ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

11-81-414

ХРИСТОВ
Евгени Христов

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Специальность: 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна 1981

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук
профессор В.Я.АРСЕНИН,

доктор физико-математических наук
профессор А.А.АРСЕНЬЕВ,

доктор физико-математических наук
старший научный сотрудник Б.Н.ЗАХАРЬЕВ.

Ведущая организация:

Ленинградское отделение Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР (г. Ленинград).

Защита состоится "___"__________198___года в___часов на заседании специализированного совета Д 047.01.04 при Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ по адресу: г. Дубна, Московской области.

Автореферат разослан "___"__________198___г.

Ученый секретарь специализированного
совета
кандидат физико-математических наук

З.М.ИВАНЧЕНКО

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертации разработан общий подход к приближенному решению обратных задач (ОЗ) спектрального анализа для уравнения Штурма-Лиувилля $y''+(\lambda-q(x))y=0$, включающих обратную задачу квантовой теории рассеяния для радиального уравнения Шредингера и ОЗ на конечном интервале с распадающимися граничными условиями. Метод основан на построении нелинейных эволюционных уравнений (НЭУ), которые приводят к итерационным процессам, допускающим эффективную реализацию на ЭВМ. Вместе с тем показано, что математический аппарат конструирования этих уравнений позволяет единообразно изложить ряд основных утверждений теории НЭУ, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) для оператора Шредингера на всей оси. Рассмотрен и аналогичный круг вопросов для систем Дирака.

Актуальность проблемы

Важность численного расчета ОЗ, в особенности обратной задачи рассеяния (ОЗР), обусловлена прежде всего потребностями теории ядра и элементарных частиц в установлении закона взаимодействия частиц по наблюдаемым экспериментальным данным. Последняя задача решается, как правило, феноменологически, исходя из некоторых физически оправданных соображений о структуре гамильтониана и далее добиваясь согласования с экспериментом за счет выбора его параметров в предложенной модели. Такой подход накладывает с математической точки зрения весьма сильные ограничения на искомый потенциал, а также зачастую приводит к искаженной физической интерпретации. С другой стороны, хорошо известны уравнения Гельфанда-Левитана, Крейна и Марченко, на основе которых был получен ряд глубоких аналитических результатов в ОЗ, но их реализация на ЭВМ связана с определенными трудностями. В этом аспекте актуальной сейчас является задача о построении математически обоснованных численных методов, приводящих в конечном итоге к расчетным схемам, позволяющим восстановить с высокой точностью искомый оператор непосредственно по минимальной информации о его спектральных данных, обеспечивающей единственность решения соответствующей ОЗ.

В положившей начало МОЗР известной работе Гарднера, Грина, Крускала и Миуры было показано, что если решение $v(t,x)$ уравнения Кортевега-де Фриза

$$v_t(t,x)=-6v(t,x)v_x(t,x)+v_{xxx}(t,x),\quad 0\le t<\infty,\ -\infty<x<\infty,\ v(0,x)\in\mathcal{J} \tag{I}$$

рассматривают как потенциал в однопараметрическом семействе уравнений

$$y''+(k^2-v(t,x))y=0,\quad -\infty<x<\infty, \tag{2}$$

то данные рассеяния (2) удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка, которые решаются тривиально. При этом уравнение (I) имеет бесконечное число сохраняющихся величин

$$\tilde{I}_m[v(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{2m+1}(v(t);x)\,dx = \tilde{I}_m[v_0],\quad 0 \le t < \infty,\ m=0,1,\ldots, \tag{3}$$

где $\sigma_{2m+1}(v;x)$ – полиномы от функции v и ее производные по x. В настоящее время МОЗР является активно развивающимся направлением математической физики. С его помощью получены качественно новые результаты для множества физически важных НЭУ, которые в абстрактной форме можно записать в виде

$$v_t = K(v),\quad 0 \le t < \infty,\quad v(0)=v_0, \tag{4}$$

где явное выражение для $K(v)$ определяется конкретной задачей.

Одной из актуальных задач в этой проблематике является описание классов НЭУ, ассоциированных с данным линейным оператором. Здесь желательно построение таких подходов,которые объединяли бы воедино известные конструкции НЭУ и вместе с тем отражали бы полнее их свойства.

Напомним, что МОЗР становится реализуемым, когда известно решение соответствующей ОЗ. Здесь обычно имеется в виду методика Гельфанда-Левитана-Марченко. В связи с этим важным вопросом является, насколько свойства НЭУ, решаемых МОЗР, можно использовать при самом решении ОЗ и, в частности, для повышения точности расчетных алгоритмов.

Работы, положенные в основу реферируемой диссертации, выполнены в соответствии с проблемно-тематическим планом научно-исследовательских работ ОИЯИ.

Цели и задачи исследований

Основной целью представленных в диссертации исследований по обратным задачам является построение эволюционных уравнений типа (4), решение $v(t,v_0)$ которых при $t \to \infty$ дает искомую краевую задачу. В их основу положена общая идея М.К.Гавурина о решении операторного уравнения

$$\mathfrak{f}(v) = y_* \tag{5}$$

посредством непрерывного аналога Метода Ньютона (НАМН):

$$v_t = -[\mathfrak{f}'(v)]^{-1}(\mathfrak{f}(v) - y_*),\quad 0 \le t < \infty,\quad v(0)=v_0, \tag{6}$$

где $\mathfrak{f}: X \to Y$ – нелинейный оператор, X, Y – B – пространства, $\mathfrak{f}'(v)$ – производная Фреше, y_* – заданный элемент из Y. Искомое решение v_* уравнения (5) получается как предел

$$\lim_{t\to\infty} \| v(t,v_0) - v_* \|_X = 0 \qquad (\mathfrak{f}(v_*) = y_*) \tag{7}$$

решения $v(t,v_0)$ задачи Коши (6). Характерным свойством уравнения (6) является тот факт, что $v(t,v_0)$ есть прообраз отрезка

$$\mathfrak{f}(v(t)) = \mathfrak{f}(v_0)\exp(-t) + y_*(1-\exp(-t)),\quad 0 \le t < \infty. \tag{8}$$

Отметим, что с помощью уравнения (6) для ряда нелинейных задач теоретической физики были получены важные аналитические результаты и разработаны эффективные методы для их численного решения[x)].

Для применения НАМН в каждой конкретной задаче требуется прежде всего сформулировать ее в виде операторного уравнения (5) с надлежащим образом выбранными пространствами X и Y, исходя из следующих основных требований:

I. Оператор $\mathfrak{f}(v)$ с областью определения $\mathcal{D}_{\mathfrak{f}} \subset X$ обратим в некоторой окрестности искомого решения v_*.

П. Область значений $\mathcal{R}_{\mathfrak{f}} \subset Y$ допускает первый интеграл (8), т.е. при заданном $y_* \in \mathcal{R}_{\mathfrak{f}}$ существует хотя бы одно $v_0 \in \mathcal{D}_{\mathfrak{f}}$, $(v_0 \ne v_* = \mathfrak{f}^{-1}(y_*))$, для которого $v(t,v_0) = \mathfrak{f}^{-1}(\mathfrak{f}(v_0)e^{-t} + y_*(1-e^{-t})) \in \mathcal{D}_{\mathfrak{f}}$ при $0 \le t < \infty$.

Хорошо известно, что стационарная задача рассеяния двух бесспиновых частиц на сферически-симметричном потенциале описывается волновой функцией $\varphi_\ell(x,k)$, удовлетворяющей радиальному уравнению Шредингера

$$y'' + (k^2 - \ell(\ell+1)x^{-2} - v(x))y = 0,\quad 0 < x < \infty,\quad \varphi_\ell(0,k) = 0. \tag{9}$$

Если для вещественного потенциала $v(x)$

$$\|v\|_X \stackrel{def}{=} \int_0^\infty x|v(x)|\,dx < \infty, \tag{10}$$

то при $x \to \infty$ имеет место асимптотика $\varphi_\ell(x,k) \approx A_\ell(k)\sin(kx - \pi\ell/2 - \eta_\ell(v;k))$. Суть классической ОЗ здесь составляет определение оператора (9) по фазе рассеяния $\eta_\ell(v;k)$, $0 \le k < \infty$, при фиксированном $\ell = 0,1,2,\ldots$ Центральное место занимает случай $\ell = 0$, т.е. ОЗР для краевой задачи

$$y'' + (k^2 - v(x))y = 0,\quad 0 < x < \infty,\quad y(0) = 0,\quad v \in X. \tag{11}$$

Пусть $\varphi(v;x,k)$: $\varphi(v;0,k) = 0$, $\varphi'(v;0,k) = 1$, $f(v;x,k)$: $\lim f(v;x,k) \times \exp(-ikx) = 1$, $(x \to \infty)$ – решения (II), $f(v;k) = f(v;0,k)$ и $S(v;k) = \exp(-2i\eta(v;k))$, $(\eta(v;k) = \eta_0(v;k))$ – соответственно функция Йоста и функция рассеяния. С учетом условий I и П в диссертации ОЗР рассматривается в следующих основных постановках:

(а) Если по краевой задаче (II) построен оператор

$$\mathcal{F}(v) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\{1 - S(v;k)\}e^{2ikx}dk\ (0<x<\infty),\quad v \in \Omega(0) = \{v \in X \mid f(v;k) \ne 0, \operatorname{Im} k \ge 0\},$$

то требуется решить уравнение (I2)

$$\mathcal{F}(v;x) = f_*(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\{1 - S_*(k)\}e^{2ikx}dk,\quad (0<x<\infty), \tag{13}$$

при заданном $f_* \in X$, $S_*(k) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} F_{S_*}(x)e^{-ikx}dx\,(= S^*(k))$, где вещественная функция $F_{S_*}(x) \in L_1(-\infty,\infty)$, $\ln S_*(+0) - \ln S_*(+\infty) = 0$.

x) Жидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В. Непрерывный аналог метода Ньютона в нелинейных задачах физики, ЭЧАЯ, т. 4, вып. I (I973), I27–I66.

(б) Ищется решение $v_*(x)$ уравнения

$$\mathbb{Q}(v) \overset{def}{=} \eta(v;k) = \eta_*(k) \in Y_1^{(1)}, \qquad v \in \Omega(0) \cap X_1, \tag{I4}$$

где

$$\|v\|_{X_1} \overset{def}{=} \int_0^\infty (1+x)|v(x)|\,dx < \infty, \quad Y_1^{(1)} = \{\eta(k) = \int_0^\infty \hat{\eta}(x)\sin 2kx\,dx \mid \hat{\eta}(x), \hat{\eta}'(x) \in X_1\}, \tag{I5}$$

для которого $\eta(v_*;k) = \eta_*(k), (0 \le k < \infty)$. Продолжим $\mathbb{Q}(v)$ в область

$$\Omega(N) = \{v \in X_1 \mid f(v;k_j) = 0,\ j = 1,2,\dots,N,\ f(v;0) \ne 0\} \tag{I6}$$

по формуле

$$\mathbb{Q}(v) = \{\eta(v;k) + 2N\,\mathrm{arctg}\,1/k,\ 0 \le k < \infty;\ \lambda_j(v),\ C_j(v),\ j = 1,\dots,N\}, \tag{I7}$$

где $\lambda_j(v) = k_j^2 < 0$ – собственные значения ($\lambda_j < \lambda_\ell$ при $j < \ell$), $C_j^{-1}(v) = \int_0^\infty \varphi^2(v;x,k_j)\,dx$ – нормы отвечающих им собственных функций. В этом случае ОЗР состоит в решении относительно $v_* \in \Omega(N)$ уравнения

$$\mathbb{Q}(v) = \{\eta_*(k) + 2N\,\mathrm{arctg}\,1/k \in Y_1^{(1)},\ \lambda_{1,*} < \dots < \lambda_{N,*} < 0,\ \{C_{j,*} > 0\}_{j=1}^N\}. \tag{I8}$$

Отметим, что с помощью стандартной теории возмущения нетрудно получить для задачи Коши (6), записанной в виде $\mathbb{f}'(v)v_t = -(\mathbb{f}(v) - y_*)$, где $\mathbb{f} = \mathbb{Q}(v)$ (I4), выражение

$$\mathbb{Q}'(v)v_t \equiv k|f(v;k)|^{-2}\int_0^\infty v_t(t,x)\varphi^2(v(t);x,k)\,dx = \eta_*(k) - \eta(v(t);k),\ 0 \le t < \infty,\ v_0 \in \Omega(0). \tag{I9}$$

Рассмотрим теперь две самосопряженные задачи Штурма–Лиувилля $\{q_j(x), h_j, H_j\}$:

$$y'' + (\lambda - q_j(x))y = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \quad q_j(x) \in L_2(0,\pi), \tag{20}$$

$$y'(0) - h_j y(0) = 0, \quad y'(\pi) + H_j y(\pi) = 0 \qquad (j = 1,2). \tag{2I}$$

Обозначим через $\lambda_n^{(j)}$, $n = 0,1,\dots$ их собственные значения и через $\beta_n^{(j)} = \{\int_0^\pi \psi_j^2(x,\lambda_n^{(j)})\,dx\}^{-1}$ – нормы собственных функций, где $\psi_j(\pi,\lambda) = 1$, $\psi_j'(\pi,\lambda) = -H_j$. Здесь изучены следующие обратные задачи: ОЗI о восстановлении оператора $\{q(x), h, H\}$ по его спектру $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ и нормировочным числам $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$; ОЗII об определении краевых задач $\{q(x), h, H_j\}$, $H_1 \ne H_2$ по спектрам $\{\lambda_n^{(1)}\}_{n=0}^\infty \cup \{\lambda_n^{(2)}\}_{n=0}^\infty$ и ОЗIII о восстановлении краевой задачи $\{q(x) = q(\pi - x), h, H = h\}$ по спектру $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$.

Основными задачами, которые следует решить для построения уравнения (6) в каждой из перечисленных выше ОЗ, являются:

А. Найти те области, в которых оператор $\mathbb{f}$ дифференцируем.

Б. Построить в явном виде обратный оператор $[\mathbb{f}'(v)]^{-1}$.

В. Указать множества начальных значений v_0, для которых решение $v(t, v_0)$ задачи Коши (6) сходится в смысле (7) к решению уравнения (5).

Для эффективного применения НАМН в ОЗ особое значение имеет решение задачи (Б), что видно уже на примере уравнения (I9). Его дискретная аппроксимация приводит к сложной для реализации на ЭВМ задаче о численном решении интегрального уравнения первого рода с приближенно заданной правой частью. Специфика реальных ОЗ, где исходные спектральные данные содержат мало априорной информации об искомой краевой задаче, накладывает естественное требование слабой зависимости сходимости (7) от начального значения v_0. В связи с этим при решении задачи (В) существенным является вопрос о нелокальных условиях сходимости.

Далее для практического построения численных методов решения ОЗ необходимо:

Г. Обосновать возможность приближенного решения задачи Коши (6) методом Эйлера, что приводит к итерационной последовательности

$$v_{n+1} = v_n - \tau_n[\mathbb{f}'(v_n)]^{-1}(\mathbb{f}(v_n) - y_*), \quad n = 0,1,\dots;\ \tau_n \in (0,1]. \tag{22}$$

Д. На основе (22) предложить простые алгоритмы, позволяющие эффективно проводить расчеты на ЭВМ для моделей, близких к реальным.

Основная трудность при численном решении ОЗ, которая имеет принципиальный характер, связана с их некорректностью. Поэтому здесь существенной является задача

Е. Дать эффективные методы регуляризации в ОЗ, которые обеспечивают устойчивость соответствующего итерационного процесса.

Как известно[x)], общий вид НЭУ, решаемых посредством МОЗР для уравнения (2), дается формулой

$$v_t(t,x) = D\Omega(L_+(v(t)))v(t,x), \quad 0 \le t < \infty, \quad v(0,x) = v_0(x) \in \mathcal{S}, \tag{23}$$

где $\Omega(\lambda)$ – рациональная функция, оператор

$$L_+ = -\tfrac{1}{4}D^2 + v(x) + \tfrac{1}{2}\int_x^\infty dy\,v_y(y) \qquad \left(D = \tfrac{d}{dx}\right). \tag{24}$$

В частности, при $\Omega(\lambda) = -4\lambda$ уравнение (23) сводится к (I). Главные цели предложенной трактовки НЭУ (23) состоят в следующем: (А) Найти в необходимой и достаточной форме условия, накладываемые на данные рассеяния оператора (2), для того чтобы функция $v(t,x)$ удовлетворяла (23). (Б) Сформулировать их таким образом, чтобы в терминах оператора L_+ получить основные утверждения известного гамильтонова формализма Захарова и Фаддеева.

---

x) **Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newel A.C., Segar N. The inverse scattering transform – Fourier analysis for nonlinear problems, Stadies in Appl. Math., v. 52, N 4 (1974), 249-325.**

Здесь также рассмотрена возникающая в преобразовании Беклунда для (23) задача о построении спектрального разложения оператора

$$\Lambda_+ = \frac{1}{4}\{-D^2 + 2S(x) + \int_x^\infty dy\, S_y(y) - \int_x^\infty dy\, \Delta(y) \int_y^\infty dz\, \Delta(z)\},$$

$$S(x) = v_1(x) + v_2(x), \quad \Delta(x) = v_1(x) - v_2(x), \quad v_m(x) \in \mathcal{S}, \tag{25}$$

для которого, как известно,

$$\Lambda_+ F(x,k) = k^2 F(x,k), \quad F(x,k) = f(v_1; x,k) f(v_2; x,k). \tag{26}$$

Кроме того, целью диссертации является обобщение сформулированных выше основных задач для оператора Штурма-Лиувилля в теорию обратных задач для уравнения Дирака и связанных с ними НЭУ.

Научная новизна и значимость работы

Представляемая работа является одной из первых, в которой разработан единый подход к решению ОЗ и НЭУ, решаемых МОЗР. Объединяющей основой этих проблем является развитая в диссертации оригинальная теория разложений по произведениям решений двух уравнений Штурма-Лиувилля и связанная с ней спектральная теория интегро-дифференциальных операторов, а также их обобщение на случай двух одномерных систем Дирака.

Предложенный метод приближенного решения ОЗ с помощью НАМН дает возможность получить эффективные алгоритмы для численного расчета ОЗ, которые имеют преимущества перед существующими. Наряду с этим теория уравнения (6) в ОЗ представляет и самостоятельный интерес, главным образом из-за проведенной аналогии с НЭУ, интегрируемых МОЗР. Техника, развитая для аналитического обоснования НАМН в ОЗ, позволяет доказать ряд утверждений в смежных к ОЗ областях математической физики и может быть использована при построении сходных методов и алгоритмов для более сложных ОЗ. Изложенная в диссертации теория МОЗР и связанного с ним гамильтонного формализма посредством спектральных разложений для оператора L_+ и ему подобных ввиду ее сравнительной несложности и общности легко переносится на иные НЭУ, к которым применим МОЗР.

Практическая полезность работы

Методика приближенного решения ОЗ посредством итерационных процессов ньютоновского типа дает практический способ расчета с требуемой точностью перечисленных выше ОЗ по таблично заданной информации о спектральных характеристиках искомого оператора в относительно небольшом количестве точек. При этом начальное приближение является почти не зависящим от этих данных. Это делает возможным их применение в реальных ОЗ, в частности для расчета потенциала по имеющимся экспериментальным значениям фазы рассеяния.

Из-за конструктивного решения в диссертации сформулированных выше задач А-Д алгоритмы сводят численное решение ОЗ к расчету на каждом итерационном шаге прямой задачи рассеяния для уравнения Шредингера (II) или сходной задачи на собственные значения для краевой задачи (20), (2I). Главным образом благодаря фундаментальным исследованиям А.А.Самарского по теории разностных схем, эти задачи являются легко реализуемыми с высокой точностью на ЭВМ. Наличие сохраняющихся величин вида (3) (где интегрирование ведется на полуоси) в предложенном итерационном процессе для ОЗР сводит задачу Е к вопросу об устойчивом суммировании интеграла Фурье. Последний, в рамках основополагающих идей А.Н.Тихонова в области некорректных задач, решается путем введения соответствующего стабилизирующего параметра.

Апробация работы

Результаты, вошедшие в диссертацию, докладывались на Третьем конгрессе балканских математиков (Варна, 1976), Международном совещании по программированию и математическим методам решения физических задач (Дубна, 1977), X сессии Ученого совета по теоретической физике (Дубна, 1976), на научных семинарах Лаборатории вычислительной техники и автоматизации и теоретической физики ОИЯИ, Института математики и механики (София, НРБ), Института ядерных исследований и ядерной энергетики (София, НРБ).

Основное содержание диссертации отражено в 15 публикациях в виде статей в журналах ДУ, „Математические заметки", в „Сибирском математическом журнале", ЭЧАЯ, „Болгарском физическом журнале", препринтов и сообщений ОИЯИ.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, приложения и заключения, содержит 322 страниц машинописного текста, 20 таблиц и список литературы из 114 наименований.

Согласно сформулированным выше задачам представляемых исследований материал первых трех глав включает аналитическое обоснование НАМН в ОЗ для оператора Штурма-Лиувилля и описание расчетных алгоритмов. В главе IУ излагается теория НЭУ, интегрируемых МОЗР для уравнения Шредингера, а в главе У основные утверждения предыдущих глав обобщаются для соответствующих операторов Дирака.

Личный вклад автора

Автор диссертации, работая в коллективе соавторов, объединяющем сотрудников Лаборатории вычислительной техники и автоматизации и теоретической физики ОИЯИ, был инициатором данных исследований. Им самостоятельно разработаны все принципиальные вопросы, относящиеся к изложенной проблематике. Автор непосредственно участвовал в математической постановке и численной реализации предложенных алгоритмов.

II. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение к реферируемой диссертации содержит краткий обзор классических методов решения ОЗ спектрального анализа для оператора Штурма-Лиувилля и некоторые утверждения о НЭУ, к которым применим МОЗР. Даны описание структуры диссертации и перечень основных результатов по главам.

В главе I "Теория разложения по произведениям решений двух самосопряженных задач Штурма-Лиувилля на полуоси" центральное место занимает конструкция формул обращения для разложений функции $h(x) \in X_1$ (I5) по произведениям $\Phi(x,k) = \varphi(\upsilon_1; x,k)\varphi(\upsilon_2; x,k)$ решений краевых задач (II) с $\upsilon = \upsilon_n$, $n = 1,2$. При $\upsilon_n \in \Omega(0)$ показано, что имеет место разложение

$$-\int_x^\infty h(y)dy = -\frac{4}{\pi}\int_0^\infty k\, Im\{F(x,k)F^{-1}(k)\}\Phi(h;k)dk, \quad \Phi(h;k) = \int_0^\infty h(x)\Phi(x,k)dx, \tag{27}$$

где $F(x,k) = f(\upsilon_1; x,k)f(\upsilon_2; x,k)$, $F(k) = f(\upsilon_1; k)f(\upsilon_2; k)$, которое при $\upsilon_n \in \Omega(N)$ остается справедливым, если в его правую часть добавить суммы

$$\sum_{k_{n,j}\in\sigma''} \tilde{F}_{n,j}(x)\Phi(h;k_{n,j}) + \sum_{k_j\in\sigma'}\{\tilde{F}_{j,1}(x)\Phi(h;k_j) + \tilde{F}_{j,2}(x)\dot{\Phi}(h;k_j)\}. \tag{28}$$

Здесь множества $\sigma' = \sigma_1 \cap \sigma_2$, $\sigma'' = (\sigma_1 \cup \sigma_2)\setminus\sigma'$, $\sigma_n = \{k_{n,j} \mid f(\upsilon_n; k_{n,j}) = 0, j = 1,\dots,N_n\}$ функций $\tilde{F}_{n,j}(x) = 4k_{n,j}\dot{F}^{-1}(k_{n,j})F(x,k_{n,j})$, $\tilde{F}_{j,1}(x) = b_j(\dot{F}(x,k_j) + d_j F(x,k_j))$, $\tilde{F}_{j,2}(x) = b_j F(x,k_j)$, $(\dot{} = \partial/\partial k)$, где $b_j = 8k_j\ddot{F}^{-1}(k_j)$, $d_j = k_j^{-1} - \dddot{F}(k_j)(3\ddot{F}(k_j))^{-1}$. Отметим, что при $\upsilon_1 = \upsilon_2$ из (27) получаем сразу оператор $[\Omega'(\upsilon)]^{-1}$ при $\upsilon \in \Omega(0)$. Это позволяет записать уравнение (I9) в виде (6), т.е.

$$\upsilon_t(t,x) = \frac{4}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^\infty[\eta(\upsilon(t);k) - \eta_*(k)]\, Im\{S(\upsilon(t);k)f^2(\upsilon(t);x,k)\}dk,$$
$$0 \le t < \infty, \quad \upsilon(0,x) = \upsilon_0(x) \in \Omega(0). \tag{29}$$

В общем случае $\upsilon_1 \ne \upsilon_2$ с учетом тождества $\sin(\eta(\upsilon_1;k) - \eta(\upsilon_2;k)) = k|F(k)|^{-1}\Phi(\upsilon_1 - \upsilon_2; k)$ как прямое следствие (27) получаем из-

вестную теорему Левинсона о единственности решения уравнения (I4). Аналогично из (27) и (28) выводится, что $Q(\upsilon)$ (I7) определяет однозначно оператор (II) при $\upsilon \in \Omega(N)$. Пусть

$$G(x,y,k) = 4kF^{-1}(k)\{F(x,k)\Phi(y,k)\theta(x-y) + [\sum_{n=1,2}\varphi(\upsilon_n; x,k)f(\upsilon_{3-n}; x,k)\times$$
$$\times f(\upsilon_n; y,k)\varphi(\upsilon_{3-n}; y,k) - \Phi(x,k)F(y,k)]\theta(y-x)\} \quad (0 \le x,y < \infty,\ Im\,k \ge 0). \tag{30}$$

К формулам (27), (28) приходим, сравнив значение, полученное по теореме о вычетах для контурного интеграла $I(R;x) = (2\pi i)^{-1}\oint_{\gamma_R}\{\int_0^\infty G(x,y,k)\times f(y)dy\}dk$, где $\gamma_R = [-R \le k \le R] \cup k = R\exp(i\varphi), (0 \le \varphi \le \pi)$, с непосредственно подсчитанным по γ_R $\lim I(R;x)$ при $R \to \infty$. Нетрудно проверить, что если $\upsilon_1 = \upsilon_2$, то G есть функция Грина задачи

$$\tilde{L}Y \equiv DL_+Y = \{-\frac{1}{4}D^3 + \frac{1}{2}(\upsilon(x)D + D\upsilon(x))\}Y = DY, \quad 0 < x < \infty, \quad Y(0) = 0, \tag{31}$$

где L_+ определяется (24), так как произведение $Y(x,k)$ любых двух решений (II) удовлетворяет уравнению $\tilde{L}Y = k^2 DY$. С учетом (26) в диссертации показано, на основе интегрального представления для $G(x,y,k)$, что разложение (27), (28) есть разложение единицы для краевой задачи вида (3I) с $L_+ = \Lambda_+$ (25). Как известно, подходы Гельфанда-Левитана и Марченко к решению ОЗР взаимосвязаны. Здесь к этому приходим, рассмотрев разложения, порождаемые сопряженной к G функцией $G^*(x,y,k) = -G(y,x,k)$. При $\upsilon_n \in \Omega(0)$ имеем формулу

$$h(x) = \frac{4}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^\infty k\,\Phi(x,k)\tilde{F}(h;k)dk, \quad \tilde{F}(h;k) = \int_0^\infty h(x)\, Im\{F(x;k)F^{-1}(k)\}dx.$$

В частности, отсюда следует, что оператор (II) определяется однозначно при $\upsilon \in \Omega(0)$ по спектральной плотности $k^2|f(\upsilon;k)|^{-2}$, $0 \le k < \infty$. Хорошо известна роль операторов преобразования

$$\varphi(\upsilon;x,k) = \frac{1}{k}\sin kx + \frac{1}{k}\int_0^x K(\upsilon;x,s)\sin ks\,ds, \quad f(\upsilon;x,k) = e^{ikx} + \int_x^\infty L(\upsilon;x,s)e^{iks}ds \tag{32}$$

в ОЗР и спектральной теории краевых задач Штурма-Лиувилля. В этой главе изучены свойства операторов

$$\mathbb{P}f(x) = -\int_x^\infty M_x(s,x)f(s)ds \quad (\upsilon_n,\ f \in X), \tag{33}$$

$$\mathbb{G}f(x) = \int_x^\infty\{N(x,x) - \int_x^s N_x(x,\xi)d\xi\}f(s)ds \quad (\upsilon_n,\ f \in X), \tag{34}$$

$$\mathbb{\Gamma}f(x) = \int_x^\infty \Gamma(s-x)f(s)ds \quad (\upsilon_n \in \Omega(0),\ f \in X). \tag{35}$$

Здесь функции $M(x,s)$, $N(x,s)$ и $\Gamma(s)$ определяются посредством ядер $K(v_n; x, s)$ и $L(v_n; x, s)$ из вытекающих вследствие (32) представлений

$$\Phi(x,k)=\frac{1}{k}\int_0^x M(x,s)\sin 2ks\,ds,\quad F(x,k)=e^{2ikx}+\int_x^\infty N(x,s)e^{2iks}ds, \tag{36}$$

$$F^{-1}(k)=1+\int_0^\infty \Gamma(s)e^{2iks}ds \quad \left(\int_0^\infty|\Gamma(s)|ds<\infty,\ v_n\in\Omega(0)\right). \tag{37}$$

Для операторов (33)-(35) доказаны соотношения

$$\mathbb{P},\ \mathbb{G}\in\mathcal{L}(X),\ (v_n\in X),\quad \boldsymbol{\Gamma}\in\mathcal{L}(X)\quad (v_n\in\Omega(0)), \tag{38}$$

где $\mathcal{L}(X)$ - пространство линейных ограниченных операторов $A: X\to X$ с нормой $\|A\| = \sup \|Af\|_X / \|f\|_X$, X - пространство (I0). Отсюда в силу (36), (37) следует, что формула обращения (27) справедлива для любой $h\in X$. С помощью этого утверждения получается, что функция $\Psi(v;x)\in X$ и определяет однозначно оператор (II) при $v\in\Omega(0)$. Здесь также показано, что если $v_1=v_2=v\in X$, то указанные выше операторы как функции от v являются липшицевыми в пространстве $\mathcal{L}(X)$. Точнее, имеют место оценки

$$\|\mathbb{G}(v_1)-\mathbb{G}(v_2)\|\le K\|v_1-v_2\|_X \tag{39}$$

и т.д., где постоянная K зависит лишь от $\|v_1\|_X, \|v_2\|_X$.

В общем случае двух самосопряженных краевых задач

$$y_n''+(k^2-v_n(x))y_n=0,\ 0\le x<\infty,\ y_n'(0)-\alpha_n y_n(0)=0,\ v_n\in X_1\ (n=1,2) \tag{40}$$

аналогом разложения (27) является

$$-\int_x^\infty h(y)dy=-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty k\,\mathrm{Im}\{F(x,k)E^{-1}(k)\}\tilde{\Psi}(h;k)dk,\quad \tilde{\Psi}(h;k)=\int_0^\infty h(x)(\Psi(x,k)-\tfrac{1}{2})dx, \tag{4I}$$

где $\psi_n(x,k)$ - решения (40), для которых $\psi_n(0,k)=1$, $\psi_n'(0,k)=\alpha_n$, $E(k)=e_1(k)e_2(k)$, $e_n(k)=f_n'(0,k)-\alpha_n f_n(0,k)$; $F(x,k)$ определяется как в (27). Естественная постановка вопроса о построении сопряженного к (4I) разложения приводит к рассмотрению задачи о разложении функции вида $\hat{f}=(f(x)\in X_1,\ \alpha\in\mathbb{C})$. При $e_n(k)\ne 0$, $\mathrm{Im}\,k>0$, $n=1,2$, оно имеет вид

$$h(x)=\frac{4}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^\infty k\Psi(x,k)(\hat{f},\hat{F}(k))_1dk,\quad \alpha=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty k(\hat{f},\hat{F}(k))_1dk,$$

$$(\hat{f},\hat{F}(k))_1=\int_0^\infty h(x)\,\mathrm{Im}\{F(x,k)E^{-1}(k)\}dx+\alpha\,\mathrm{Im}\{F(0,k)E^{-1}(k)\}. \tag{42}$$

Формулы (4I) и (42) выводятся указанным выше методом контурного интегрирования путем замены в G (30) φ_n на ψ_n и $F(k)$ на $E(k)$.

Уже на этом примере видна эффективность предложенной в диссертации нестандартной схемы: рассматривать вопрос о разложении по произведениям решений двух задач Штурма-Лиувилля, не связывая его априори с построением резольвенты для некоторой краевой задачи, так как даже если $v_1=v_2$, то для $\Psi(x,k)$ имеем в (3I) сложные нелокальные граничные условия.

Наконец, на основе уже доказанной при $\ell=0$ формулы (27) показано индуктивно по ℓ, что аналогичное разложение имеет место при любом $\ell = 1, 2, \ldots$.

<u>В главе II</u> "Непрерывный аналог метода Ньютона в обратной задаче рассеяния на полуоси" первоначально развита теория уравнения (6) для решения в пространстве X (I0) уравнения (I3). На основе результатов главы I показано, что при всяком $v\in\Omega(0)$ существует по норме X производная Фреше $\Psi'(v)$. При этом

$\Psi'(v)=(I+\boldsymbol{\Gamma}(v))(I+\mathbb{P}(v))\in\mathcal{L}(X)$, $[\Psi'(v)]^{-1}=I+\mathbb{G}(v)\in\mathcal{L}(X)$,

где операторы $\mathbb{P}(v)$, $\mathbb{G}(v)$ и $\boldsymbol{\Gamma}(v)$ определяются формулами (33)-(35) при $v_1=v_2$. Отсюда вытекает, что $\Psi(v)$ удовлетворяет требованиям I и II в окрестности любого $v_*\in\Omega(0)$, а задача Коши (6) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} v_t(t,x)&=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^\infty\{S_*(k)-S(v(t);k)\}f^2(v(t);x,k)dk\equiv\\ &\equiv-[I+\mathbb{G}(v(t))](\Psi(v(t))-f_*),\ 0\le t<\infty,\ v(0,x)=v_0\in\Omega(0). \end{aligned} \tag{43}$$

Для этого уравнения показано, как с помощью общих теорем Гавурина можно получить нелокальные условия сходимости НАМН в ОЗР. В частности, пусть G - ограниченная область из $\Omega(0)$, ∂G - ее граница и $v_*=\Psi^{-1}(f_*)\in\Omega(0)$. Тогда для того, чтобы $v_*\in G$, необходимо и достаточно существование хотя бы одного v_0: $\|\Psi(v_0)-f_*\|_X\le d=\min\limits_{v\in\partial G}\|\Psi(v)-f_*\|_X$, где $d>0$ при $v_*\bar{\in}\partial G$. При этом если $v_*\in G$, то для всех $v_0\in\Omega(G)=\{v_0\in G \mid \|\Psi(v_0)-f_*\|_X\le d\}$ задача Коши (43) имеет единственное решение $v(t,v_0)\in G$, $0\le t<\infty$, для которого $\lim\limits_{t\to\infty}\|v(t,v_0)-v_*\|_X=0$ $(v_*=\Psi^{-1}(f_*))$. Далее, с учетом оценки (39) и аналогичной для $\|\Psi(v_1)-\Psi(v_2)\|_X$ доказано, что при $v_0\in\Omega(G)$ уравнение (43) допускает приближенное интегрирование методом Эйлера (22). В предположении об априорной близости начального приближения v_0 к искомому v_* обоснован модифицированный метод Ньютона-Канторовича

$$v_{n+1}=v_n-\tau_n[f'(v_0)]^{-1}(f(v_n)-y_*),\ n=0,1,\ldots,\ \tau_n\in(0,1] \tag{44}$$

и метод простых итераций для решения уравнения (I3). Условия, обеспечивающие сходимость $\lim_{n\to\infty} v_n = v_* : \ \Psi(v_*) = f_*$, сформулированы непосредственно в терминах $\| v_0 \|_X$ и $\| f_* \|_X$.

Для решения уравнения (I8) с помощью НАМН сначала показано, что оператор $Q(v)$ (I7) дифференцируем в областях $\Omega(N)$ (I6). Его дифференциал

$$Q'(v)h = \frac{d}{d\varepsilon} Q(v+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} = \Big\{ \Big(h, \frac{\delta\eta}{\delta v}(k)\Big) = \int_0^\infty h(x) \frac{\delta\eta}{\delta v}(x,k)\,dx,\ 0 \le k < \infty;\ \Big(h, \frac{\delta\lambda_j}{\delta v}\Big), \Big(h, \frac{\delta C_j}{\delta v}\Big),\ j=1,\dots,N \Big\},$$

где

$$\delta\eta/\delta v(x,k) = k|f(v;k)|^{-2}\varphi^2(v;x,k),\quad \delta\lambda_j/\delta v(x) = C_j(v)\varphi^2(v;x,k_j)\quad (k_j = k_j(v)),$$

$$-C_j^{-1}(v)\,\delta C_j/\delta v(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty k^2\varphi^2(v;x,k)\big(|f(v;k)|^2(k^2-\lambda_j(v))\big)^{-1}dk +$$

$$+(2k_j)^{-1}C_j(v)\frac{\partial}{\partial k}\varphi^2(v;x,k)\Big|_{k=k_j} + \sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\ne j}}^{N} 2\,C_\ell(v)\varphi^2(v;x,k_\ell)(\lambda_\ell(v)-\lambda_j(v))^{-1}.$$

Оператор $[\,Q'(v)]^{-1}$ получен из формулы обращения (27), (28) при $v_1 \equiv v_2 = v$. Далее, с помощью первого интеграла

$$\eta(v(t);k) = \eta(v_0;k)\exp(-t) + \eta_*(k)(1-\exp(-t)),\quad 0 \le t < \infty, \qquad (45)$$

установлено, что для любого $v_0 \in Q^{-1}(\Upsilon_1^{(1)})$ задача Коши (29) имеет единственное решение $v(t,v_0) \in \Omega(0) \cap X_1$, для которого по норме X_1 $\lim_{t\to\infty} v(t,v_0) = v_* : \ \eta(v_*;k) = \eta_*(k)$, т.е. решение задачи (В) естественным образом согласовывается с однозначной разрешимостью уравнения (I4) в $\Omega(0)$. Эквивалентность равенства (45) уравнению (29) позволяет в силу асимптотического разложения

$$\eta(v;k) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2k)^{-(2m+1)} I_m[v],\ (k\to\infty),\quad I_m[v] = \int_0^\infty \sigma_{2m+1}(v;x)\,dx, \qquad (46)$$

где $\sigma_{2m+1}(v;x)$ – те же, что и в (3), получить, что если

$$I_m[v_0] = I_m[v_*],\ \text{то}\ I_m[v(t,v_0)] = I_m[v_*],\ 0 \le t < \infty,\ m = 0,1,\dots,n < \infty, \qquad (47)$$

т.е. величины $I_m[v(t,v_0)]$ являются сохраняющимися для задачи Коши (29). Отметим, что из (47) и развитой в главе I спектральной теории оператора Λ_+ (25) следуют равенства

$$\int_0^t Q^m(s)\,ds = -\frac{8}{\pi}\int_0^\infty k^{2m+1}[\eta(v(t);k) - \eta(v_0;k)]\,dk,\quad 0 \le t < \infty,\ m = 0,\dots,n,$$

$$Q^m(t) = DL_+^{m-1}(v(t))\Big(-\int_x^\infty v_t(t,y)\,dy\Big)\Big|_{x=0},$$

(где оператор L_+ определяется (24) и получается из Λ_+ при $v_1 = v_2$), которые являются иной записью тождеств следов для краевой задачи (II). Задача Коши (6) для уравнения (I8) в общем случае $N > 0$ построена по намеченной выше схеме для $N = 0$. Ее явный вид нетрудно вывести в силу приведенных утверждений, и здесь мы его опускаем. Отметим лишь, что когда v_0 удовлетворяет условиям $\eta(v_0;k) = \eta_*(k)$, $0 < k < \infty$, $\lambda_j(v_0) = \lambda_{j,*}$, $j = 1,\dots,N$, задача сводится к эволюционному

уравнению

$$v_t(t,x) = \sum_{j=1}^{N} 2\,(C_j(v(t)) - C_{j,*})\frac{d}{dx}\varphi^2(v(t);x,k_j(v_0)),\quad 0 \le t < \infty,$$

решение которого выписывается в явной форме с использованием формулы Йоста и Кона.

Придерживаясь предложенного в главе I метода построения разложений вида (27) для $\ell = 1,2,\dots$, уравнение (29) обобщаем на случай ОЗР для оператора (9) при любом $\ell = 1,2,\dots$ и $v \in \Omega(0)$.

Численные методы для решения ОЗР построены с применением аппроксимации (44) к задаче Коши (29). Точность в предложенных алгоритмах достигается главным образом за счет того, что величины (47) остаются сохраняющимися для дискретного процесса. При $m = 0$ это дает $\int_0^\infty v_n(x)\,dx = \int_0^\infty v_0(x)\,dx$, $n = 1,2,\dots$, если для начального приближения $v_0(x)$ $\lim_{k\to\infty} 2k\,\eta_*(k) = I[v_0] \equiv \int_0^\infty v_0(x)\,dx$. Отсюда вследствие (46) имеем для разности $\eta(v_n;k) - \eta_*(k)$, $(n = 1,2,\dots)$ порядок убывания $O(k^{-3})$ при $k \to \infty$, что позволяет внести дифференцирование по x под знак интеграла. Тем самым некорректность ОЗР здесь сводится по существу к задаче об устойчивом суммировании интеграла Фурье. Еще одним фактором, способствующим их эффективной реализации на ЭВМ, является применение фазового уравнения для расчета подынтегрального выражения в (29). ОЗР при наличии связанных состояний, а также при высших угловых моментах $\ell = 1,2,\dots$ сводится к расчету вспомогательного потенциала $\tilde v_* \in \Omega(0)$, откуда искомый v_* находится с помощью удобных для реализации на ЭВМ преобразований типа Крамма-Крейна. Приведены результаты численного решения ряда модельных ОЗР, иллюстрирующих наглядно достижимую точность, слабую зависимость сходимости от начального приближения, скорость и устойчивость разработанных итерационных методов.

<u>В Приложении I</u> "Устойчивые методы суммирования интеграла Фурье" автор дает аналитическое обоснование применяемой при расчетах ОЗР регуляризации интеграла Фурье, следуя известному методу А.Н.Тихонова и В.Я.Арсенина в аналогичной задаче для рядов Фурье.

<u>В главе Ш</u> "Обратные задачи для оператора Штурма-Лиувилля на конечном интервале" изучен сходный с рассматриваемым в предыдущих двух главах круг вопросов для регулярных краевых задач (20), (2I).

Пусть $\mathcal{H}_1 = L_2(0,\pi) \oplus \mathbb{C}$ – гильбертово пространство с элементами $\tilde f = (f(x), \alpha)$ и скалярным произведением $(\tilde f_1, \tilde f_2)_1 = \int_0^\pi f_1(x)\overline{f_2(x)}\,dx + \alpha_1\overline{\alpha_2}$. Введем в $\mathcal{H}_1$ функции

$$\tilde\Phi(\lambda) = (\Phi(x,\lambda) - 1/2,\ \Phi(\pi,\lambda) - 1),\quad \tilde\Psi(\lambda) = (2\Psi'(x,\lambda), -1), \qquad (48)$$

где $\Phi(x,\lambda) = \varphi_1(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda)$, $\Psi(x,\lambda) = \psi_1(x,\lambda)\psi_2(x,\lambda)$; $\varphi_j(x,\lambda)$: $\varphi_j(0,\lambda) = 1$, $\varphi_j'(0,\lambda) = h_j$, $\psi_j(x,\lambda)$: $\psi_j(\pi,\lambda) = 1$, $\psi_j'(\pi,\lambda) = -H_j$ – решения уравнений (20). По спектрам $\sigma_j = \{\lambda_n^{(j)} = \lambda_{2n+j}\}_{n=0}^{\infty}$, $j = 1,2$, краевых задач $\{q_j(x), h_j, H_j\}$, где $n=m$, если $\lambda_{2m+1}=\lambda_{2n+2}$, построим множества $\sigma'=\sigma_1\cap\sigma_2$, $\sigma''=(\sigma_1\cup\sigma_2)\setminus\sigma'$. Определим в $\mathcal{H}_1$ систему $\{\tilde U_n=(U_n(x),U_n^{(0)})\}_{n=1}^{\infty} = \{\dot\Omega^{-1}(\lambda_n)\tilde\Phi(\lambda_n),\ \lambda_n\in\sigma'';$ $\tilde U_{2n+1}=2\ddot\Omega^{-1}(\lambda)\tilde\Phi(\lambda),\ \tilde U_{2n+2}=2\ddot\Omega^{-1}(\lambda)\dot{\tilde\Phi}(\lambda),\ \lambda=\lambda_{2n+1}=\lambda_{2n+2}\in\sigma'\}$, где $\Omega(\lambda)=\omega_1(\lambda)\omega_2(\lambda)$, $\omega_j(\lambda)$ – характеристическая функция задачи $\{q_j(x),h_j,H_j\}$ $(\dot{}=\partial/\partial\lambda)$. В диссертации доказано, что для любой $\tilde f\in\mathcal H_1$ имеет место разложение

$$\lim_{M\to\infty}\|\tilde f-\sum_{n=1}^{2M}\tilde V_n(\tilde f,\tilde U_n)_1\|_{\mathcal H_1}=0,\quad(\tilde f,\tilde U_m)_1=\int_0^\pi f(x)U_m(x)+\alpha U_m^{(0)}, \qquad (49)$$

где система $\{\tilde V_n=(V_n(x),V_n^{(0)})\}_{n=1}^{\infty}=\{\tilde\Phi(\lambda_n),\ \lambda_n\in\sigma'',\ \lambda_{2n+2}\in\sigma';$ $\tilde V_{2n+1}=\dot{\tilde\Phi}(\lambda_{2n+2})-\dddot\Omega(\lambda_{2n+1})(3\ddot\Omega(\lambda_{2n+1}))^{-1}\tilde\Phi(\lambda_{2n+1}),\ \lambda_{2n+1}\in\sigma'\}$.
Отметим, что $(\tilde U_n,\tilde V_m)_1=\delta_{n,m}$, $(n,m=1,2,\dots)$.

Идея рассматривать на конечном интервале разложения (49) по "произведениям" (48) в расширенном пространстве $\mathcal H_1$ играет в этой главе важную роль.

Сопоставим краевой задаче $\{q(x),h,H\}$, для которой $h+H+\frac12\int_0^\pi q(x)dx=a_*$, a_* – фиксированное, элемент $\tilde q=(q(x),H)\in\mathcal H_1$. Тогда для собственных значений $\lambda_n=\lambda_n(\tilde q)$ в любой точке $\tilde q\in\mathcal H_1$ ($\mathcal H_1$ – вещественное) существует дифференциал

$$\frac{d}{d\varepsilon}\lambda_n(\tilde q+\varepsilon\tilde f)|_{\varepsilon=0,\tilde f\in\mathcal H_1}=(\tilde f,\frac{\partial\lambda_n}{\partial\tilde q})_1=\alpha_n(\tilde f,\tilde\Phi(\lambda_n))_1, \qquad (50)$$

где $\alpha_n^{-1}=\int_0^\pi\varphi^2(x,\lambda_n)dx$, $\Phi(x,\lambda)=\varphi^2(x,\lambda)$.

Пусть заданы две перемежающиеся последовательности $\{\lambda^*_{2n+j}\}_{n=0}^{\infty}$, $j=1,2$, где при $a_1^*\ne a_2^*$ выполняются условия:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^*_{2n+j}-n^2-\frac{2}{\pi}a_j^*)^2<\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty}n^2(\lambda^*_{2n+2}-\lambda^*_{2n+1}-\frac{2}{\pi}(a_2^*-a_1^*))^2<\infty. \qquad (51)$$

Построим по краевым задачам $\{q(x),h,H_j\}$, $H_1\ne H_2$, для которых $h+H_j+\frac12\int_0^\pi q(x)dx=a_j^*$, элемент $\tilde q=(q(x),H_1)\in\mathcal H_1$ и обозначим через $\lambda_{2n+j}(\tilde q)$, $(n=0,1,\dots;\ j=1,2)$ их собственные значения. Тогда при любом $\tilde q_0=(q_0(x),H_{1,0})\in\mathcal H_1$ функции

$$\lambda_{2n+j}(t)=\lambda_{2n+j}(\tilde q_0)\exp(-t)+\lambda^*_{2n+j}(1-\exp(-t)),\ 0\le t<\infty,\ n=0,1,\dots;\ j=1,2, \qquad (52)$$

определяют однозначно семейство краевых задач $\{q(t,x),h(t),H_j(t)\},(j=1,2)$, где $h(t)+H_j(t)+\frac12\int_0^\pi q(t,x)dx=a_j^*$, $0\le t<\infty$, для которых $\lambda_{2n+j}(t)=\lambda_{2n+j}(\tilde q(t))$, $\tilde q(t)=(q(t,x),H_1(t))$. Отсюда, дифференцируя по t равенства (52), с учетом (50) получаем систему уравнений

$$(\tilde q_t,\tilde U_{2n+j}(\tilde q(t)))_1=(-1)^j(a_2^*-a_1^*)^{-1}[\lambda^*_{2n+j}-\lambda_{2n+j}(\tilde q(t))],\ n=0,1,\dots;\ j=1,2.$$

Воспользуемся теперь формулой (49) при $q_1(x)=q_2(x)$, $h_1=h_2$, $H_1\ne H_2$. В результате приходим к следующей задаче Коши для ОЗП:

$$\tilde q_t(t)=(a_2^*-a_1^*)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1,2}(-1)^j[\lambda^*_{2n+j}-\lambda_{2n+j}(\tilde q(t))]\tilde V_{2n+j}(\tilde q(t)),\ 0\le t<\infty,\ \tilde q_0\in\mathcal H_1, \qquad (53)$$

что есть (6) с $f=\{\lambda_{2n+1}(\tilde q),\lambda_{2n+2}(\tilde q)\}_{n=0}^{\infty}$ и $y_*=\{\lambda^*_{2n+1},\lambda^*_{2n+2}\}_{n=0}^{\infty}$. Для этого уравнения доказано, что для любого $\tilde q_0\in\Omega_{11}(N<\infty)=\{\tilde q\in\mathcal H_1\mid\lambda_{2n+j}(\tilde q)=\lambda^*_{2n+j},\ n=N+1,\dots;\ j=1,2\}$, имеется единственное решение $\tilde q(t)\in\Omega_{11}(N)$, $0\le t<\infty$, причем существует $\lim_{t\to\infty}\tilde q(t)=\tilde q_*=(q_*(x),H_{1,*})$: $\lambda^*_{2n+j}=\lambda_{2n+j}(\tilde q_*)$.

Явный вид задачи Коши (6) в ОЗI, который здесь опускаем, нетрудно получить, если устремить $a_2^*\to a_1^*$ в (53) при фиксированной последовательности $\lambda^*_{2n+1}=\lambda^*_n$, $n=0,1,\dots$, так как $\partial\lambda_n/\partial H=\beta_n$.

Аналогом (53) в ОЗШ является уравнение

$$q_t(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(q(t))[\lambda_n^*-\lambda_n(q(t))]\{\tilde\Phi'(q(t);x,\lambda_n)-\dot{\tilde\Phi}'(q(t);x,\lambda_n)\},$$
$$0\le t<\infty,\quad q(0,x)=q_0(x)=q_0(\pi-x)\in L_2(0,\pi). \qquad (54)$$

Здесь λ_n^* удовлетворяют первому условию в (51), $\beta_n=\alpha_n$ определяются известным образом по $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\lambda_n(q)$ – собственные значения задачи $\{q(x)=q(\pi-x),h,H=h\}$, где $2h+\frac12\int_0^\pi q(x)dx=a_*$, $\Phi(x,\lambda_n)=\tilde\Phi(\pi-x,\lambda_n)$.

Расчетные алгоритмы в ОЗ на конечном интервале выводятся, как и в ОЗР, на основе (44). Отметим, однако, что в отличие от ОЗР, где с почти одинаковым успехом можно пользоваться итерационными процессами (22) и (44), причем выражение для v_0 не играет особо важной роли при их численной реализации, при ОЗI–Ш выбор v_0 является существенным в построении реально допускающих реализацию на ЭВМ алгоритмов. Это видно уже на примере уравнения (54), где аппроксимация (22) приводит к весьма сложной вычислительной задаче. С другой стороны, так как без ограничения общности можно считать $a_*=0$, то применение дискретизации (44) к уравнению (54) при $q_0(x)=0,\ h_0=0$ дает следующую простую расчетную схему:

$$q_{k+1}(x)=q_k(x)+2\tau_k\sum_{n=0}^{N_k}[\lambda_n^*-\lambda_n(q_k)]\cos 2nx,\quad 0\le x\le\pi,$$
$$k=0,1,\dots,\quad q_0(x)=0,\ h_0=0,\quad h_k=-\frac14\int_0^\pi q_k(x)dx.$$

Высокая точность этого и сходных ему алгоритмов в ОЗI и П продемонстрирована на некоторых модельных ОЗ.

<u>В главе IУ</u> "О нелинейных эволюционных уравнениях, связанных с оператором Шредингера на всей оси", аналогичной по конструкции главе I, сначала получены формулы разложения по произведениям $F^{\pm}(x,k)=f_1^{\pm}(v_1;x,k)f_2^{\pm}(v_2;x,k)$ решений $f^{\pm}(v_n;x,k)$: $\lim_{x\to\pm\infty}f^{\pm}(v_n;x,k)\times\exp(\mp ikx)=1$ уравнения (2) с $v=v_n(x)\in\mathcal S$, $n=1,2$, а также развита спектральная теория оператора Λ_+ (25) и сопряженного относительно кососкалярного произведения $[f,g]=$

$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) D g(x)\, dx$ оператора

$$\Lambda_- = \tfrac{1}{4}\{-D^2 + 2S(x) - \int_{-\infty}^{x} dy\, S_y(y) - \int_{-\infty}^{x} dy\, \Delta(y) \int_{-\infty}^{y} dz\, \Delta(z)\},$$

для которого $\Lambda_- F^-(x,k) = k^2 F^-(x,k)$. Построенное здесь операционное исчисление для операторов $\Lambda_\pm$ позволило единообразно изложить теорию НЭУ (23) и связанных с ними преобразований Беклунда, причем в относительно замкнутой форме.

Важное место в этой главе занимают симплектические формулы разложения, ассоциированные с квадратами $F^\pm(v;x,k) = (f^\pm(v;x,k))^2$. Если спектр оператора (2) исчерпывается полуосью $k^2 \geq 0$, что для краткости предполагается выполненым в дальнейшем, последние сводятся к разложению

$$f(x) = \frac{i}{4\pi}\int_0^{\infty}\{P(x,k)[f,Q(k)] - Q(x,k)[f,P(k)]\}(k\, b(k) b(-k))^{-1} dk, \quad (f \in \mathcal{J}). \tag{55}$$

Здесь $b(k) = (2ik)^{-1} W(f^+(v;x,k), f^-(v;x,-k)) \equiv f^+ f^-_x - f^+_x f^-$,

$P(x,k) = r^-(k) F^+(v;x,k) - r^-(-k) F^+(v;x,-k)$, $Q(x,k) = r^+(k) F^-(v;x,k) + r^-(k) F^+(v;x,k)$,

где $r^\pm(k) = b(\pm k) a^{-1}(k)$, $a(k) = (2ik)^{-1} W(f^-(v;x,k), f^+(v;x,k))$.

Подынтегральное выражение в (55) имеет смысл и в точках, где $b(\pm k) = 0$, причем всегда является непрерывной функция от k, которая равномерно по $-\infty < x < \infty$ убывает при $k \to \infty$ быстрее любой степени k^{-n}, $n = 1, 2, \ldots$. На основе (55) изучены спектральные свойства операторов L_+ (24) и $L_- = -\frac{1}{4}D^2 + v(x) - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} dy\, v_y(y)$ на линейном многообразии

$$\mathfrak{M} = \{f \in \mathcal{J} \mid [P(k), f] = 0,\ 0 \leq k < \infty\}.$$

Отметим, что в отличие от функций $F^+(x,k)$ и $F^-(x,k)$, которые удовлетворяют соответственно уравнениям $\Lambda_+ F^+ = k^2 F^+$ и $\Lambda_- F^- = k^2 F^-$, функция $P(x,k)$ является одновременно решением уравнений $L_\pm P(x,k) = k^2 P(x,k)$, так как $P(x,k) = r^+(-k) F^-(v;x,-k) - r^+(k) F^-(v;x,k)$.

Для $\mathfrak{M}$ показано, что есть лагранжевая плоскость в $\mathcal{J}$, т.е. $[f,g] = 0$ для любых $f, g \in \mathfrak{M}$ и если $f \in \mathfrak{M}$, то $L_+ f = L_- f \in \mathfrak{M}$, т.е. $\mathfrak{M}$ является инвариантным многообразием для операторов $L_\pm$. Исходя из этих свойств автор далее доказывает, что если с семейством уравнений (2) связать плоскость $\mathfrak{M}(t)$, то имеют место следующие утверждения:

I. Для любой рациональной функции $\Omega(\lambda) = \overline{\Omega(\lambda)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, не имеющей полюсов на вещественной оси, функция

$$\Omega(L_\pm) v(t,x) = \frac{2}{\pi i}\int_0^{\infty} k\, \Omega(k^2) P(v(t);x,k)\, dk \in \mathfrak{M}(t), \quad 0 \leq t < \infty,$$

независимо от того, удовлетворяет ли потенциал $v(t,x)$ НЭУ вида (23).

II. Условие

$$\int_{-\infty}^{x} v_t(t,y)\, dy \in \mathfrak{M}(t), \quad 0 \leq t < \infty, \tag{56}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы

$\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} v_t(t,x)\, L_\pm^{m-1} v(t,x)\, dx = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} k^{2m-1} p(v(t);k)\, dk = 0$, $0 \leq t < \infty$, $m = 1, 2, \ldots$,

где $p(k) = -(k/\pi) \ln(1 - r^+(k) r^+(-k))$, т.е. интегралы $\widetilde{I}_m[v(t)]$ (3) есть сохраняющиеся по t величины.

III. Для того чтобы выполнялось уравнение (23), следует наряду с (56) потребовать, чтобы

$$q_t(t,k) = -2k\,\Omega(k^2),\ 0 \leq t < \infty,\ q(0,k) = q(v_0;k),\ q(k) = \arg b(k).$$

Отметим, что функции $p(k)$ и $q(k)$ были введены в связи с упомянутой ранее гамильтоновой трактовкой уравнения (I).

<u>В главе V</u> "Обратные задачи для одномерной системы Дирака и связанные с ним нелинейные эволюционные уравнения" показано, как ряд теорем, доказанных в предыдущих четырех главах для операторов Штурма-Лиувилля, можно обобщить для соответствующих операторов Дирака. Центральное место занимает вопрос о построении формул разложения векторфункции $f(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ по "произведениям" решений двух систем Дирака. Здесь изложим вкратце идею этой конструкции в случае двух самосопряженных краевых задач

$$[B\tfrac{d}{dx} + Q_j(x)]\, y^{(j)} = \lambda y^{(j)};\ 0 \leq x < \infty,\ y_2^{(j)}(0) = 0,\ j = 1, 2, \tag{57}$$

где

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q_j(x) = \begin{pmatrix} p_j(x) & q_j(x) \\ q_j(x) & -p_j(x) \end{pmatrix}$, $y^{(j)} = \begin{pmatrix} y_1^{(j)} \\ y_2^{(j)} \end{pmatrix}$, функции $p_j(x), q_j(x), p_j'(x), q_j'(x) \in L_1(0,\infty)$. Произведение решений $y^{(j)}(x,\lambda)$ определяется по формуле

$$Y(x,\lambda) = y^{(1)} \circ y^{(2)}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} y_1^{(2)} - y_2^{(1)} y_2^{(2)} \\ y_1^{(1)} y_2^{(2)} + y_2^{(1)} y_1^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Тогда, если $\varphi^{(j)}(x,\lambda)$ и $f^{(j)}(x,\lambda)$ – решения (57), для которых $\varphi^{(j)}(0,\lambda) = (1,0)^T$, $\lim_{x\to\infty} f^{(j)}(x,\lambda)\exp(-i\lambda x) = (1,-i)^T$, то роль функции G (30) играет матрица

$G(x,y,\lambda) = (f_1(\lambda) f_2(\lambda))^{-1}\{f^{(1)} \circ f^{(2)}(x,\lambda)\, \widetilde{\varphi^{(1)} \circ \varphi^{(2)}}(y,\lambda)\, \theta(x-y) +$
$[\sum_{j=1,2} f^{(j)} \circ \varphi^{(3-j)}(x,\lambda)\, \widetilde{\varphi^{(j)} \circ f^{(3-j)}}(y,\lambda) - \varphi^{(1)} \circ \varphi^{(2)}(x,\lambda)\, \widetilde{f^{(1)} \circ f^{(2)}}(y,\lambda)]\, \theta(y-x)\}$,

где $f_j(\lambda) = f_2^{(j)}(0,\lambda)$ – функция Йоста краевой задачи (57), $\widetilde{Y} = (Y_2, -Y_1)$. Аналогом (27) является формула обращения

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\left\{\frac{f^{(1)} \circ f^{(2)}(x,\lambda)}{f_1(\lambda) f_2(\lambda)}\right\}[f, \Phi(\lambda)]\, d\lambda, \quad 0 < x < \infty, \tag{58}$$

где $f(x)$ - абсолютно непрерывная вектор-функция из $L_1(0,\infty)$, $[f,\Phi(\lambda)] = \int_0^{\infty}\{f_1(x)\Phi_2(x,\lambda) - f_2(x)\Phi_1(x,\lambda)\}\, dx$, $\Phi(x,\lambda) = \varphi^{(1)} \circ \varphi^{(2)}(x,\lambda)$.

В частности, из (58) вытекает, что фаза рассеяния $\eta_j(\lambda) = \arg f_j(\lambda), (-\infty < \lambda < \infty)$ определяет однозначно краевую задачу (57).

В этой главе получены также соответствующие аналоги утверждений главы Ш для краевых задач, определяемых системами (57), $0 \le x \le \pi$, и граничными условиями $y_2^{(j)}(0)=0,\ y_2^{(j)}(\pi)\cos\alpha_j + y_1^{(j)}(\pi)\sin\alpha_j = 0\ (j=1,2)$. Далее показано, что основные конструкции и утверждения главы IУ можно обобщить на случай двух несамосопряженных систем Дирака

$$\left[\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{d}{dx} + \begin{pmatrix}0 & q_j(x)\\ -r_j(x) & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}y_1^{(j)}\\ y_2^{(j)}\end{pmatrix} = i\zeta\begin{pmatrix}y_1^{(j)}\\ y_2^{(j)}\end{pmatrix}, -\infty < x < \infty, \qquad (59)$$

где комплекснозначные функции $q_j(x), r_j(x) \in L_1(-\infty, \infty)$. Здесь, при некоторых обычно накладываемых ограничениях на спектр оператора (59), получены разложения по произведениям

$$\Upsilon(x,\zeta) = y^{(1)} \circ y^{(2)}(x,\zeta) = (y_1^{(1)}y_1^{(2)},\ y_2^{(1)}y_2^{(2)})^T$$

и развита связанная с ними спектральная теория операторов

$$\Lambda_\pm = \frac{1}{2i}\left\{\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{d}{dx} + \sum_{j=1,2}\begin{pmatrix}-q_j(x)\\ r_{3-j}(x)\end{pmatrix}\int_x^{\infty} dy\,(r_j(y), q_{3-j}(y))\right\}.$$

На их основе изложена схема построения НЭУ, интегрируемых МОЗР для системы (59).

<u>В заключении</u> диссертации формулируются результаты представленных исследований.

Ш. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

I. Разработан новый метод приближенного решения обратных задач спектрального анализа с помощью нелинейных эволюционных уравнений. В его основу положено известное уравнение для непрерывного аналога метода Ньютона, теория которого впервые в диссертации аналитически обоснована для перечисленных выше обратных задач и представляет самостоятельный теоретический интерес.

2. С помощью дискретизации этих уравнений получены устойчивые итерационные алгоритмы для численного расчета обратных задач на ЭВМ. Для достижения необходимой точности эффективно использованы свойства нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния.

3. Развита теория разложения по произведениям решений двух краевых задач Штурма-Лиувилля и связанная с ними спектральная теория интегродифференциальных операторов, которая обобщена на случай двух одномерных операторов Дирака.

4. Предложена оригинальная конструкция общего вида нелинейных эволюционных уравнений, решаемых методом обратной задачи, основанная на симплектических формулах разложения и ассоциированных с ними лагранжевых многообразиях.

5. Предложенная методика является основой для разработки новых численных методов решения обратных задач квантовой механики, а также может быть использована для дальнейшего обобщения метода обратной задачи.

Литература, отражающая содержание диссертации:

I. Жидков Е.П., Малышев Р.В., Христов Е.Х. Решение обратной задачи теории рассеяния методом Ньютона. Сообщение ОИЯИ, Р5-9063, Дубна (1975).

2. Жидков Е.П., Малышев Р.В., Христов Е.Х. О расчете на ЭВМ обратной задачи рассеяния. Сообщение ОИЯИ, Р5-9923, Дубна (1976).

3. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Христов Е.Х. О непрерывном аналоге метода Ньютона в обратной задаче теории рассеяния. Сообщение ОИЯИ, Р5-9980, Дубна (1976).

4. Жидков Е.П., Христов Е.Х. Устойчивые методы суммирования интеграла Фурье. Препринт ОИЯИ, Р5-10369, Дубна (1977). "Алгоритмы и программы для решения некоторых задач физики". (Совместный научный сб. ОИЯИ (Дубна, СССР) и ЦИФИ (Будапешт, Венгрия)), вып. П. KFKI-77-I2. Будапешт (1977), 3-20.

5. Жидков Е.П., Христов Е.Х. Об одном уравнении для решения обратной задачи рассеяния, близком к уравнению Кортевега-де Фриза. Алгоритмы и программы для решения некоторых задач физики. (Совместный научный сб. ОИЯИ (Дубна, СССР) и ЦИФИ (Будапешт, Венгрия), вып. П, KFKI -77-I2. Будапешт (1977), 2I-6I.

6. Христов Е.Х. О разложениях по квадратам решений радиального уравнения Шредингера. Препринт ОИЯИ, Р5-II25I, Дубна (1978); Болгарский физ. журнал, т. 5, № 5 (1978), 325-336.

7. Визнер Я., Жидков Е.П., Лелек В., Малышев Р.В., Хоромский Б.Н., Христов Е.Х., Улегла И. Итерационные методы решения обратной задачи теории рассеяния. "Физика элементарных частиц и атомного ядра", т. 9, вып. 3 (1978), 710-768.

8. Христов Е.Х. О разложениях по произведениям решений двух задач Штурма-Лиувилля на полуоси. Препринт ОИЯИ, Р5-II754, Дубна (1978); Дифференциальные уравнения, т. I6, №II (1980), 2023-2029.

9. Герджиков В.С., Христов Е.Х. О разложениях по произведениям решений двух систем Дирака, Препринт ОИЯИ, Р5-II668, Дубна (1978); Матем. заметки, т. 28, вып. 4 (1980), 50I-5I2.

I0. Кирчев К.П., Христов Е.Х. О разложениях, связанных с произведениями решений двух регулярных задач Штурма-Лиувилля, Препринт ОИЯИ, Р5-I2227, Дубна (1979); Сиб. матем. журнал, т. 2I, вып. I (1980), 99-I09.

II. Кирчев К.П., Христов Е.Х. О разложениях, связанных с произведениями решений двух регулярных операторов Дирака. Препринт ОИЯИ, Р5-I24I0, Дубна (I979).

I2. Герджиков В.С., Христов Е.Х. Об эволюционных уравнениях, решаемых методом обратной задачи рассеяния. I. Спектральная теория. Препринт ОИЯИ Е2-I273I, Дубна (I979); Болгарский физ. журнал, т. 7, № I (I980), 28-44.

I3. Герджиков В.С., Христов Е.Х. Об эволюционных уравнениях, решаемых методом обратной задачи рассеяния. II. Гамильтонова структура и преобразования Беклунда. Препринт ОИЯИ, Е2-I2742, Дубна (I979); Болгарский физ. журнал, т. 7, № 2 (I980), II9-I33.

I4. Касчиев М., Христов Е.Х. Метод Ньютона в обратной задаче для регулярного оператора Штурма-Лиувилля, Сообщение ОИЯИ, Р5-I29I5, Дубна (I979).

I5. Христов Е.Х. О спектральной теории операторов, порождающих уравнение типа Кортевега-де Фриза. Препринт ОИЯИ, Р5-80-83I, Дубна (I980).

Рукопись поступила в издательский отдел
I8 июня I98I года.