сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна



11-82-886

А.Кондор

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СХОДЯЩИХСЯ ВЕСОВ (МСВ) К РЕШЕНИЮ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С БОЛЬШИМИ РАЗРЕЖЕННЫМИ МАТРИЦАМИ

1982

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе будут рассмотрены алгебраические аспекты применимости метода сходящихся весов /МСВ/ для решения конечномерной проблемы

$$Kf = g, \qquad /1/$$

полученной в результате алгебраизации непрерывной некорректно поставленной задачи[2], характерным примером которой может служить уравнение Фредгольма первого рода для функций двух переменных:

$$\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} K(s_1, s_2, t_1, t_2)\, f(s_1, s_2)\, ds_1\, ds_2 = g(t_1, t_2), \qquad /2/$$

где $\Omega_1$ и $\Omega_2$ обозначают области изменения переменных $s_1$ и $s_2$ или $t_1$ и $t_2$.

Задача состоит в нахождении $f(s_1, s_2)$, точнее говоря, ее конечномерного приближения $f_{i,k}$ $(i, k = 1, 2, ..., N)$, при известных $K(s_1, s_2, t_1, t_2)$ и $g(t_1, t_2)$.

Целью нашей работы является представление МСВ в форме, подходящей к решению задач типа уравнения /2/, и поэтому мы не будем останавливаться на обсуждении различных методов алгебраизации, а предположим, что она уже каким-то образом проведена и нам требуется решить систему $n$ линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij}\, f_j = g_i\,, \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (n = N^2). \qquad /3/$$

Для упрощения изложения при нахождении основной итерационной формулы будем полагать, что матрица $K$ и вектор $g$ точно известны. Общий случай, когда $K$ и $g$ искажены случайными ошибками, будет рассмотрен в §3 на примере одного характерного случая уравнений /2/ и /3/.

## 2. РЕАЛИЗАЦИЯ МСВ ДЛЯ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

В этом параграфе построим итерационную процедуру МСВ для решения систем линейных уравнений:

$$Kf = g, \qquad /4/$$

где предполагается, что

$$K_{ij} \geq 0, \quad f_i \geq 0, \quad g_i \geq 0, \quad i,j = 1,2,\dots,n\,.$$

Возьмем произвольный положительный вектор $f^{(j)}$ $(j=0, f_i > 0)$ и умножим его на $K$:

$$Kf^{(j)} = g^{(j)}. \qquad /5а/$$

Сравнивая уравнения /4/ и /5/, определяем диагональную матрицу $D^{(j)}$ следующим образом:

$$D_{ii}^{(j)} = \begin{cases} \dfrac{g_i}{g_i^{(j)}}, & \text{если } g_i^{(j)} \neq 0, \\ 1, & \text{если } g_i^{(j)} = 0. \end{cases} \qquad /5б/$$

Умножив уравнение /5/ на $D^{(j)}$, получаем уравнение, связывающее $f^{(j)}$ с $g$:

$$L^{(j)} f^{(j)} = g, \quad \text{где} \quad L^{(j)} = D^{(j)} K\,. \qquad /6/$$

Обозначив через $\Delta^{(j)}$ разность $(f - f^{(j)})$, получаем следующее уравнение:

$$(E - D^{(j)-1})g = K\Delta^{(j)}, \qquad \text{где } E \text{ - единичная матрица.} \qquad /7/$$

Из /7/ видно, что если удается построить такую последовательность $\{f^{(j)}\}_0^\infty$, к которой принадлежит стремящаяся к единичной матрице последовательность $\{D^{(j)}\}_0^\infty$, то при невырожденной матрице $K$ величина $\Delta^{(\infty)}$ будет нулевым вектором, вследствие чего $f^{(\infty)}$ будет решением уравнения /4/.

В ходе построения итерационной процедуры первым шагом является трансформация матрицы $K$ и вектора $f$ таким образом, чтобы сохранить равенство их произведения вектору $g$ с правой стороны. С этой целью введем аксептансы $\{A_i\}_1^n$* как

$$A_i = \sum_{\ell=1}^{n} K_{\ell i}$$

и определим диагональную матрицу аксептансов $D_A$ как

*Величину $A_i$ назовем аксептансом, так как при решении задач обработки данных эксперимента подобная величина соответствует аксептансу установки.



$$D_A = \{d_{ik} = A_i \delta_{ik}\}_1^n \qquad /8/$$

/ $\delta_{ik}$ - символ Кронекера/. При помощи $D_A$ проводим следующие трансформации:

$$P = KD_A^{-1}, \qquad z = D_A f\,,$$

и тогда

$$Pz = KD_A^{-1} D_A f = g. \qquad /9/$$

Матрица $P$ является такой, что все ее аксептансы равны единице, и вследствие этого вектор $z$ удовлетворяет следующей нормировке:

$$\text{const} = \sum_{i=1}^{n} g_i = \sum_{i=1}^{n} z_i\,. \qquad /10/$$

На основе уравнения /10/ вектор $z$ можем называть вектором ценности, принадлежащим к матрице $K$ и к вектору $f$. Если проводим трансформации /9/ и для уравнения /6/, то получаем итерационный вектор ценности $z^{(j)}$:

$$z^{(j)} = D_A f^{(j)}\,.$$

Основной принцип МСВ состоит в том, чтобы потребовать удовлетворения уравнения /10/ для каждого итерационного $z^{(j)}$. Это можно обеспечить следующим выбором $z^{(j+1)}$:

$$z_\ell^{(j+1)} = z_\ell^{(j)} \sum_{i=1}^{n} q_{i\ell}\,, \qquad q_{i\ell} = \frac{g_i}{g_i^{(j)}} p_{i\ell}\,, \qquad /11/$$

или, переходя на $f^{(j+1)}$:

$$f^{(j+1)} = D_R^{(j)} f^{(j)}\,, \qquad /12/$$

где диагональную матрицу $D_R$ можно выразить при помощи предыдущих величин как

$$D_R^{(j)} = \{d_{kk} = \frac{\tilde{A}_k^{(j)}}{A_k}\}_1^n,$$

где $\tilde{A}_k^{(j)}$ - аксептанс матрицы $L^{(j)} = D^{(j)} K$.

Уравнение /12/ является итерационным уравнением МСВ для квадратичных матриц. Его реализация осуществляется в процессе выполнения следующей процедуры:

Стабильность МСВ проверялась после 100 шагов итерации. Ошибки в элементах вектора $f^{(100)}$ показали, что алгебраизация вызывает относительные погрешности в интервале $\pm 1\%$.

Результаты 16 итераций МСВ при решении приближенного уравнения /П3/ с начальным вектором

$$f^{(0)} = \{100\}_1^{240}$$

для двух "линий" по $x_2$ изображены на рис.2.

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере модельного расчета показана применимость МСВ для итерационного решения матричных уравнений с положительными матрицей и правой частью в предположении, что решение существует и является также положительным.

Устойчивость итерационной процедуры по отношению к случайно распределенным ошибкам элементов матрицы и правой части допускает применение МСВ к решению задач обработки данных физических экспериментов.

Предложенный алгоритм алгебраизации и реализации МСВ запрограммирован на языке фортран на ЭВМ CDC-6500 ОИЯИ.

В заключение автору хочется выразить искреннюю благодарность А.Г.Володько за полезные дискуссии по теме настоящей работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kondor A. JINR, E11-82-853, Dubna, 1982.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. "Наука", М., 1979.
3. Bollini D. et al. Phys.Rev.Lett., 1981, 104B, p.403.
4. Кондор А. ОИЯИ, 11-82-570, Дубна, 1982.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 декабря 1982 года.

# ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

| Индекс | Тематика |
|---|---|
| 1. | Экспериментальная физика высоких энергий |
| 2. | Теоретическая физика высоких энергий |
| 3. | Экспериментальная нейтронная физика |
| 4. | Теоретическая физика низких энергий |
| 5. | Математика |
| 6. | Ядерная спектроскопия и радиохимия |
| 7. | Физика тяжелых ионов |
| 8. | Криогеника |
| 9. | Ускорители |
| 10. | Автоматизация обработки экспериментальных данных |
| 11. | Вычислительная математика и техника |
| 12. | Химия |
| 13. | Техника физического эксперимента |
| 14. | Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами |
| 15. | Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях |
| 16. | Дозиметрия и физика защиты |
| 17. | Теория конденсированного состояния |
| 18. | Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники |
| 19. | Биофизика |

Кондор А. 11-82-886

**Применение метода сходящихся весов /МСВ/ к решению систем линейных уравнений с большими разреженными матрицами**

Рассматривается проблема применимости метода сходящихся весов к решению системы линейных уравнений, полученных при алгебраизации интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Цель работы - использование математического метода для решения проблемы коррекции конечности разрешающей способности физических экспериментальных установок, которая в общем случае приводит к интегральным уравнениям Фредгольма. Метод сформулирован для случая квадратичных матриц с неотрицательными элементами. При решении предполагается, что и свободный вектор и само решение также неотрицательны. Результаты, полученные на конкретном численном примере, иллюстрируют применимость метода не только для решения точных уравнений, а также в случаях, когда и матрица, и свободный вектор известны только приблизительно.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Kondor A. 11-82-886

**Application of the Method of Convergent Weights for Solving Systems of Linear Equations with Big Sparse Matrices**

Application of the method of convergent weights is presented for solving systems of linear equations originating from discretization of Fredholm's integral equations of the first kind. This work was performed with the aim of presenting a mathematical method for solving the problem arising from the imperfect resolution of physical experimental setup leading in general to Fredholm's integral equations. The method has been formulated for the case of quadratic matrices of nonnegative elements. It is supposed to have nonnegative RHS and solution as well. The results obtained in a real numerical example illustrate the applicability of the method not only for exact equations but also for cases with matrix and RHS both known approximately.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.