сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

11-81-398

Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский, О.И.Юлдашев

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1981

В настоящей работе строится численный метод высокой точности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости в областях с границей, состоящей из конечного числа гладких кривых. В основе лежит метод граничных интегральных уравнений /ГИУ/ /1/, связанный в данном случае с применением формулы Грина. Выбор этого метода связан с тем, что, во-первых, достигается высокая точность метода без дополнительных машинных ресурсов, во-вторых, точно аппроксимируется уравнение в бесконечной области /внешняя задача/, что важно в задачах магнитостатики. Кроме того, для регулярного разбиения границы области в процессе разностной аппроксимации ГИУ удается эффективно проводить экстраполяцию на последовательности сеток. При этом наибольшую эффективность метод имеет в тех случаях, когда решение требуется найти лишь в небольшом числе точек расчетной области.

В работе исследуется обусловленность матрицы, возникающей при численном решении ГИУ, устанавливается сходимость приближенного решения и оценивается его точность. В частности, установлено, что при кусочно-линейной аппроксимации нормальной производной искомое решение получается с точностью $O(h^{3-\epsilon})$, где h - шаг сетки на границе, что и определяет высокую точность метода. Установлена формула для экстраполяции типа экстраполяции Ричардсона на двух сетках, повышающая точность искомой нормальной производной до $O(h^{3-\epsilon})$ в некоторой слабой метрике. Приводятся результаты численных экспериментов, иллюстрирующие эффективность экстраполяции на последовательности нескольких сеток. Проведено сравнение численных решений для метода ГИУ и конечно-разностного. Представлены результаты расчетов минимальных собственных чисел матриц конечномерной системы для различных контуров.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в области $\bar{G} = G \cup \Gamma \in R^2$, где Γ - граница области G, имеющая непрерывную кривизну, решается задача Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0, \quad x \in G; \quad u = g(x), \quad x \in \Gamma, \qquad /1.1/$$

где $g(x)$ - достаточно гладкая функция контура Γ.

Для решения $u(x)$ задачи /1.1/ имеет место формула Грина [2,3]:

$$\alpha\cdot u(x)+\int_\Gamma\Big[u(s)\frac{\partial}{\partial n}\ln r(x,s)-\ln r(x,s)\frac{\partial}{\partial n}u(s)\Big]ds=0, \qquad /1.2/$$

где $r(x,s)$ - расстояние от точки x до точки $s\in\Gamma$; n - внутренняя нормаль к Γ в точке s;

$$\alpha=\begin{cases}0, & x\notin\bar G,\\ 2\pi, & x\in G,\\ \pi, & x\in\Gamma.\end{cases}$$

Эта формула справедлива и для контуров с кусочно-непрерывной кривизной. Для угловой точки x контура Γ следует положить $\alpha=\alpha_0$, где α_0 - внутренний угол между касательными в точке x [2]. Таким образом, решение задачи /1.1/ сводится к ГИУ вида

$$Lv\equiv\int_\Gamma L(x,s)\,v(s)\,ds=f(x),\quad x\in\Gamma, \qquad /1.3/$$

где

$$L(x,s)=\ln r(x,s),\quad f(x)=\alpha g(x)+Gg,$$

$$Gg\equiv\int_\Gamma G(x,s)\,g(s)\,ds,\quad G(x,s)=\frac{\partial}{\partial n}\ln r(x,s), \qquad /1.4/$$

а $v(s)=\frac{\partial}{\partial n}u(s)$ - искомая нормальная производная функции $u(x)$. Если $v(x)$ найдена из уравнения /1.3/, то $u(x)$ восстанавливается в интересующей нас точке $x\in G$ по формуле /1.2/.

Отметим, что ядро $G(x,s)$ из /1.4/ непрерывно на контуре, а оператор $\pi E+G$ удовлетворяет альтернативе Фредгольма для контура с непрерывной кривизной [4]. Оператор L из /1.3/, очевидно, симметрический, действует из $C(\Gamma)$ в $C(\Gamma)$ и является вполне непрерывным, что легко следует из свойств интеграла типа интеграла Коши и формулы дифференцирования по частям [5]. Поэтому оператор L не может иметь ограниченного обратного, то есть уравнение /1.3/ некорректно по А.Н.Тихонову. Интегрируя по частям [5] равенство /1.3/, легко перейти к уравнению

$$Sw\equiv\int_\Gamma w(s)\,\frac{dr(x,s)}{r(x,s)}=-f(x),\quad w(s)=\int_0^s v(\tau)\,d\tau,$$

в котором оператор S уже имеет ограниченный обратный в пространстве $H^\alpha(\Gamma)$, $0<\alpha<1$. Однако восстановление функции $v(s)$ по $w(s)$ сводится к неустойчивой в C операции численного дифференцирования. Остановимся далее на постановке задачи в форме /1.3/. Всюду в дальнейшем под ds, dx, dt будем понимать дифференциал дуги.

Лемма 1. Пусть на контуре Γ с непрерывной кривизной $\int_\Gamma f(x)\,dx=0$, а также выполнено условие

$$p=\iint_{\Gamma\Gamma}\ln r(x,s)\,ds\,dx\neq 0. \qquad /1.5/$$

Тогда уравнение /1.3/ имеет единственное решение для $f(x)\in C(\Gamma)$. Если $p=0$, то решение единственно в классе функций, ортогональных единице:

$$\int_\Gamma v(s)\,ds=0.$$

Доказательство. Пусть $p\neq0$ и $v_1\neq v_2$ - решения /1.3/, такие, что $\int_\Gamma v_1(s)\,ds=0$, $\int_\Gamma v_2(s)\,ds=c\neq0$. Тогда для функций v_1 и $v_3(s)=v_2(s)-c\,\ell^{-1}$, где $\ell=\int_\Gamma ds$, существуют решения u_1 и u_3 задач Неймана с нормальными производными v_1 и v_3. При этом в силу равенства

$$L(v_1-v_3)=c\,\ell^{-1}\int_\Gamma\ln r(x,s)\,ds$$

имеет место соотношение на контуре Γ:

$$\pi(u_1-u_3)+G(u_1-u_3)=c\,\ell^{-1}\int_\Gamma\ln r(x,s)\,ds, \qquad /1.6/$$

которое невозможно в силу /1.5/, равенства $\pi+G(1)=0$ и того факта, что $\pi E+G$ удовлетворяет альтернативе Фредгольма. Действительно, уравнение /1.6/ имеет решение лишь для правой части, ортогональной единице. Поэтому $c=0$, $u_1-u_2=\mathrm{const}$ и, значит, $v_1=v_2$. Случай $p=0$ аналогичен. Лемма доказана.

Перейдем к дискретизации уравнения /1.3/, предполагая, что контур допускает разрыв кривизны. Пусть контур Γ разбит n точками на n отрезков длины $h=\ell n^{-1}$. Точки разбиения образуют равномерную сетку $\omega_h=\{t_i,\ i=0,1,\dots,n\}$, $t_0=t_n$. Приближенное решение $v_h(x)$, являющееся сеточной функцией $x\in\omega_h$, ищем в виде

$$Q_n v_h(x)=\sum_{i=0}^{n-1}v_i\,\phi_i(x),\quad x\in\Gamma,\quad v_h=\{v_i\}_{i=0}^{n-1},$$

где Q_n - оператор кусочно-линейного восполнения, а $\phi_i(x)$ - кусочно-линейные базисные функции:

$$\phi_i(t)=\begin{cases}(t-t_{i-1})\,h^{-1}, & t\in[t_{i-1},t_i],\\ (t_{i+1}-t)\,h^{-1}, & t\in[t_i,t_{i+1}],\\ 0, & t\notin[t_{i-1},t_{i+1}];\quad i=0,1,\dots,n-1,\ t_{-1}=t_{n-1}.\end{cases}$$

Уравнение для функции $v_h(x)$ строим по методу коллокации:

$$\alpha(t_i)u(t_i)+\int_\Gamma g(s)\,G(t_i,s)\,ds-\int_\Gamma\ln r(t_i,s)\,Q_n v_h(s)\,ds=0, \qquad /1.7/$$

где s - натуральный параметр на Γ. В матричной записи уравнение /1.7/ имеет вид

$$P_n L(Q_n v_h) = P_n f \qquad \text{или} \qquad A_h v_h = F. \qquad /1.8/$$

где P_n – оператор проектирования на сетку ω_h. При этом

$$A_h = (a_{ij}), \; i,j = 1,2,\dots,n; \; a_{ij} = \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \ln r(t_i, s)\phi_j(s)\,ds. \qquad /1.9/$$

Для контура с непрерывной кривизной $\alpha(t)=\pi$, в случае угловых точек функция $\alpha(t)$ терпит разрыв в этих точках. При этом нормальная производная в угловых точках, вообще говоря, также терпит разрыв. Однако предельные значения $\frac{\partial u}{\partial n}$ в угловой точке можно определить сразу по значениям $u(x)$ на Γ. Пусть, например, два прямолинейных отрезка Γ_{i-1} и Γ_i контура образуют внутренний угол α в точке $t_i \in \Gamma$. Тогда справедливы формулы

$$\lim_{t\to t_i,\, t\in\Gamma_i} \frac{\partial}{\partial n} u(t) = \frac{-1}{\sin\alpha}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\Gamma_{i-1}} + \cos\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\Gamma_i}\right)_{t=t_i},$$

$$\lim_{t\to t_i,\, t\in\Gamma_{i-1}} \frac{\partial}{\partial n} u(t) = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\Gamma_i} + \cos\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\Gamma_{i-1}}\right)_{t=t_i}.$$

Таким образом, значения функции $v(s)$ в угловых точках можно считать заданными и уравнения /1.7/ в угловых точках исключаются.

2. СВОЙСТВА МАТРИЦЫ A_h

В то время как оператор L не имеет ограниченного обратного, следует ожидать, что и матрица A_h, аппроксимирующая L, плохо обусловлена. При этом существенной является асимптотика минимального по модулю собственного значения матрицы A_h при $h \to 0$. Численные расчеты величины $\min|\lambda_i^h|$ для различных контуров приведены в табл. 1. Видно, что имеет место оценка

$$c_2 h \ge \min_i |\lambda_i^h| \ge c_1 h, \; c_3 \le \lambda_i^h < 0, \qquad /2.1/$$

где c_1, c_2, c_3 не зависят от h. Численные расчеты также показывают, что все нормированные в L_2 собственные функции v_i^h, $i = 1,2,\dots,n$, равномерно по h ограничены. Оценку сверху для $\min|\lambda_i^h|$ можно строго обосновать для окружности.

Лемма 2. Пусть контур Γ есть окружность радиуса $R \le \frac{1}{2}$. Тогда при достаточно малом h выполнена оценка

$$\min_i |\lambda_i^h| \le ch.$$

Доказательство. Пусть $n=4p$. Матрица A_h для окружности имеет циклическую структуру:

$$A_h = \begin{pmatrix} a_1 a_2 \dots a_n \\ a_n a_1 a_2 \dots a_{n-1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_2 a_3 \dots a_n a_1 \end{pmatrix}, \qquad a_i = a_{n+2-i}, \; i = 2,\dots,n, \qquad /2.2/$$

$$a_i = \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \ln r(t_0, s)\,\phi_i(s)\,ds = \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \ln\left|\sin\frac{s}{2}\right| \phi_i(s)\,ds,$$

где s – длина дуги $[t_0, s]$. Для собственных чисел матрицы справедливо представление

$$\lambda_k = \sum_{i=1}^{n} a_i \epsilon_k^{i-1}, \qquad k = 0,1,\dots,n-1, \qquad /2.3/$$

где $\epsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$. В силу симметричности матрицы A_h все λ_k вещественны. Числа a_i отрицательны и монотонно возрастают $|a_1| > |a_2| > \dots > |a_{2p}|$. Рассмотрим собственное число

$$\lambda_{2p} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{n-1} - a_n. \qquad /2.4/$$

Преобразуем выражение /2.4/ для λ_{2p}. Имеем

$$a_i - a_{i+1} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \ln\left|\sin\frac{s}{2}\right| \phi_i(s)\,ds - \int_{x_i}^{x_{i+2}} \ln\left|\sin\frac{s}{2}\right| \phi_{i+1}(s)\,ds = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+2}} \ln\left|\sin\frac{s}{2}\right| \Psi(s)\,ds,$$

где $\Psi(s) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\phi_i(s)$. Поэтому в силу симметрии справедлива формула

$$\lambda_{2p} = 2\int_0^{\pi} \ln\left|\sin\frac{s}{2}\right| \Psi(s)\,ds = 4\int_0^{\pi/4} \ln|\sin\alpha|\,\Psi(2\alpha)\,d\alpha. \qquad /2.5/$$

Выражение /2.5/ представим в виде

$$\lambda_{2p} = \sum_{i=1}^{p} \Phi_i,$$

где

$$\Phi_1 = \int_0^{2h}\left(1 - \frac{\alpha}{h}\right)\ln|\sin\alpha|\,d\alpha + \int_{2h}^{4h}\left(\frac{\alpha}{h} - 3\right)\ln|\sin\alpha|\,d\alpha,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad /2.6/$$

$$\Phi_i = \int_{(4i-4)h}^{(4i-2)h}\left(4i - 3 - \frac{\alpha}{h}\right)\ln|\sin\alpha|\,d\alpha + \int_{(4i-2)h}^{4ih}(\alpha/h - 4p + 1)\ln|\sin\alpha|\,d\alpha,$$

$$i = 1,\dots,p.$$

Далее воспользуемся представлением /6/

$$\ln|\sin x| = \ln|x| - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \dots - \frac{2^{2n-1}B_n x^{2n}}{n(2n)!} - \dots, \qquad /2.7/$$

где $x^2<\pi^2$, а B_n - числа Бернулли. Затем в выражения для Φ_i подставим разложение /2.7/. Тогда для интегралов Φ_i из /2.6/ с весом $\ln|x|$, которые обозначим через Φ_i', нетрудно получить равенства

$$\Phi_1' = -ch, \quad c>0; \quad \Phi_m' = [-\frac{1}{12m^2}+O(m^{-3})]h, \quad m\ge 2.$$

При этом все $\Phi_i'<0$ и $\sum_{i=1}^{p} \Phi_i' < -ch$, где c не зависит от h. Оценим вклад от оставшейся суммы в /2.7/. Справедливо равенство

$$\frac{1}{6} \int_{4(i-1)h}^{4ih} \Psi(a)\cdot a^2\, da = -\frac{4}{9} h^3.$$

Аналогичные равенства справедливы для других слагаемых из /2.7/. В итоге

$$\lambda_{2p} = -ch + \sum_{i=1}^{p} d_i h^3 \le -ch + O(h^2).$$

В силу сходимости ряда $\sum_m m^{-2}$ справедлива и оценка сверху для $|\lambda_{2p}|$. Лемма доказана.

Отметим также очевидную оценку $|\lambda^h|\le c$, где c не зависит от h. Численные расчеты показывают, что

$$\max_i |\lambda_i^h| = \lambda^* + q_1 h^2 + O(h^3),$$

где λ^* и q_1 не зависят от h. Это представление позволяет эффективно находить величину $\max_i|\lambda_i^h|$, являющуюся основным параметром итерационных процессов.[1]

Отметим еще, что для гладкого контура матрица A_h "почти" симметрическая:

$$A_h = B + C, \quad B = B^*, \quad \|C\| \le ch^2,$$

в чем легко убедиться. В случае окружности $C\equiv 0$.

3. СХОДИМОСТЬ И ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Прежде всего приведем некоторые формулы, определяющие свойства интеграла типа /1.3/ и интеграла типа интеграла Коши. Для контура с непрерывной кривизной справедлива формула интегрирования по частям [5]:

$$S\phi \equiv \int_\Gamma \frac{\phi(r)}{r-t}\,dr = i\pi\phi(t) - \int_\Gamma \phi'(r)\ln(r-t)\,dr, \qquad /3.1/$$

где r, t - комплексные координаты точек контура. Выделяя действительную часть из /3.1/, приходим к формуле

$$\int_\Gamma v(s)\ln r(x,s)\,ds = -\int_\Gamma g(s)\frac{dr}{r} \equiv Ig, \quad g(s)=\int_0^s v(t)\,dt, \qquad /3.2/$$

для функций $v(s)$, таких, что $\int_\Gamma v(s)\,ds=0$. При этом интеграл в /3. понимается в смысле главного значения, а его свойства гладкости совпадают с соответствующими для интеграла типа интеграла Коши. Таким образом, оператор I из /3.2/ отражает $L_2(\Gamma)\to L_2(\Gamma)$ и $H^\alpha(\Gamma)\to H^\alpha(\Gamma)$, $0<\alpha<1$, и ограничен в каждом из этих пространств [5]. Кроме того, справедлива формула дифференцирования особого интеграла [5]:

$$\Big(\int_\Gamma v(s)\frac{dr}{r}\Big)^{(m)} = \int_\Gamma v^{(m)}(s)\frac{dr}{r}, \qquad /3.3/$$

из которой вытекает соответствующая формула дифференцирования интеграла /1.3/. В частности, для окружности $R=1$ формула /3.2/ принимает вид [5]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{ds}\ln\Big[\sin^2\frac{s-t}{2}\Big]ds = -\int_{-\pi}^{\pi}\phi(s)\,\mathrm{ctg}\frac{s-t}{2}\,ds,$$

а формула /3.3/ превращается в следующую:

$$v(x) = \int_{-\pi}^{\pi} u(s)\,\mathrm{ctg}\frac{x-s}{2}\,ds; \quad v^{(m)}(x) = \int_{-\pi}^{\pi}u^{(m)}(s)\,\mathrm{ctg}\frac{x-s}{2}\,ds.$$

Из /3.3/ следует, что оператор I отображает $H^{m+\alpha}$ в $H^{m+\alpha}$ и ограни чен. Отметим также одно важное представление оператора /1.3/ с логарифмическим ядром.

Пусть ℓ - длина контура, s - натуральный параметр на Γ, а $z(s)$, $0\le s\le \ell$, - параметрическое уравнение Γ, где $z(s)$ непрерывно дифференцируема. Тогда справедливо представление

$$\ln r(x,s) = \ln|x-s| + \Phi(x,s), \quad x,s\in\Gamma, \qquad /3.4/$$

где $\Phi(x,s)$ непрерывно дифференцируема по x и s. Действительно, в силу равенства

$$z(s)-z(x) = (s-x)\int_0^1 z'(x+t(s-x))\,dt$$

можно написать

$$\ln|z(s)-z(x)| = \ln|s-x| + \ln\Big|\int_0^1 z'(x+t(s-x))\,dt\Big|,$$

где второе слагаемое имеет ту же гладкость по s и x, что и функ ция $z(s)$.

В случае окружности $R=1$ представление /3.4/ имеет вид

$$\ln r(x,s) = \ln\Big|2\sin\frac{x-s}{2}\Big| = \ln|x-s| - \Phi(x-s),$$

где функция $\Phi(y)$ бесконечно дифференцируема и определяется согласно формуле /2.7/.

Рассмотрим приближенное решение v_h, которое определяется из уравнения /1.7/. Если точное значение нормальной производной обозначить через $v=\frac{\partial}{\partial n}u(s)$, то /1.7/ можно переписать в виде

$$\int_\Gamma \ln r(x_n, s) Q_n v_h(s)\, ds = \int_\Gamma \ln r(x_n, s) v(s)\, ds \qquad /3.5/$$

или $A_h v_h = P_n A v$.

Поэтому /3.5/ приводится к виду

$$A_h(v_h - Q_n P_n v) = P_n A(v - Q_n P_n v) =$$

$$= \int_\Gamma \ln r(x_n, s) \left(\sum_{k=2}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{v^{(k)}(x_j)}{k!} t(h^{k-1} - t^{k-1}) \right) ds + O(h^m) \equiv \qquad /3.6/$$

$$\equiv \int_\Gamma \ln r(x_n, s)(\phi_1(h, s) + \phi_2(h, s) + \ldots)\, ds + O(h^m),$$

$$0 \le t \le h, \quad t = s - x_j, \quad s \in [x_j, x_{j+1}],$$

если решение $v(x) \in C^m(\Gamma), m \geq 4$. Сумма под интегралом в /3.6/ есть разложение разности между функцией $v(x)$ и ее кусочно-линейным представлением $Q_n P_n v$.

Теорема. Пусть на контуре Γ с непрерывной кривизной решение $v(x) = \frac{\partial}{\partial n} u^*(x) \in C^4(\Gamma)$ и выполнено условие /1.5/ однозначной разрешимости уравнения /1.3/. Пусть: А/ для собственных чисел λ_i^h матрицы A_h из /1.8/ справедлива оценка /2.1/, а собственные функции ограничены равномерно по h; Б/ оператор I из /3.2/ имеет ограниченный обратный I^{-1} в каждом из пространств $L_2(\Gamma)$, $H^\alpha(\Gamma)$. Тогда решение v_h сходится к $v(x)$ со скоростью

$$|v_h - P_n v| \le c h^{2-\epsilon}, \quad \epsilon > 0, \qquad /3.7/$$

а для искомой функции $u_h(x)$, $x \in \bar{G}$, определенной по формуле

$$\alpha u_h(x) + \int_\Gamma G(x, s) u^*(s)\, ds + \int_\Gamma \ln r(x, s) Q_n v_h(s)\, ds = 0, \qquad /3.7'/$$

справедлива оценка

$$|u_h(x) - u^*(x)| \le c h^{3-\epsilon}, \quad \epsilon > 0, \quad x \in \bar{G}. \qquad /3.8/$$

Для решений v_h и $v_{h/2}$ имеет место формула

$$A_{h/2}\left[\frac{1}{3}(4(Q_{2n} v_{h/2} - Q_{2n} P_{2n} v) - (Q_n v_h - Q_n P_n v))\right] = \eta(x), \qquad /3.9/$$

$$x \in \omega_{h/2}, \quad |\eta(x)| \le c h^{3-\epsilon}.$$

Во всех случаях $\epsilon>0$ – сколь угодно малое число.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\Psi_1(x_n, h) = \int_\Gamma \ln r(x_n, s) \sum_{i=1}^{n} \frac{v''(x_i)}{2} t(h-t)\, ds, \qquad /3.10/$$

где $t = s - x_i$, $s \in [x_i, x_{i+1}]$. Эта функция дает вклад в правую часть /3.6/ порядка $O(h^2)$. Поскольку

$$\frac{v''(x_i)}{2} \int_0^h t(h-t)\, dt = \frac{v''(x_i)}{12} h^3, \qquad /3.11/$$

то

$$\int_\Gamma \ln r(x_n, s)(Q_n v_h - Q_n P_n v)\, ds = \int_\Gamma \Big(\delta(s) + \frac{v''(s)}{12} h^2 +$$

$$+ \sum_i \frac{t h^2}{12} v^{(3)}(x_i) + \sum_i \frac{v^{(3)}(x_i)}{3!} t(h^2 - t^2) + O(h^4)\Big) \ln r(x_n, s)\, ds, \qquad /3.12/$$

где

$$\delta(s) = \sum_{x_i \in \omega_h} \frac{v''(x_i)}{2} t(h-t) - \frac{v''(x_i)}{12} h^2, \quad t = s - x_i.$$

План доказательства основан на разложении /3.12/: устанавливаем, что: а/ три последних слагаемых под интегралом в /3.12/ дают вклад в величину $\Delta_h = Q_n v_h - Q_n P_n v$ порядка $O(h^{3-\epsilon})$; б/ функция $\frac{v''(s)}{12} h^2$ с учетом условия $v \in C^4(\Gamma)$ заменяется кусочно-линейной с точностью до $O(h^4)$; в/ интеграл от первого слагаемого экстраполируется на двух сетках по формуле /3.9/ и оценивается результат экстраполяции.

Сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма 3. Пусть для функции $\Delta(s)$ и $u(s) \in C^2(\Gamma)$ выполнено равенство

$$\int_\Gamma \ln r(x_n, s) Q_n \Delta(s)\, ds = \int_\Gamma \ln r(x_n, s) \sum_{x_i \in \omega_h} u(x_i) t(h-t)\, ds, \quad x_n \in \omega_h, \qquad /3.13/$$

тогда

$$|Q_n \Delta(s)| \le c h^{2-\epsilon}, \quad \epsilon > 0. \qquad /3.14/$$

Если

$$\int_\Gamma \ln r(x_n, s) Q_n \Delta(s)\, ds = \int_\Gamma \ln r(x_n, s) \Phi(s)\, ds, \qquad /3.15/$$

где функция $\Phi(s)$ непрерывна на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ и ограничена величиной $|\Phi(s)| \le c h^3$, то

$$|Q_n \Delta(s)| \le c h^{3-\epsilon}. \qquad /3.16/$$

Доказательство. Оценка /3.14/ получается, если для правой части /3.13/ использовать представление /3.12/, где в оценке нуждается лишь интеграл

$$\int_\Gamma \ln r(x_n,s)\,\delta(s)\,ds;\quad \delta(s)=\sum_{x_i\in\omega_h}\Big(u(x_i)\,t(h-t)-\frac{u(x_i)}{6}h^2\Big).$$

Легко видеть, что

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\delta(s)\,ds=0;\qquad \int_\Gamma\delta(s)\,ds=0.$$

Теперь формула интегрирования по частям /3.2/ дает

$$\int_\Gamma \delta(s)\ln r(x_n,s)\,ds=-\int_\Gamma g(s)\frac{dr}{r}\equiv Ig,$$

$$g(s)=\int_0^s\delta(\tau)\,d\tau=\frac{u(x_i)}{6}t(t-h)\Big(\frac h2-t\Big),\ t=s-x_i\in[x_i,x_{i+1}].$$

Если заменить $u(x_i)$ на $u(s)$, то новая функция $\bar g(s)$ будет иметь непрерывную производную на Γ, так как $\bar g'(0)=-\frac{h^2}{6}=\bar g'(h)$, $\bar g''(s)$ терпит разрыв первого рода. В результате такого сглаживания $g(s)$ изменится на величину $O(h^4)$. Так как $\|g\|_{H^\alpha}\le ch^{3-\alpha}$, то $|Ig|\le ch^{3-\alpha}$. В итоге получаем

$$\Big|\int_\Gamma\delta(s)\ln r(x_n,s)\,ds\Big|\le ch^{3-\alpha},\quad \alpha>0,$$

после чего неравенство /3.14/ получается из /3.12/ и условия А теоремы. Действительно, если

$$A_h\Delta=\sum_{i=1}^n a_i v_i^h,\quad \Big(\sum a_i^2\Big)^{1/2}\le h^{3-\alpha},$$

то

$$|\Delta|=\Big|\sum a_i\lambda_i^{-1}v_i^h\Big|\le c\cdot\max_i|v_i^h|\cdot h^{-1}\sum|a_i|\le$$

$$\le ch^{-1}\cdot h^{3-\alpha}=ch^{2-\alpha},\qquad \sum|a_i|\le c\Big(\sum a_i^2\Big)^{1/2}.$$

Чтобы получить оценку /3.16/, построим по функции $\Phi(s)$ функцию $\delta(s)=\Phi(s)-Q_n\,\sigma_h(s)$, так что

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\delta(s)\,ds=0,\quad i=1,2,\dots,n,$$

а $Q_n\sigma_h$ непрерывна. Это можно сделать, так как вектор $\sigma_h=/\sigma_1,\dots,\sigma_n/$ определяется из уравнения

$$B\sigma_h=b,\qquad |b|\le ch^3,\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&&&0\\&1&1&&\\&&1&1&\\&0&&\ddots&\ddots\\1&&&&1\end{pmatrix},$$

которое однозначно разрешимо при нечетном n. Если $n=2k$, то вектор b представим в виде $b=b_1+\eta$, $(b_1\eta)=0$, где $\eta=(1,-1,1,-1,\dots,-1)$, то есть является собственной функцией с нулевым собственным значением. При этом уравнение $B\sigma_h=b_1$ однозначно разрешимо, а $|Q_n\sigma_h|\le ch^3$. Далее к функции $\delta(s)$ применяем преобразование как в первой части леммы, только порядок h во всех оценках будет на единицу больше. Лемма доказана.

Итак, из представления /3.12/, условия А и леммы 3 следует оценка /3.7/.

Для доказательства /3.8/ вычтем из уравнения /1.2/ для функции $u^*(s)$ равенство /3.7'/ в точках контура, после чего с учетом /3.5/ получим соотношение

$$\Psi(x)\equiv u_h(x)-u^*(x)=\int_\Gamma \ln r(x,s)\Big(Q_n v_h-\frac{\partial}{\partial n}u^*(s)\Big)ds,$$

из которого в силу /3.5/ следует

$$\Psi(x_n)=0,\quad x_n\in\omega_h.$$

Представим $\Psi(x)$ в виде

$$\Psi(x)=\int_\Gamma\Big(Q_nP_n\frac{\partial}{\partial n}u^*-\frac{\partial}{\partial n}u^*\Big)\ln r(x,s)\,ds+\int_\Gamma\Big(Q_nv_h-Q_nP_n\frac{\partial}{\partial n}u^*\Big)\ln r(x,s)\,ds.$$

Используя формулы /3.2/, /3.3/ и оценку /3.7/, замечаем, что оба слагаемых, а следовательно, и функция $\Psi(x)$, имеют производные, ограниченные величиной $c\cdot h^{2-\epsilon}$. Поэтому

$$\Psi(x)=\alpha\Psi(x_n)+\beta\Psi(x_{n+1})+\Psi'(\theta)h;\quad x,\theta\in[x_n,x_{n+1}],$$

откуда следует оценка

$$|\Psi(x)|\le ch^{3-\epsilon},\quad x\in\Gamma.$$

Но функция $u_h(x)$, $x\in\bar G$, гармоническая, поэтому /3.8/ следует из принципа максимума. Установим равенство /3.9/. Наряду с /3.11/ справедливы соотношения

$$\int_0^h t^2(h-t)\,dt=\frac{h^4}{12};$$

$$\int_0^{h/2}t^2\Big(\frac h2-t\Big)dt+\int_0^{h/2}t\Big(\frac h2-t\Big)\Big(\frac h2+t\Big)dt=\frac14\cdot\frac{h^4}{12}.$$

Поэтому для функций $\phi_1(h,s)$ и $\phi_1(h/2,s)$ из /3.6/ выполнено

$$\int_0^h(a+bt)\Big(\phi_1(h,t)-4\phi_1\Big(\frac h2,t\Big)\Big)dt=0 \qquad /3.17/$$

при всех a и b. В выражении

$$\Psi_1(x_n,h)-4\Psi_1\Big(x_n,\frac h2\Big) \qquad /3.18/$$

интеграл по области $|x_n-s|\ge c$, где c не зависит от h, оценивается следующим образом:

$$\Big|\sum_{x_i\in\omega_n,\ |x_i-x_n|\ge c}\frac{1}{2}v''(x_i)\int_0^h t^3(h-t)\,dt\Big|\le c\max|v''(x)|\cdot h^4, \qquad /3.19/$$

и в силу условия А не вносит вклада в главную часть погрешности решения v_h. Из формул /3.17/, /3.19/ также следует, что добавление к $\ln r(x_n,s)$ в выражении для $\Psi_1(x_n,h)$ из /3.10/ непрерывно дифференцируемой функции параметра s вносит вклад в правую часть порядка $O(h^4)$ и поэтому не влияет на оценку погрешности. Рассмотрим далее часть контура в окрестности точки x_n, то есть $|x_n-s|\le M<1$. В силу условия В теоремы и предыдущего замечания изучение величины $\Psi_1(x_n,h)$ сводится к рассмотрению интегралов вида

$$I_k(h)=\int_0^h t(h-t)\ln(t+kh)\,dt,\quad k\ge 0,\quad (1+k)h\le M<1. \qquad /3.20/$$

При $k=0$ получим

$$I_0(h)=\int_0^h \ln t\cdot t(h-t)\,dt=\frac{h^3}{6}\Big(\ln h-\frac{5}{6}\Big),$$

$$I_1(h)=h^3\Big(-\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{6}\ln h+\frac{19}{36}\Big),$$

$$I_0\Big(\frac{h}{2}\Big)+I_1\Big(\frac{h}{2}\Big)=\frac{h^3}{8}\Big(\frac{1}{6}\ln h-\frac{\ln 2}{6}-\frac{5}{36}\Big)+\frac{h^3}{8}\Big(\frac{\ln h}{6}-\frac{5}{6}\ln 2+\frac{19}{36}\Big)=$$

$$=\frac{h^3}{4}\Big(\frac{\ln h}{6}+\frac{1}{2}\Big(-\ln 2+\frac{7}{18}\Big)\Big).$$

Так как $0{,}5(-\ln 2+7/18)\simeq-5{,}6/36$, то экстраполяция по формуле /3.18/ для первого слагаемого дает

$$\frac{1}{3}\Big[I_0(h)-4\Big(I_1\Big(\frac{h}{2}\Big)+I_0\Big(\frac{h}{2}\Big)\Big)\Big]\simeq\frac{1}{3}\cdot\frac{0{,}6}{36}h^3=\frac{h^3}{180},$$

что указывает на значительное уменьшение коэффициента при h^3. Проведем теперь экстраполяцию для $k\ge 1$. Справедлива формула

$$I_k(h)=h^3\Big(-\frac{k^2(3+2k)}{6}\ln\Big(1+\frac{1}{k}\Big)+\frac{1}{6}\ln(k+1)h+\frac{1}{3}k^2+\frac{1}{3}k-\frac{5}{36}\Big), \qquad /3.21/$$

$$k\ge 1.$$

Разлагая в ряд первое слагаемое из /3.21/, получим

$$I_k(h)=h^3\Big(\frac{1}{6}\ln(k+1)h+\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k^n}c_n\Big), \qquad /3.22/$$

где $c_n=\dfrac{n+5}{(n+2)(n+3)}$. В силу /3.22/ имеем

$$I_{2k}\Big(\frac{h}{2}\Big)=\frac{h^3}{8}\Big(\frac{1}{6}\ln\Big(k+\frac{1}{2}\Big)h+\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2k)^n}c_n\Big),$$

$$I_{2k+1}\Big(\frac{h}{2}\Big)=\frac{h^3}{8}\Big(\frac{1}{6}\ln(k+1)h+\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2k+1)^n}c_n\Big);$$

откуда получаем результат экстраполяции:

$$\frac{1}{3}\Big(4\Big(I_{2k}\Big(\frac{h}{2}\Big)+I_{2k+1}\Big(\frac{h}{2}\Big)\Big)-I_k(h)\Big)=$$

$$=\frac{h^3}{3}\Big[\frac{1}{12}\Big(\ln(k+1)\Big(k+\frac{1}{2}\Big)h^2-\ln(k+1)^2h^2\Big)+$$

$$+\frac{1}{12}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n\Big(\frac{1}{(2k)^n}+\frac{1}{(2k+1)^n}-\frac{2}{k^n}\Big)\Big]= \qquad /3.23/$$

$$=\frac{h^3}{36}\ln\Big(1-\frac{1}{2(k+1)}\Big)+\frac{h^3}{36}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n\Big(\frac{1}{(2k)^n}+\frac{1}{(2k+1)^n}-\frac{2}{k^n}\Big)=$$

$$=\frac{h^3}{36}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n S_n(k);\quad S_n(k)=\frac{1}{(2k+2)^n}+c_n\Big(\frac{1}{(2k)^n}+\frac{1}{(2k+1)^n}-\frac{2}{k^n}\Big).$$

Этот ряд сходится при $k\ge 1$. При этом его можно переписать в виде

$$\frac{h^3}{36}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{k^n};\quad a_2=-\frac{9}{10},\quad a_n\simeq(-1)^{n+1}\frac{2}{n},\quad n\to\infty.$$

Таким образом, ряд /3.23/ начинается с члена второго порядка относительно k^{-1}. Поэтому интересующий нас интеграл

$$I(x_p)=\frac{1}{3}\int_{x_p-M}^{x_p+M}\ln r(x_p,s)\Big(4\phi_1\Big(s,\frac{h}{2}\Big)-\phi_1(s,h)\Big)\,ds$$

сводится к виду

$$I(x_p)=\frac{h^3}{36}\Big[\sum_{k=-n_0,\ k\ne 0}^{n_0}\frac{v''(x_p+kh)}{2}\,\frac{1}{k^2}\big(a_2+\Phi(|k|)\big)+c_0\frac{v''(x_p)}{2}\Big],$$

где $n_0h=M$, $|\Phi(k)|\le ck^{-1}$. Выберем число M так, чтобы участок контура $[x_p-M,x_p+M]$ был единственным пересечением кривой Γ с кругом $|x-x_p|\le M$. Тогда для $I(x_p)$ получим представление

$$I(x_p)=\frac{h^3}{36}\Big[c_0\frac{v''(x_p)}{2}+\sum_{k=1}^{n_0}\frac{v''(x_p+kh)+v''(x_p-kh)}{2}\,\frac{1}{k^2}\big(a_2+\Phi(k)\big)\Big]=$$

$$=\frac{h^3}{36}\Big[c_0\frac{v''(x_p)}{2}+\sum_{k=1}^{n_0}\big(v''(x_p)+k^2h^2v^{(4)}(x_p)+k^2O(h^2)\big)\frac{a_2+\Phi(k)}{k^2}\Big]=$$

$$=\frac{h^3}{36}\Big[c_0\frac{v''(x_p)}{2}+v''(x_p)\sum_{k=1}^{n_0}\frac{a_2+\Phi(k)}{k^2}+ \qquad /3.24/$$

$$+\big(h^2v^{(4)}(x_p)+O(h^2)\big)\sum_{k=1}^{n_0}\big(a_2+\Phi(k)\big)\Big]=\frac{h^3}{36}\big[c_0'v''(x_p)+Mhv^{(4)}(x_p)+O(h)\big].$$

Если существует $v^{(6)}(x_p)$, то остаточный член будет $O(h^2)$. Теперь отбросим остаточный член в /3.24/, ибо он есть $O(h^4)$, а функцию $I(x_p)$ непрерывно продолжим на весь контур по формуле

$$I(x) = \frac{h^3}{36} c_0' v''(x) + O(h^4),$$

так что для $I(x)$ справедливо представление

$$I(x) = h^3 \int_\Gamma \ln r(x,s)\, \tilde{v}(s)\, ds, \quad \tilde{v}(s) \in C^1(\Gamma), \qquad /3.25/$$

которое возможно в силу свойства $\int_\Gamma I(x)\, dx = 0$.

Далее определим следующие функции:

$$\Phi(x,h) = \int_\Gamma \ln r(x,s)\, Q_n \Delta_h(s)\, ds,$$
$$\Phi\left(x,\frac{h}{2}\right) = \int_\Gamma \ln r(x,s)\, Q_{2n} \Delta_{h/2}(s)\, ds, \qquad /3.26/$$

где кусочно-линейные функции $Q_n \Delta_h$ и $Q_{2n}\Delta_{h/2}$ определены равенствами

$$\int_\Gamma \ln r(x_n,s)\, Q_n \Delta_h(s)\, ds = \Psi_1(x_n,h), \quad x_n \in \omega_h,$$
$$\int_\Gamma \ln r(x_n,s)\, Q_{2n} \Delta_{h/2}(s)\, ds = \Psi_1\left(x_n,\frac{h}{2}\right), \quad x_n \in \omega_{h/2},$$

откуда с учетом /3.26/ получаем

$$\Phi(x_n,h) = \Psi_1(x_n,h), \quad \Phi\left(x_{2n},\frac{h}{2}\right) = \Psi_1\left(x_{2n},\frac{h}{2}\right),$$
$$x_n \in \omega_h, \quad x_{2n} \in \omega_{h/2}. \qquad /3.27/$$

Представление /3.25/ означает, что для функций $\Psi_1(x,h)$ и $\Psi_1(x, \frac{h}{2})$, определенных из /3.10/, выполнено соотношение

$$\Psi_1(x,h) - 4\Psi_1\left(x,\frac{h}{2}\right) = h^3 I(x) + O(h^4). \qquad /3.28/$$

Здесь пользуемся формулами /3.2/, /3.3/, выкладками леммы 3 и получающейся при этом оценкой $|\Psi_1'(x,h)| \le ch^{2-\epsilon}$. Аналогичная оценка справедлива и для функций $\Phi'(x,h)$ и $\Phi'(x,\frac{h}{2})$, если учесть оценки $|Q_n\Delta_h| \le ch^{2-\epsilon}$, $|Q_{2n}\Delta_{h/2}| \le ch^{2-\epsilon}$. Теперь можно написать

$$\int_\Gamma \ln r(x,s)\,(Q_n\Delta_h - 4Q_{2n}\Delta_{h/2})\,ds = \Psi_1(x,h) - 4\Psi_1\left(x,\frac{h}{2}\right) +$$
$$+ \Phi(x,h) - \Psi_1(x,h) - 4\left(\Phi\left(x,\frac{h}{2}\right) - \Psi_1\left(x,\frac{h}{2}\right)\right),$$

откуда, учитывая оценки для производных Ψ_1' и Φ', равенства /3.27/ и /3.28/, получаем

$$\int_\Gamma \ln r(x,s)\,(Q_n\Delta_h - 4Q_{2n}\Delta_{h/2})\,ds = h^3 I(x) + O(h^4) + h^{3-\epsilon}\mathcal{E}(\theta), \qquad /3.29/$$
$$\theta \in [x_n, x_{n+1}], \quad x \in \Gamma,$$

где функция $\mathcal{E}(\theta)$ непрерывна и строится на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$ с помощью равенства

$$\Phi(x_n+\delta) - \Phi(x_n) = \delta \int_0^1 \Phi'(x_n + t\delta)\,dt.$$

Таким образом, для решения уравнения /3.29/ получаем оценку

$$\left|\int_\Gamma \ln r(x_n,s)(Q_n\Delta_h - 4Q_{2n}\Delta_{h/2})\,ds\right| \le ch^{3-\epsilon}, \quad \epsilon > 0,$$

которая эквивалентна

$$A_{h/2}(Q_n\Delta_h - 4Q_{2n}\Delta_{h/2}) = \eta_{2n}, \quad |\eta_{2n}| \le ch^{3-\epsilon}.$$

Из последней оценки следует /3.9/, так как экстраполяция оставшихся компонент, кроме Δ_h и $\Delta_{h/2}$, в выражении /3.9/ дает вклад в правую часть этого выражения порядка $ch^{3-\epsilon} A_{h/2} z_{h/2}$, $|z_{h/2}| \le c$, что следует из /3.12/ и леммы 3. Теорема доказана.

Заметим, что функции $Q_{2n}P_{2n}v$ и Q_nP_nv совпадают одновременно с точным решением $v(x)$ лишь в точках сетки ω_h, а потому уточнение по формуле /3.9/ возможно лишь в точках $x_n^* \in \omega_h$. При этом в силу условия А теоремы из /3.9/, вообще говоря, не следует, что выражение

$$\frac{1}{3}[4(Q_{2n}v_{h/2} - Q_{2n}P_{2n}v) - (Q_nv_h - Q_nP_nv)] \qquad /3.30/$$

имеет порядок $O(h^{3-\epsilon})$ в метрике С. Однако такой вывод можно сделать для "гладких" компонент этого выражения, то есть для таких, что $|\lambda_i^h| \ge c_0$, где c_0 не зависит от $h \to 0$. Выбирая c_0 достаточно малым и соответственно уменьшая h, можно добиться уточнения сколь угодно большой по номеру собственной функции матрицы $A_{h/2}$, содержащейся в выражении /3.30/.

Численные примеры иллюстрируют эффективность экстраполяции типа экстраполяции Ричардсона на двух /формула /3.30// и более сетках. Поэтому можно предположить, что для достаточного гладкого решения $v(x)$ имеет место представление

$$\sum_{i=1}^{k_0} a_i P_{n_i} v_{h_i} = P_{n_1} v + \gamma_h, \quad x \in \omega_{h_1}, \quad |\gamma_h| \le ch^{k_0+1-\epsilon}, \qquad /3.31/$$

которым мы и пользуемся ниже, в п. 4.

Кроме того, оценка /3.8/ позволяет предположить, что имеет место разложение

$$u_h(x) = u^*(x) + \sum_{i=0}^{n_0} c_i(x)\, h^{3+i} + O(h^{n_0+3}), \quad x \in \bar{G}, \qquad /3.32/$$

где $c_i(x)$ не зависят от h. Результаты уточнения решения $u_h(x)$ сразу во внутренних точках области приведены в табл. 3. Соответствующие коэффициенты экстраполяции можно найти в /7/.

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Ниже приводятся результаты численных экспериментов. В табл. 1 для прямоугольника $\bar{G}_1=\{0\le x\le 2; 0\le y\le 1\}$, трапецеидальной области $\bar{G}_2=\{0\le x,\ y\le 1\}\cup\{1\le x\le 2;\ 0\le y\le -x+2\}$ и L-образной области $\bar{G}_3=\{0\le x\le 2; 0\le y\le 1\}\cup\{0\le x\le 1;\ 1\le y\le 2\}$ – минимальные $(\min\limits_i|\lambda_i^h|)$ и максимальные $(\max\limits_i|\lambda_i^h|)$ по абсолютному значению собственные числа матрицы /1.9/ и для области $\bar{G}_1$ – величины $\max\limits_{i,j}|(v_i^h)_j|$ для нормированных на единицу в L_2 собственных функций v_i^h матрицы /1.9/. Заметим, что для области $\bar{G}_2$ сетка на стороне $y=-x+2 (1\le x\le 2)$ строилась равномерно с шагом $h\cdot\sqrt{2}$.

Для иллюстрации экстраполяции типа экстраполяции Ричардсона решалась задача Дирихле в прямоугольнике G_1, когда на границе области задан след функции $e^{\frac{\pi}{2}y}\sin\frac{\pi}{2}x$. В табл. 2 приводится результат экстраполяции приближенного значения нормальной производной на границе области по формуле /3.31/. Через $\Delta(h)$ обозначена погрешность приближенного решения на сетке ω_h с шагом h; $\Delta(h_1,\dots,h_k)$ – погрешность решения, экстраполированного по сеткам $\omega_{h_1},\dots,\omega_{h_k}$.

Экстраполяция приближенного решения внутри области содержится в табл. 3, там же приводится сравнение точности полученных решений с точностью конечно-разностного метода при аппроксимации оператора Лапласа пятиточечным шаблоном типа "крест". Погрешности относятся к точке области, в которой на квадратной сетке с шагом $h=0,2$ достигалась наибольшая погрешность решений, полученных методом ГИУ. В последней строке табл. 3 приводятся отношения соответствующих погрешностей метода ГИУ и конечно-разностного метода при одном и том же шаге дискретизации.

Приведем асимптотические оценки размерности массивов, необходимых для реализации двух методов с одинаковой точностью. Пусть область является прямоугольником со сторонами ℓ_1,ℓ_2; h – шаг сетки метода ГИУ; r – шаг квадратной сетки конечно-разностного метода. Для достижения точности $O(h^3)$ во втором методе должен выбираться шаг $r=h^{3/2}$, в этом случае матрица метода ГИУ будет иметь размерность $4(\ell_1+\ell_2)^2\cdot h^{-2}$, а массив неизвестных в конечно-разностном методе – $\ell_1\cdot\ell_2\cdot h^{-3}$, то есть при $h<\frac{\ell_1\cdot\ell_2}{4(\ell_1+\ell_2)^2}$ размерность массива, необходимого для реализации метода ГИУ, будет меньше. Таким образом, при достаточно малых h метод ГИУ требует меньшей памяти по сравнению с конечно-разностным методом для достижения одинаковой точности.

Таблица 1

h	$\bar{G}_1$			$\bar{G}_2$		$\bar{G}_3$	
	$\max\|(v_1^h)_j\|$	$\min\|\lambda_1^h\|$	$\max\|\lambda_1^h\|$	$\min\|\lambda_1^h\|$	$\max\|\lambda_1^h\|$	$\min\|\lambda_1^h\|$	$\max\|\lambda_1^h\|$
0,2	0,75	$1,76315\cdot10^{-1}$	2,81262	$1,76414\cdot10^{-1}$	2,6707	$1,76048\cdot10^{-1}$	3,45187
0,1	0,71	$0,85964\cdot10^{-1}$	3,11033	$0,85974\cdot10^{-1}$	2,91837	$0,85948\cdot10^{-1}$	3,72111
0,05	0,68	$0,42715\cdot10^{-1}$	3,26108	$0,42716\cdot10^{-1}$	3,04483	$0,42714\cdot10^{-1}$	3,85947

Таблица 2

Точка измерения погрешности	h	$\Delta(h)$	$\Delta(h,\frac{h}{2})$	$\Delta(h,\frac{h}{2},\frac{h}{4})$
$x=1,\ y=1$	0,2	$5,85715\cdot10^{-2}$	$5,92769\cdot10^{-4}$	$2,43009\cdot10^{-8}$
	0,1	$1,50874\cdot10^{-2}$	$7,62224\cdot10^{-5}$	
	0,05	$3,82903\cdot10^{-3}$		

Таблица 3

Точка измерения погрешностей	Метод	$\Delta(h)$ $h=0,2$	$\Delta(\frac{h}{2})$	$\Delta(\frac{h}{4})$	$\Delta(h,\frac{h}{2})$	$\Delta(\frac{h}{2},\frac{h}{4})$	$\Delta(h,\frac{h}{2},\frac{h}{4})$
$x=1,\ y=0,8$	ГИУ	$5,19211\cdot10^{-4}$	$6,40494\cdot10^{-5}$	$7,97186\cdot10^{-6}$	$9,73605\cdot10^{-7}$	$3,92228\cdot10^{-8}$	$2,30696\cdot10^{-8}$
	конечно-разностный метод	$7,18779\cdot10^{-3}$	$1,81524\cdot10^{-3}$	$4,54975\cdot10^{-4}$	$\Delta(\frac{h}{8})$	$\Delta(\frac{h}{16})$	
					$1,1383\cdot10^{-4}$	$2,8458\cdot10^{-5}$	
отношение погрешностей		0,072	0,035	0,017			

Авторы выражают благодарность Э.А.Айряну и П.Г.Акишину за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Риццо Ф. В сб.: Метод граничных интегральных уравнений. "Мир", М., 1978, с. 11-17.
2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Физматгиз, М., 1958, т.4.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. "Наука", М., 1972.
4. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. "Мир", М., 1979.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. "Наука", М., 1977.
6. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов. "Наука", М., 1978.
7. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. "Наука", М., 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 июня 1981 года.