\hat{B}^K)$ есть

$$\hat{M}(\hat{B}_K) = \Big(\bar{B}_1^K \big(1 - \frac{1}{\mu(|\bar{B}_1^K|)}\big), \ \ldots \ , \bar{B}_N^K \big(1 - \frac{1}{\mu(|\bar{B}_N^K|)}\big) \Big)^T,$$

где $K = 0, 1, 2, \ldots$. Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$[C] \hat{B}_{K+1} = \hat{H}^S + ([C] + [D]) \hat{M}(\hat{B}_K), \qquad (39)$$

$$K = 0, 1, 2, \ldots$$

Пусть $V_{min} = \min\limits_K V_K$ $(V_{min} > 0)$. Обозначим $\hat{R}(\hat{B}_0)$:

$$\hat{R}(\hat{B}_0) = \hat{H}^S + ([C] + [D]) \hat{M}(\hat{B}_0) - [C] \hat{B}_0. \qquad (40)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5

Итерационный процесс (39) сходится к единственному решению $\hat{B}$ системы (16) от любого начального приближения $\hat{B}_0$ со скоростью геометрической прогрессии:

$$\| \hat{B}_K - \hat{B} \| \leq \frac{q^K}{1-q} \sqrt{\frac{([C]^{-1} \hat{R}(\hat{B}_0), \hat{R}(\hat{B}_0))}{V_{min}}}, \qquad (41)$$

где $0 \leq q < 1$ из (15).

Доказательство

Пусть $\Delta \bar{B}_K = \hat{B}_{K+1} - \hat{B}_K$, $\Delta \bar{M}_K = \hat{M}(\hat{B}_{K+1}) - \hat{M}(\hat{B}_K)$ $(K = 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

Из (39) следует

$$[C] \Delta \bar{B}_K = ([C] + [D]) \Delta M_{K-1}. \qquad (42)$$

Умножая (42) скалярно на $\Delta \bar{B}_K$ и используя (20),(24), получим

$$([C] \Delta \bar{B}_K, \Delta \bar{B}_K) \leq ([C] \Delta \bar{M}_{K-1}, \Delta \bar{M}_{K-1}) \qquad (43)$$

Учитывая структуру $[C]$ и (15), будем иметь

$$([C] \Delta \bar{B}_K, \Delta \bar{B}_K) \leq q^2 ([C] \Delta B_{K-1}, \Delta B_{K-1}). \qquad (44)$$

Заметим, что из (44) следует

$$([C] \Delta \bar{B}_K, \Delta \bar{B}_K) \leq q^{2K} ([C] \Delta \bar{B}_0, \Delta \bar{B}_0). \qquad (45)$$

Из (45) получаем

$$\| \Delta \bar{B}_k \|^2 \le \frac{g^{2k} ([C] \Delta \bar{B}_o , \Delta \bar{B}_o)}{V_{min}} . \qquad (46)$$

Из (15) очевидно следует

$$\| \overline{\Delta M_k} \| \le g \| \overline{\Delta B_k} \| . \qquad (47)$$

Рассмотрим ряды $\hat{\hat{B}}$ и $\hat{\hat{M}}$:

$$\hat{\hat{B}} = \hat{B}_o + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta \bar{B}_k ,$$

$$\hat{\hat{M}} = \hat{M}(\hat{B}_o) + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta \overline{M_k} . \qquad (48)$$

Из (46), (47) следует, что ряды $\hat{\hat{B}}$ и $\hat{\hat{M}}$ сходятся абсолютно, причем $\hat{\hat{M}} = \hat{M}(\hat{\hat{B}})$. Очевидно, что $\hat{\hat{B}}$ удовлетворяет (16). Ввиду единственности решения (16) $\hat{\hat{B}} = \hat{B}$. Из (46) несложно получить (41), и теорема 5 доказана.

Литература

1. Friedman M.J. Mathematical Study of the Nonlinear Singular Integral Magnetic Field Equation. SIAM.J. Appl. Math. Vol.39, 1980, pp.14-20.
2. Pasciak J.E. An Iterative Algorithm for the Volume Integral Method for Magnetostatics Problems. Comp. Math 5. with Appls,vol.8,No.4, pp. 283 - 290, 1982.
3. Акишин П.Г., Жидков Е.П. ОИЯИ, Р11-81-826, Дубна, 1981.
4. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. "Мир", М., 1965.
5. Akishin P.G., Vorozhtsov S.B., Zhidkov E.P. JINR, E9-11859, Dubna, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 июня 1983 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д3-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
Д13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
Д1,2-12036	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
Д2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
Д10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
Д1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Д1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Акишин П.Г., Жидков Е.П. 11-83-427

О единственности решения дискретизованных задач магнитостатики

В работе исследуются вопросы, связанные с теоретическим обоснованием дискретизованных уравнений магнитостатики в рамках интегральной постановки. Доказывается единственность решений дискретизованных задач. Предлагается метод решений возникающих нелинейных уравнений. Оценивается скорость сходимости приближенных решений.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Akishin P.G., Zhidkov E.P. 11-83-427

On Uniqueness of Solution of Discretized Magnetostatics Problems

The problems connected with the theoretical basis for discretized equations of magnetostatics in the framework of integral formulation are considered. The uniqueness of the discretized problems solution is stated. The method for solutions of appeared problems is suggested. The rate of convergence of approximate solutions is estimated.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой