

сообщения
Объединенного
Института
Ядерных
Исследований
Дубна

530/82

1/2-82

11-81-695

В.А.Касчиева, М.С.Касчиев, А.И.Федосеев

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ РЕЗОНАТОРОВ
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

1981

ВВЕДЕНИЕ

Определение собственных частот и электромагнитных полей резонаторов является основной задачей при разработке ускоряющей структуры линейного ускорителя. Сложная геометрическая форма резонатора практически исключает применение аналитических методов, и поэтому единственным способом для определения указанных характеристик остается численное решение. Ввиду того, что собственная частота сильно зависит от многих факторов, таких, как длина резонатора, длина дрейфовой трубки, радиусы кривизны криволинейных границ, возможность быстрого пересчета основных характеристик резонатора при заданной геометрии приобретает основное значение. В то же время необходимая точность при определении частоты /3-4 знака/ ставит жесткие условия при выборе численного метода. Цель настоящей работы заключается в построении эффективных алгоритмов численного решения вышеуказанной задачи, основанных на методе конечных элементов и удовлетворяющих перечисленным требованиям. Здесь использованы восьмиузловые изопараметрические биквадратичные элементы, имеющие четвертый порядок точности при определении собственных частот. Приведены численные примеры и проводится сравнение с другими известными расчетами /1/ как по точности, так и по необходимым временам счета.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исходя из уравнения Максвелла и используя условие аксиальной симметрии, для определения электромагнитного поля получаем следующее волновое уравнение:

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = 0.$$

Далее, с учетом того, что $H_r = H_z = 0$, и полагая $H = H_\phi e^{j\omega t}$, для функции $H_\phi(r, z)$ получим:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial H_\phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} H_\phi = \lambda H_\phi, \quad //1/$$

где $\lambda = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$, c - скорость света.

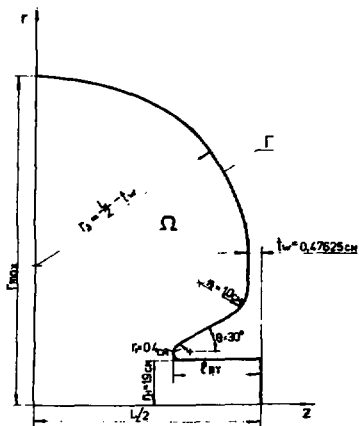


Рис. 1. Профилированный резонатор линейного ускорителя. Рисунок и объяснение к нему взяты из [1].
 L - длина резонатора; r_{\max} - его максимальный радиус; r_H - радиус канала дрейфовой трубки; l_{DT} - длина дрейфовой трубки и t_w - толщина стенки $1/2$ толщины стенки между резонаторами/.

Граничные условия для H_ϕ для основной частоты следующие /см. рис. 1/:

$$\begin{aligned} H_\phi|_{r=0} &= 0, & H_\phi|_{z=L/2} &= 0, \\ \frac{\partial H_\phi}{\partial n}|_{\Gamma} &= 0, & \frac{\partial H_\phi}{\partial z}|_{z=0} &= 0. \end{aligned} \quad /2/$$

В дальнейшем удобно ввести в рассмотрение функцию $F = rH_\phi$, удовлетворяющую уравнению

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \lambda F \quad /3/$$

и краевым условиям

$$\begin{aligned} F|_{r=0} &= 0, & F|_{z=L/2} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial n}|_{\Gamma} &= 0, & \frac{\partial F}{\partial z}|_{z=0} &= 0. \end{aligned} \quad /4/$$

Отметим, что условия /2/ и /4/ относятся к определению первой /основной/, третьей, пятой и т.д. частот. Для вычисления частот с четным номером нужно заменить условие $\frac{\partial H_\phi}{\partial z}|_{z=0} = 0$ условием $H_\phi|_{z=0} = 0$.

Хорошо известно [2], что задача /3/-/4/ эквивалентна нахождению стационарных /критических/ точек функционала Рэлея-Ритца:

$$R(v) = \iint_{\Omega} \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} dz dr / \iint_{\Omega} \frac{1}{r} v^2 dz dr. \quad /5/$$

Критические точки u функционала $R(v)$ являются собственными функциями задачи /3/-/4/, а значения $R(u)$ - соответствующие собственные числа.

Для приближенного вычисления собственных значений и собственных функций построим дискретную модель, аппроксимирующую задачу /3/-/4/.

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Приближенное решение задачи /3/-/4/ представляется в виде

$$F(r, z) = \sum_{i=1}^N F_i \phi_i(r, z), \quad /6/$$

где $\phi_i(r, z)$ - набор линейно-независимых функций, удовлетворяющих краевым условиям первого рода, а F_i - некоторые коэффициенты. Идея метода конечных элементов заключается в построении базисных функций, отличных от нуля в некоторых специально выбранных подобластях, называемых конечными элементами /3/. Выбор типа конечных элементов является важнейшим фактором, определяющим аппроксимацию криволинейных границ области Ω , краевых условий типа Неймана и, следовательно, точность численного решения и эффективность вычислительного алгоритма. Наиболее распространенными являются треугольные и четырехугольные элементы /рис.2/.

В данной работе используются 8-узловые биквадратичные изопараметрические элементы, которые имеют высокую теоретическую степень точности /2/ и хорошо зарекомендовали себя при решении ряда практических задач /4-7/. Базисная функция ϕ_i полагается в этом случае равной 1 в i -том узле и обращается в нуль на границах элементов, окружающих этот узел /одна из этих функций показана на рис.3/.

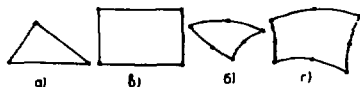


Рис.2. Примеры конечных элементов: а/ линейный 3-узловой треугольный; б/ квадратичный 6-узловой треугольный изопараметрический; в/ билинейный 4-узловой прямоугольный; г/ биквадратичный 8-узловой четырехугольный изопараметрический.

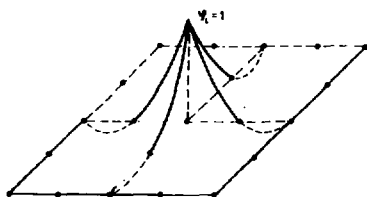


Рис.3. Базисная функция ϕ_i .

В случае изопараметрических элементов базисные функции выписываются в локальных координатах $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$, которые вводятся для каждого элемента. Выражения для этих функций не будем выписывать /см./^{8/}, стр.299/. Подставляя выражение /6/ в /5/, получаем дискретный аналог R^D функционала Рэлея-Ритца

$$R^D(V) = V^T K V / V^T M V, \quad /7/$$

где $V^T = (v_1, v_2, \dots, v_N)$, N - число узлов в области Ω , K - матрица жесткости задачи, M - матрица массы, $K = \sum_e k_e$, $M = \sum_e m_e$.

Здесь k_e и m_e - локальные /для каждого элемента/ матрицы жесткости и массы, которые имеют вид

$$k_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B E B |J_e| d\xi d\eta, \quad /8/$$

$$m_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{r} \Phi^T \Phi |J_e| d\xi d\eta.$$

В этих выражениях использованы обозначения: J_e - якобиан отображения,

$$r(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 r_i^e \phi_i(\xi, \eta), \quad z(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 z_i^e \phi_i(\xi, \eta),$$

$|J_e| = \det J_e$, (r_i^e, z_i^e) - координаты узлов в элементе e ,

$$B = J_e^{-1} A, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial \phi_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial \phi_8}{\partial \eta} \end{pmatrix},$$

$$\Phi^T = (\phi_1(\xi, \eta), \dots, \phi_8(\xi, \eta)), \quad E = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}.$$

Интегралы, входящие в /8/, вычисляются приближенно. Обычно используются квадратурные формулы Гаусса. Численные эксперименты показывают, что в плоскостных задачах оптимальными являются 3-точечные формулы Гаусса/^{4/}. Следуя/^{3/} из /7/ получаем, что приближенные собственные функции F^{np} и собственные числа λ^{np} являются решением обобщенной алгебраической проблемы собственных значений

$$K F^{np} = \lambda^{np} M F^{np}. \quad /9/$$

При этом выполняются следующие оценки ^{/3/}:

$$|\lambda_p - \lambda_p^{np}| = O(\lambda_p^3 h^4),$$

$$\|F_p - F_p^{np}\|_0 = O(\lambda_p^{3/2} h^3),$$

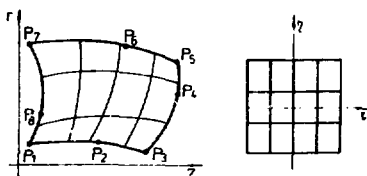
/10/

где $h = \max_e \text{diam } e$, а p - номер соответствующего решения. После вычисления собственного числа λ основная частота f получается по формулам $f = \frac{\omega}{2\pi}$, $\omega = c \sqrt{\lambda}$. На вычислении других характеристик резонатора остановимся ниже.

ГЕНЕРАЦИЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ СЕТКИ

Важным этапом в реализации метода конечных элементов являются процедуры построения сетки и нумерации узлов. При составлении алгоритма генерации сетки использованы идеи, заложенные в программе GRID ^{/8/}. В области Ω вводится основная сетка четырехугольников, удовлетворяющих условиям согласования ^{/3/}, которые будем называть суперэлементами /рис. 4 и 5/.

Рис. 4. Суперэлементы в области Ω .



Пусть SE - один из суперэлементов. Через $P_i (r_i^{SE}, z_i^{SE})$, $i = 1, 2, 3, \dots, 8$, обозначим узлы в этом элементе. При помощи отображения

$$r(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 r_i^{SE} \phi_i(\xi, \eta), \quad z(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 z_i^{SE} \phi_i(\xi, \eta) \quad /11/$$

квадрат G переводится в SE. В G строится равномерная сетка, составленная из прямоугольников. Дальше находятся образы этих прямоугольников в SE, которые составляют сетку в суперэлементе. При этом все узлы нумеруются. Расположение точек P_2, P_4, P_6, P_8 /рис. 4/ позволяет сжимать сетку в одну или другую сторону. Преобразование /11/ останется однозначно-обратимым, если

$$|\xi(P_i)| < 0,5; \quad |\eta(P_i)| < 0,5; \quad i = 2, 4, 6, 8,$$

где через $\xi(P_i), \eta(P_i)$ обозначены образы точек P_i в квадра-

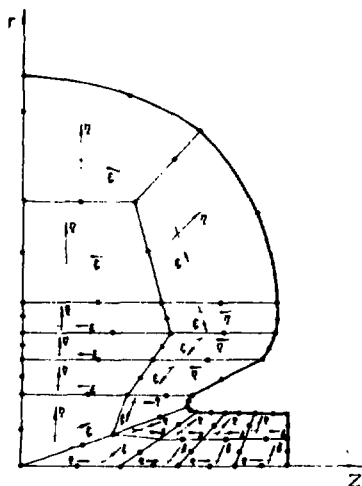


Рис. 5. Разбиение области на суперэлементы.

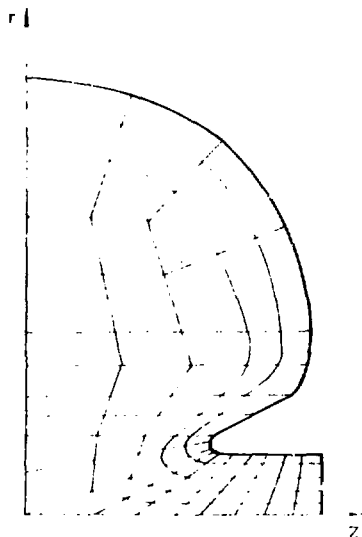


Рис. 6. Сетка в области Ω , содержащая 301 узел.

те $G^{19/}$. После генерации сетки проводится перенумерация узлов с целью уменьшения ширины ленты матриц K и M .

В созданной программе генерации изопараметрических элементов сохранена входная информация, требуемая программой GRID^{8/}. Вычисление координат узлов суперэлементов предполагает знание только параметров r_{max} , r_1 , r_2 , r_w , r_{DT} , β , $r_{зад}$ и угла θ . Одна из построенных сеток, содержащая $N=301$ узел, показана на рис. 6.

МЕТОД РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЫ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Численное исследование задач на собственные значения требует решения следующих двух проблем: аппроксимации дифференциальной задачи разностной и решения возникшей при этом алгебраической задачи на собственные значения. Как правило, основное время счета занимает последняя задача. Известно, что для большинства практических задач необходимо иметь несколько первых собственных значений. С другой стороны, из оценок $/10/$ видно, что нельзя надеяться на достижение хорошей точности при

вычислении высших гармоник, ибо при больших номерах p аппроксимация теряет смысл. Отметим, что оценки типа /10/ имеются и для конечно-разностных схем¹⁰. Поэтому нужно подобрать численный метод, с помощью которого быстро вычисляется лишь несколько первых собственных чисел задачи /9/. При этом должна учитываться ленточная структура и симметричность матриц K и M . Наконец, значительные неприятности могут возникнуть в случае определения начальных приближений при реализации выбранного итерационного метода решения задачи /9/.

Ввиду всего сказанного для численного решения алгебраической проблемы собственных значений /9/ выбран метод итерации в подпространстве⁴, который, на наш взгляд, устраняет указанные трудности и хорошо зарекомендовал себя при решении ряда технических^{3,4} и квантовомеханических задач⁷. Метод позволяет получить несколько первых собственных значений и собственных функций /последние нормированы на единицу/, при этом время счета составляет 25-30% от общего времени, необходимого для решения всей задачи /см. табл.1/.

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

На этапе апробации и для сравнения с известными результатами были проведены расчеты резонатора на частоту 805 МГц, подробно исследованного в работе¹. Прежде чем приступить к изложению численных результатов, выпишем некоторые величины, которые представляют интерес при конструировании резонаторов. Нормировка электромагнитного поля резонатора определяется так, чтобы

$$\int_0^{L/2} E_z(0,z) dz = E_{0z} \frac{L}{2}.$$

Здесь E_{0z} [в/см] - заданная величина, L - длина резонатора, $L = \frac{\beta \cdot c}{2f_{\text{зад.}}}$ /см/, $\beta = \frac{v}{c}$, v - скорость частицы, $f_{\text{зад.}}$ /Гц/ - требуемая основная частота.

После этого вычисляются запасенная энергия W /Дж/:

$$W = 4 \mu_0 \pi \int_{\Omega} r H^2 dr dz,$$

мощность потерь в металле P /Вт/:

$$P = 4 \pi R_{\Gamma} \int_{\Gamma} r H^2 dl$$

/для меди $R = 2,61 \cdot 10^{-7} \sqrt{f}$ Ом/,

добротность Q /Дж/:

$$Q = \omega \mu_0 \frac{\int_{\Omega} r H^2 dr dz}{R \int_{\Gamma} r H^2 dl},$$

шунтовое сопротивление $Z/\text{МОм}/\text{м}/:$

$$Z = \frac{E_{0z}^2 \cdot L/2}{P}$$

Фактор пролетного времени:

$$T = \frac{\int_0^{L/2} E_z \cos(kz/\beta) dz}{\int_0^{L/2} E_z dz}$$

эффективное шунтовое сопротивление ZT^2 и пр.

Составляющая E_z электрического поля вычисляется по формуле

$$E_z = \frac{1}{\epsilon_0 \omega} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} rH,$$

в частности,

$$E_z(0,z) = \frac{2}{\epsilon_0 \omega} \frac{\partial H(0,z)}{\partial r}.$$

В работе использованы величины $E_{0z} = 10^4$ В/см, $f_{\text{зад}} = 805$ МГц; $r_1 = 0,4$ см; $r_2 = 1$; $t_w = 0,47625$; $r_H = 1,9$ см; $\theta = 30^\circ$, которые не меняются.

Были проведены численные эксперименты для исследования точности решения в зависимости от числа узлов. Результаты показаны в табл. 1. Из таблицы видно, что уже на крупной сетке $N = 301$ достигается требуемая точность 10^{-3} %. Приведены также характерные времена счета при использовании ЭВМ CDC-6500 ОИЯИ и ICL-1906A ИФВЭ.

Таблица 1

Сравнение численных результатов для трех сеток
при $r_{\text{max}} = 14,6$ см; $l_{DT} = 3,678$ см; $\beta = 1$

N - число узлов	f МГц	t CDC-6500	t ICL-1906 A
301	804,95	25"	30"
380	804,97	28"	34"
498	804,99	33"	38"

В табл. 2 проведено сравнение с работой /1/ по исследованию резонаторов на 805 МГц. Длины дрейфовой трубки l_{DT} и r_{max} взяты из /1/. Так как в этой работе не указан способ вычисления длины резонатора L , то она вычислялась по указанной выше формуле. Численные результаты получены при использовании конечно-элементной сетки, содержащей 380 узлов. Из таблицы видно, что результаты совпадают в пределах необходимой точности. Отметим также, что результаты из /1/ получены при применении конечно-разностной сетки, содержащей от 5000 до 15000 узлов. Авторы /1/

Таблица 2

Численные результаты для нескольких резонаторов

β	$\rho_{DT}, \text{см}$	$r_{\text{max}}, \text{см}$	$f, \text{МГц}$	$Q, \text{Дж}$	T
0,45	2,2068	13,9	804,52	22210	0,8144*
			805,1	21735	0,8519**
0,55	2,5199	14,0273	804,53	25280	0,8203
			805,25	24936	0,8422
0,65	2,8127	14,1545	804,80	27890	0,8180
			804,65	27526	0,8340
0,725	3,019	14,25	804,89	29650	0,8186
			804,66	29154	0,8293
0,8	3,2139	14,3454	804,37	31320	0,8143
			804,65	30556	0,8214
0,9	3,4561	14,4727	804,96	32970	0,8100
			804,61	32143	0,8138
1	3,678	14,6	804,93	34520	0,7970
			804,97	33516	0,8063

* Результаты, полученные в работе /1/.

** Результаты, полученные в данной работе.

указывают, что время счета на ЭВМ IBM-7094 составляет 15-20 мин. Метод, разработанный в /1/, при реализации на ЭВМ БЭСМ-6 требует 1 час машинного времени /1/.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены быстродействующие алгоритмы высокой степени точности для вычисления основных характеристик резо-

натора сложной геометрической формы. Алгоритмы реализованы в программах, написанных на стандартном языке фортран-IV. Программы созданы в модульном виде, что позволяет применять их для различных по форме резонаторов. Ввиду того, что максимальное число элементов массивов, использованных в каждом модуле, примерно 15000, все программы можно легко поставить на ЭВМ БЭСМ-6 и ЭВМ серии ЕС. Метод конечных элементов, который положен в основу рассматриваемых алгоритмов, позволяет, с одной стороны, используя относительно малое число узлов, достигнуть хорошей точности при вычислении частоты и величины электромагнитного поля, а с другой - легко вычислять необходимые характеристики. Отметим, что каждый модуль, например, модуль генерации сетки, модуль решения алгебраической проблемы на собственных значениях, модуль реализации 8-узловых биквадратичных изопараметрических элементов, имеет законченную структуру и может быть использован при решении других задач физики и техники.

Авторы выражают свою глубокую благодарность Л.И.Пономареву за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хойт Х., Симмонс Д., Рич В. "Приборы для научных исследований", 1966, №6, с.63.
2. Курант Д., Гильберт Д. Методы математической физики. Гостехиздат, М., 1953, т.1.
3. Стренг Г., Флис Дж. Теория метода конечных элементов. "Мир", М., 1977.
4. Bathe K.J. Numerical Methods in Finite Element Analysis (ed. by Wilson). Prentice-Hall, Englewood, Clif., N.J., 1976.
5. Морозов Е.М., Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения. "Наука", М., 1980.
6. Корнеев В.Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. Изд-во ЛГУ, Л., 1977.
7. Kaschiev M.S., Vinutsky S.I., Vukajlović F.R. Phys.Rev.A, 1980, vol.22, No.2, pp.557-559.
8. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. "Мир", М., 1979.
9. Steinmueller G. Int.J. for Num.Meth. in Eng., 1974, 8, pp.289-294.
10. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. "Наука", М., 1979.
11. Мурин Б.П. и др. Линейные ускорители ионов. Атомиздат, М., 1978, т.2.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 ноября 1981 года.