сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

4501/2-81

7/9-81

11-81-395

+

П.Г.Акишин, Е.П.Жидков

НЕКОТОРЫЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИМПЛЕКСОВ

1981

В последнее время весьма популярным методом решения задач математической физики стал метод конечных элементов (МКЭ). Треугольник, тетраэдр и, в общем случае, симплекс - наиболее часто используемые типы "конечных" элементов, так как они хорошо описывают границу области, в которой решается задача. И в связи с этим при использовании МКЭ возникает проблема численного интегрирования по симплексам. Если для треугольника эта проблема решена /I-3/, то для симплексов и для тетраэдров, в частности, этот вопрос остается открытым. Наибольших успехов в этом направлении добились Хаммер, Строуд, Марлоу /3,4,5/. В /4/ выводятся кубатурные формулы второго и третьего порядков точности для симплексов, использующие минимальное количество узлов. В /5/ приводятся кубатурные формулы пятого порядка точности, но они не оптимальны, т.е. используют не минимальное число узлов. В /3/ приведены оптимальные кубатурные формулы для тетраэдров второго и третьего порядков точности. В настоящей работе выводятся оптимальные кубатурные формулы для симплексов четвертого порядка точности и оптимальные формулы четвертого, пятого, шестого и седьмого порядков для тетраэдров.

§ I. Кубатурные формулы для N-мерных симплексов, точные для полиномов четвертой степени

Следствием теоремы I из /3/ является тот факт, что если кубатурная формула точна для всех полиномов K-степени для какого-то N-мерного симплекса S, то формула, получаемая аффинным преобразованием T, будет также точна для всех полиномов K-степени для преобразованного симплекса $T(S)$; веса кубатурной формулы при этом умножаются на якобиан преобразования T. Таким образом, достаточно вывести кубатурную формулу для стандартного симплекса.

Рассмотрим N-мерный симплекс G с вершинами $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_{N+1}$. Пусть $\alpha_1(\bar{x}), \alpha_2(\bar{x}), \ldots, \alpha_{N+1}(\bar{x})$ - барицентрические координаты вектора $\bar{x} \in G$ $\left(\bar{x} = \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i \bar{P}_i,\ \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i = 1,\ 0 \le \alpha_i \le 1,\ i = \overline{1, N+1}\right)$, а $f(\alpha_1(\bar{x}), \alpha_2(\bar{x}), \ldots, \alpha_{N+1}(\bar{x}))$ - некоторый полином от $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N+1}$.

© 1981 Объединенный институт ядерных исследований Дубна

...ЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ...ДОВАНИЙ
БИБЛИОТЕКА

Интеграл

$$\mathcal{J}(f) = \int_G f(\alpha_1(\bar{x}), \alpha_2(\bar{x}), \ldots, \alpha_{N+1}(\bar{x}))\, dV_x$$

инвариантен относительно всевозможных перестановок барицентрических координат. Пусть $\hat{f}$ – сумма полиномов, полученных из f в результате всех $(N+1)!$ перестановок барицентрических координат.
Тогда очевидно, что

$$(N+1)!\, \mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(\hat{f}). \qquad (I)$$

Пусть далее

$$K(g) = \sum_{i=1}^{M} W_j\, g(\bar{x}_j) \quad –$$

симметрическая кубатурная формула с весами W_j и узлами $\bar{x}_j$. Ввиду симметрии она инвариантна относительно всевозможных перестановок барицентрических координат, и поэтому

$$(N+1)!\, K(f) = K(\hat{f}). \qquad (2)$$

Из (I), (2) следует: для того, чтобы формула была точна для всех полиномов степени не выше m, для симметрических формул достаточно, чтобы она была верна для всех симметрических полиномов степени не выше m.

Как известно из курса общей алгебры /6/, любой симметрический многочлен от нескольких переменных можно представить в виде комбинации элементарных симметрических многочленов:

$$\sigma_0(x_1, x_2, \ldots, x_N) \equiv 1, \quad \sigma_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i,$$

$$\sigma_2(x_1, x_2, \ldots x_N) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq j}}^{N} x_i x_j, \ \ldots, \ \sigma_N(x_1, \ldots, x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i.$$

Для удобства введем $\tilde{\alpha}_i(\bar{x}) = \alpha_i(\bar{x}) - \frac{1}{N+1}$.

Любой симметрический многочлен степени m от $\tilde{\alpha}_i(\bar{x})$ представляется в виде комбинации симметрических многочленов от $\alpha_i(\bar{x})$ степени не выше m и наоборот. Пусть $\mathcal{V}(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_{N+1})$ – N-мерный единичный симплекс $(N \geqslant 3)$,

$$\bar{P}_1 \longleftrightarrow (0, 0, \ldots, 0),$$
$$\bar{P}_2 \longleftrightarrow (1, 0, \ldots, 0),$$

$$\bar{P}_3 \longleftrightarrow (0, 1, 0, \ldots, 0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\bar{P}_{N+1} \longleftrightarrow (0, 0, 0, \ldots, 1).$$

Рассмотрим всевозможные комбинации элементарных симметрических полиномов степени не выше четырех. Так как сумма барицентрических координат тождественно равна I, то $\sigma_1(\tilde{\alpha}_1(\bar{x}), \tilde{\alpha}_2(\bar{x}), \ldots, \tilde{\alpha}_{N+1}(x)) \equiv 0$. В таблице I приведены комбинации всех элементарных симметрических многочленов суммарной степени не выше четырех и интегралы от них по симплексу $\mathcal{V}$.

Рассмотрим всевозможные группы точек, которые могут участвовать в кубатурной формуле. Пусть $\bar{X}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N+1})$ есть узел кубатурной формулы. В симметрическую кубатурную формулу обязаны входить все узлы, получаемые перестановкой координат α_i. В связи с этим все точки распадаются на следующие группы:

I. Все α_i равны между собой, а так как их сумма равна I, каждое $\alpha_i = \frac{1}{N+1}$. Эта группа состоит из $C^0_{N+1} = 1$ точек.

2. N координат α_i равны между собой и равны z, а $(N+1)$-я координата отлична от z и равна $(1-Nz)$. Эта группа состоит из $C^1_{N+1} = N+1$ точек.

3. $(N-1)$ координаты равны между собой и равны t, а N-я и $(N+1)$-я координаты равны y $\left(y = \frac{1-(N-1)}{2} \neq t\right)$. Число этих точек равно: $C^{N-1}_{N+1} = \frac{(N+1)N}{2}$.

4. $(N-1)$ координат равны между собой и равны p, N-я координата равна g, а $(N+1)$-я координата равна r $(p \neq g \neq r)$. Число этих точек равно: $2!\, C^2_{N+1} = N(N+1)$ и т.д.

Значение интеграла по симплексу $\mathcal{V}$ от каждого симметрического полинома из таблицы I должно равняться величине, получаемой по кубатурной формуле для этого полинома. Привлечение каждого набора точек из какой-либо группы позволяет разрешить дополнительно столько уравнений, сколько свободных параметров характеризуют данный набор. Для точки первой группы это один параметр – вес, с которым она входит в кубатурную формулу; для точек второй группы – значение z и вес; третьей группы – значение t и вес и т.д. Оптимизация заключается в том, чтобы при минимальном общем количестве точек удовлетворить всем возникающим уравнениям. Для того, чтобы общее количество было минимальным, необходимо использовать наборы точек с меньшим номером группы.

В этом параграфе мы ограничимся кубатурными формулами, состоящими из точек первых трех групп. В таблице 2 приведены значения элементарных симметрических многочленов для точек каждой группы. Из нее легко видеть, что при $\beta=\frac{(N-1)(N-2)}{2N(N+1)}$ полином $\sigma_4+\beta(\sigma_2)^2$ тождественно равен нулю на точках первой и второй групп, но интеграл от $\sigma_4+\beta(\sigma_2)^2$ по симплексу V не равен нулю. Поэтому для вывода симметрической формулы четвертого порядка точности необходимо привлекать точки третьей группы.

Пусть γ – вес, с которым участвует в кубатурной формуле точка первой группы, δ – точки второй группы, β – третьей группы.

Пусть $\tilde{z}=z-\frac{1}{N+1}$, $\tilde{t}=t-\frac{1}{N+1}$. Итоговая система уравнений выглядит следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\gamma+\delta(N+1) &&+\beta\frac{(N+1)N}{2} &&=\frac{1}{N!},\\
&-\delta\frac{(N+1)^2N}{2}\tilde{z}^2 &&-\beta\frac{(N+1)^2(N^2-N)}{8}\tilde{t}^2 &&=-\frac{N}{2(N+2)!},\\
&-\delta\frac{(N-1)N(N+1)^2}{3}\tilde{z}^3 &&-\beta\frac{(N^3-4N^2+3N)(N+1)^2}{24}\tilde{t}^3 &&=\frac{2(N^2-N)}{3(N+1)(N+3)!}, \qquad (3)\\
&-\delta\frac{(N-2)(N^2-N)(N+1)^2}{8}\tilde{z}^4 &&-\beta\frac{(N^3-3N^2+2N)(N+1)^2}{16}\tilde{t}^4 &&=\frac{(N^3-3N^2+2N)(N-5)}{8(N+1)^2(N+4)!},\\
&\delta\frac{N^2(N+1)^3}{4}\tilde{z}^4 &&+\beta\frac{(N-1)^2N(N+1)^3}{32}\tilde{t}^4 &&=\frac{(N^2+N)(N^2+9N+2)}{4(N+1)^2(N+4)!}.
\end{aligned}
$$

Эта система имеет действительные решения при $3\le N\le 12$. Часть решений приводит к кубатурным формулам, использующим узлы вне симплекса. В таблице 3 приведены результаты расчетов. Вес, с которым входят в кубатурную формулу точки первой группы, γ, равен $\gamma=\Delta\tilde{\gamma}$, где Δ – объем симплекса. Аналогично δ и β – веса, с которыми в нее входят точки второй и третьей группы, равны $\delta=\tilde{\delta}\Delta$ и $\beta=\tilde{\beta}\Delta$.

§ 2. Кубатурные формулы пятого, шестого и седьмого порядков точности для тетраэдров

В этом параграфе мы рассмотрим более узкий класс симплексов – тетраэдры $(N=3)$. Каждая точка $\bar{X}$ будет характеризоваться четырьмя барицентрическими координатами $\bar{X}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. Как и ранее,

$$\tilde{\alpha}_i(x)=\alpha_i(\bar{x})-0{,}25, \qquad i=1,4.$$

В таблице 4 приведены комбинации элементарных симметрических многочленов от $\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\tilde{\alpha}_3,\tilde{\alpha}_4$ степени не выше семи, интегралы от этих полиномов по единичному тетраэдру $ABCD$ $(A\,(0,0,0,1)$, $B\,(1,0,0,0)$, $C\,(0,1,0,0)$, $D\,(0,0,1,0))$ и значение полиномов на точках каждой группы. Для кубатурной формулы пятого порядка точности требуется два набора точек второй группы и один набор точек третьей группы. Пусть X_1 – параметр, характеризу-

ющий первый набор точек второй группы и W_1 – вес, с которым входят эти точки в кубатурную формулу, X_2 – параметр, характеризующий второй набор точек второй группы, и W_2 – вес, t_1 – параметр набора точек третьей группы и β – вес. Тогда W_1, X_1, W_2, X_2, t_1 и β удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$
\begin{aligned}
&4\sum_{i=1}^{2}W_i &&+\;6\beta &&=\frac{1}{6},\\
&-24\sum_{i=1}^{2}W_i(x_i-\tfrac{1}{4})^2 &&-12\beta(t_1-\tfrac{1}{4})^2 &&=-\frac{1}{80},\\
&-32\sum_{i=1}^{2}W_i(x_i-\tfrac{1}{4})^3 && &&=\frac{1}{720}, \qquad (4)\\
&-12\sum_{i=1}^{2}W_i(x_i-\tfrac{1}{4})^4 &&+6\beta(t_1-\tfrac{1}{4})^4 &&=-\frac{1}{53760},\\
&144\sum_{i=1}^{2}W_i(x_i-\tfrac{1}{4})^4 &&+24\beta(t_1-\tfrac{1}{4})^4 &&=\frac{19}{13440},\\
&192\sum_{i=1}^{2}W_i(x_i-\tfrac{1}{4})^5 && &&=-\frac{1}{4480}.
\end{aligned}
$$

Для кубатурной формулы шестого порядка точности требуется три набора точек второй группы и один набор точек четвертой группы.

Пусть X_1, W_1 – параметры, характеризующие первый набор точек второй группы; X_2, W_2 – второй набор; X_3, W_3 – третий набор точек второй группы; p, q – параметры, характеризующие набор точек четвертой группы и β – вес, с которым они входят в кубатурную формулу. Пусть $\tilde{X}_1=X_1-\frac{1}{4}$, $\tilde{X}_2=X_2-\frac{1}{4}$, $\tilde{X}_3=X_3-\frac{1}{4}$, $\tilde{p}=p-\frac{1}{4}$, $\tilde{q}=q-\frac{1}{4}$.

Тогда:

$$
\begin{aligned}
&4\sum_{i=1}^{3}W_i &&+12\beta &&=\frac{1}{6},\\
&-24\sum_{i=1}^{3}W_i\tilde{x}_i^2 &&-12\beta(2\tilde{p}^2+(\tilde{p}+\tilde{q})^2) &&=-\frac{1}{80},\\
&-32\sum_{i=1}^{3}W_i\tilde{x}_i^3 &&-24\beta\tilde{p}(\tilde{p}+\tilde{q})^2 &&=\frac{1}{720},\\
&-12\sum_{i=1}^{3}W_i\tilde{x}_i^4 &&-12\tilde{\beta}\tilde{p}^2\tilde{q}(2\tilde{p}+\tilde{q}) &&=-\frac{1}{53760}, \qquad (5)\\
&144\sum_{i=1}^{3}W_i\tilde{x}_i^4 &&+12\beta(2\tilde{p}^2+(\tilde{p}+\tilde{q})^2)^2 &&=\frac{19}{13440},\\
&192\sum_{i=1}^{3}W_i\tilde{x}_i^5 &&+24\beta\tilde{p}(\tilde{p}+\tilde{q})^2(2\tilde{p}^2+(\tilde{p}+\tilde{q})^2) &&=-\frac{1}{4480},\\
&-864\sum_{i=1}^{3}W_i\tilde{x}_i^6 &&-12\beta(2\tilde{p}^2+(\tilde{p}+\tilde{q})^2)^3 &&=-\frac{41}{193536},
\end{aligned}
$$

$$256\sum_{i=1}^{3} W_i\tilde{x}_i^6 + 48\beta\tilde{p}^2(\tilde{p}+\tilde{g})^4 = \frac{17}{362880},$$

$$72\sum_{i=1}^{3} W_i\tilde{x}_i^6 + 12\beta(2\tilde{p}^2+(\tilde{p}+\tilde{g})^2)\tilde{p}^2\tilde{g}(2\tilde{p}+\tilde{g}) = \frac{31}{3870720}.$$

Для кубатурной формулы седьмого порядка точности требуется три набора точек второй группы, один набор точек третьей группы и один набор точек четвертой группы. К сожалению, возникающая система не имеет решения в действительных числах, поэтому была добавлена одна точка первой группы. В этом случае система имеет бесконечно много решений.

Пусть γ – вес, с которым входит точка первой группы в кубатурную формулу, x_i, W_i – параметры, характеризующие наборы точек второй группы $(i=1,3)$; t_1,δ – параметры набора точек третьей группы, β, p, g – параметры набора точек четвертой группы.

Пусть

$$\tilde{x}_i = x_i - \tfrac{1}{4},\ \tilde{t}_1 = t_1 - \tfrac{1}{4},\ \tilde{p} = p - \tfrac{1}{4},\ \tilde{g} = g - \tfrac{1}{4},$$

тогда

$$\tilde{x}_i, W_i, \tilde{t}_1, \delta, \tilde{p}, \tilde{g}, \beta, \gamma$$

удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&4\sum_{i=1}^{3} W_i + 12\beta + 6\delta + \gamma = \frac{1}{6},\\
&-24\sum_{i=1}^{3} W_i\tilde{x}_i^2 - 12\beta(2\tilde{p}+(\tilde{p}+\tilde{g})^2) - 12\delta\tilde{t}_1^2 = -\frac{1}{80},\\
&-32\sum_{i=1}^{3} W_i\tilde{x}_i^3 - 24\beta\tilde{p}(\tilde{p}+\tilde{g})^2 = \frac{1}{720},\\
&-12\sum_{i=1}^{3} W_i\tilde{x}_i^4 - 12\beta\tilde{p}^2\tilde{g}(2\tilde{p}+\tilde{g}) + 6\delta\tilde{t}_1^4 = -\frac{1}{53760},\\
&144\sum_{i=1}^{3} W_i\tilde{x}_i^4 + 12\beta(2\tilde{p}^2+(\tilde{p}+\tilde{g})^2)^2 + 24\delta\tilde{t}_1^4 = \frac{19}{13440},\\
&192\sum_{i=1}^{3} W_i\tilde{x}_i^5 + 24\beta\tilde{p}(\tilde{p}+\tilde{g})^2(2\tilde{p}^2+(\tilde{p}+\tilde{g})^2) = -\frac{1}{4480},\\
&-864\sum_{i=1}^{3} W_i\tilde{x}_i^6 - 12\beta(2\tilde{p}^2+(\tilde{p}+\tilde{g})^2)^3 - 48\delta\tilde{t}_1^6 = -\frac{41}{193536},\\
&256\sum_{i=1}^{3} W_i\tilde{x}_i^6 + 48\beta\tilde{p}^2(\tilde{p}+\tilde{g})^4 = \frac{17}{362880},\\
&72\sum_{i=1}^{3} W_i\tilde{x}_i^6 + 12\beta(2\tilde{p}^2+(\tilde{p}+\tilde{g})^2)\tilde{p}^2\tilde{g}(2\tilde{p}+\tilde{g}) - 12\delta\tilde{t}_1^6 = \frac{31}{3870720},
\end{aligned} \qquad (6)$$

$$1152\sum_{i=1}^{3} W_i\tilde{x}_i^7 - 24\beta(2\tilde{p}^2+(\tilde{p}+\tilde{g})^2)\tilde{p}(\tilde{p}+\tilde{g})^2 = \frac{67}{1612800},$$

$$96\sum_{i=1}^{3} W_i\tilde{x}_i^7 + 24\beta\tilde{p}^3\tilde{g}(2\tilde{p}+\tilde{g})(\tilde{p}+\tilde{g})^2 = -\frac{17}{6451200}.$$

В таблице 5 приведены кубатурные формулы для тетраэдра. Первые три формулы взяты из /3/. $\tilde{W}$ – вес, с которым точка должна входить в кубатурную формулу, равен $\tilde{W} = W\Delta$, где Δ – объем тетраэдра; L – количество различных точек, получаемых перестановками $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Системы (3),(4),(5) имеют посторонние решения, приводящие к кубатурным формулам, имеющим узлы вне тетраэдра. Эти решения не приводятся.

§ 3. Методы решения возникающих систем уравнений

Решение систем (3),(4),(5),(6) вызвало значительные затруднения. Во всех случаях, когда это возможно, из систем исключались те параметры, относительно которых уравнения можно разрешить явно или выразить через другие параметры. К сожалению, все методы типа метода Ньютона приводили к плохой обусловленности, и от них пришлось отказаться. В большинстве случаев выделялся фиксированный параметр, через который выражались все остальные. Сам он, в свою очередь, являлся корнем довольно сложного уравнения, которое решалось методом деления отрезка пополам. В процессе вычислений возникла проблема решения следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = C_1,\\
&\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i = C_2,\\
&\dots\dots\dots\dots,\\
&\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i^{2N-1} = C_{2N},
\end{aligned} \qquad (7)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_N$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ – неизвестные, а $C_1, C_2, \dots, C_{2N}$ – заданные величины. Так как x_i являются характеристиками различных наборов точек, то на x_i накладывается дополнительное ограничение: $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Применялся следующий метод решения. Введем дополнительные обозначения. Пусть $\bar{\tau}_i$ есть вектор

$$\bar{\tau}_i = (1, x_i, x_i^2, \dots, x_i^{N-1})^T, \quad i=1,N.$$

Вектора $\bar a_1, \bar a_2, \ldots, \bar a_{N+1}$ есть

$$\bar a_1 = (c_1, c_2, \ldots, c_N)^T,$$

$$\bar a_2 = (c_2, c_3, \ldots, c_{N+1})^T,$$

$$\bar a_{N+1} = (c_{N+1}, c_{N+2}, \ldots, c_{2N})^T.$$

Тогда первые N уравнений (7) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \bar z_i = \bar a_1 . \qquad (8)$$

Уравнения со второго по $(N+1)$ и т.д.

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \bar z_i = \bar a_2 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots , \qquad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i^N \bar z_i = \bar a_{N+1} .$$

Но любые $(N+1)$ векторов линейно зависимы в N-мерном пространстве, поэтому существуют $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{N+1}$, не все равные нулю, для которых

$$\sum_{i=1}^{N+1} \gamma_i \bar a_i \equiv \bar 0 . \qquad (10)$$

Тогда из (8),(9),(10) следует

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \Big(\sum_{k=1}^{N+1} \gamma_k x_i^{k-1} \Big) \bar z_i \equiv \bar 0 .$$

Так как $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, то вектора $\bar z_i$ – линейно независимые (их определитель есть определитель Вандермонда).
Отсюда следует

$$\sum_{k=1}^{N+1} \gamma_k x_i^{k-1} = 0 , \quad i = 1, N ,$$

т.е. все x_i есть различные корни полинома $P(t) = \sum_{k=1}^{N+1} \gamma_k t^{k-1}$.
Полином легко построить. Найдя x_i, из (8) находим α_i.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность А.А.Корнейчуку за многочисленные рекомендации по изложению материала.

Таблица I

№	Комбинация элементарных полиномов	Фактическое значение полиномов	Значение интегралов от полиномов
I	σ_0	1	$\frac{1}{N!}$
2	σ_2	$\sum_{i,j=1;\, i\neq j}^{N+1} \tilde\alpha_i(\bar x)\tilde\alpha_j(\bar x)$	$-\frac{N}{2(N+2)!}$
3	σ_3	$\sum_{i,j,k=1;\, i\neq j\neq k}^{N+1} \tilde\alpha_i(\bar x)\tilde\alpha_j(\bar x)\tilde\alpha_k(\bar x)$	$\frac{2(N^2-N)}{3(N+1)(N+3)!}$
4	σ_4	$\sum_{i,j,k,l=1;\, i\neq j\neq k\neq l}^{N+1} \tilde\alpha_i(\bar x)\tilde\alpha_j(\bar x)\tilde\alpha_k(\bar x)\tilde\alpha_l(\bar x)$	$\frac{N(N-1)(N-2)(N-5)}{8(N+1)^2(N+4)!}$
5	σ_2^2	$\Big(\sum_{i,j=1;\, i\neq j}^{N+1} \tilde\alpha_i(\bar x)\tilde\alpha_j(\bar x)\Big)^2$	$\frac{N(N+1)(N^2+9N+2)}{4(N+1)^2(N+4)!}$

Таблица 3

	$\tilde\gamma$	$\tilde\delta$	z	$\tilde\beta$	t
3	-0,078933333333333	0,045733333333333	0,071428571428571	0,149333333333333	0,100596423833200
4	-0,098330248077508	0,019292373559985	0,054816625353262	0,100186838027758	0,088947074609055
5	-0,109943825883792	0,007391946765302	0,037756819943497	0,071039476352798	0,079598708345419
6	-0,110339568956389	0,002279229547126	0,016638990258786	0,052113569625071	0,071885212776682

Таблица 2

№	Полином	Первая группа	Вторая группа	Третья группа
I	σ_0	I	$N+1$	$\frac{(N+1)N}{2}$
2	σ_2	0	$-\frac{N(N+1)^2}{2}\left(z-\frac{1}{N+1}\right)^2$	$-\frac{N(N-1)(N+1)^2}{8}\left(t-\frac{1}{N+1}\right)^2$
3	σ_3	0	$-\frac{(N-1)N(N+1)^2}{3}\left(z-\frac{1}{N+1}\right)^3$	$-\frac{(N-3)(N-1)(N+1)^2N\left(t-\frac{1}{N+1}\right)^3}{24}$
4	σ_4	0	$-\frac{(N-2)(N-1)N(N+1)^2\left(z-\frac{1}{N+1}\right)^4}{8}$	$-\frac{(N-2)(N-1)N(N+1)^2}{16}\left(t-\frac{1}{N+1}\right)^4$
5	σ_2^2	0	$\frac{N^2(N+1)^3}{4}\left(z-\frac{1}{N+1}\right)^4$	$\frac{(N-1)^2N(N+1)^3}{32}\left(t-\frac{1}{N+1}\right)^4$

Таблица 4

Комбинации элементарных полиномов	Значение полиномов на точках группы				Интегралы от элементарных полиномов по $ABCD$
	I	II	III	IУ	
σ_0	1	1	1	1	$\frac{1}{6}$
σ_2	0	$-6(z-\frac{1}{4})^2$	$-2(t-\frac{1}{4})^2$	$-2(p-\frac{1}{4})^2-(p+q-\frac{1}{2})^2$	$-\frac{1}{80}$
σ_3	0	$-8(z-\frac{1}{4})^3$	0	$-2(p-\frac{1}{4})(p+q-\frac{1}{2})^2$	$\frac{1}{720}$
σ_4	0	$-3(z-\frac{1}{4})^4$	$(t-\frac{1}{4})^4$	$-(p-\frac{1}{4})^2(q-\frac{1}{4})(2p+q-\frac{3}{4})$	$-\frac{1}{53760}$
σ_2^2	0	$36(z-\frac{1}{4})^4$	$4(t-\frac{1}{4})^4$	$(2(p-\frac{1}{4})^2+(p+q-\frac{1}{2})^2)^2$	$\frac{19}{13440}$
$\sigma_2\sigma_3$	0	$48(z-\frac{1}{4})^5$	0	$2(p-\frac{1}{4})(p+q-\frac{1}{2})^2(2(p-\frac{1}{4})^2+(p+q-\frac{1}{2})^2)$	$-\frac{1}{4480}$
σ_2^3	0	$-216(z-\frac{1}{4})^6$	$-8(t-\frac{1}{4})^6$	$-(2(p-\frac{1}{4})^2+(p+q-\frac{1}{2})^2)^3$	$-\frac{41}{193536}$
σ_3^2	0	$64(z-\frac{1}{4})^6$	0	$4(p-\frac{1}{4})^2(p+q-\frac{1}{2})^4$	$\frac{17}{362880}$
$\sigma_4\sigma_2$	0	$18(z-\frac{1}{4})^6$	$-2(t-\frac{1}{4})^6$	$(p-\frac{1}{4})^2(q-\frac{1}{4})(2p+q-\frac{3}{4})(2(p-\frac{1}{4})^2+(p+q-\frac{1}{2})^2)$	$\frac{31}{3870720}$
$\sigma_2^2\sigma_3$	0	$-288(z-\frac{1}{4})^7$	0	$-2(p-\frac{1}{4})(p+q-\frac{1}{2})^2(2(p-\frac{1}{4})^2+(p+q-\frac{1}{2})^2)^2$	$\frac{67}{1612800}$
$\sigma_4\sigma_3$	0	$24(z-\frac{1}{4})^7$	0	$2(p-\frac{1}{4})^3(p+q-\frac{1}{2})^2(q-\frac{1}{4})(2p+q-\frac{3}{4})$	$-\frac{17}{6451200}$

Таблица 5

W	α_1	α_2	α_3	α_4	L
		I – точечная формула степени I			
I,000000000000000	0,250000000000000	0,250000000000000	0,250000000000000	0,250000000000000	I
		4 – точечная формула степени 2			
0,250000000000000	0,I38I9660II250I0	0,I38I9660II250I0	0,I38I9660II250I0	0,5854I0I96624968	4
		5 – точечная формула степени 3			
-0,800000000000000	0,250000000000000	0,250000000000000	0,250000000000000	0,250000000000000	I
0,450000000000000	0,I66666666666666	0,I66666666666666	0,I66666666666666	0,500000000000000	4
		II – точечная формула степени 4			
-0,078933333333333	0,250000000000000	0,250000000000000	0,250000000000000	0,250000000000000	I
0,045733333333333	0,07I42857I42857I	0,07I42857I42857I	0,07I42857I42857I	0,7857I42857I4285	4
0,I49333333333333	0,399403576I66799	0,399403576I66799	0,I00596423833200	0,I00596423833200	6
		I4 – точечная формула степени 5			
0,II26879257I80I5	0,3I08859I9263300	0,3I08859I9263300	0,3I08859I9263300	0,0673422422I0098	4
0,073493043II636I	0,0927352503I089I	0,0927352503I089I	0,0927352503I089I	0,72I794249067326	4
0,04254602077708I	0,045503704I25649	0,045503704I25649	0,454496295874350	0,454496295874350	6

Продолжение таблицы 5

W	α_1	α_2	α_3	α_4	L
		24 – точечная формула степени 6			
0,0I00772II055320	0,0406739585346II	0,0406739585346II	0,0406739585346II	0,877978I24396I65	4
0,055357I8I543654	0,322337890I42275	0,322337890I42275	0,322337890I42275	0,032986329573I34	4
0,039922750258I67	0,2I460287I259I52	0,2I460287I259I52	0,2I460287I259I52	0,356I9I386222543	4
0,0482I42857I4285	0,06366I00I8750I7	0,06366I00I8750I7	0,26967233I4583I5	0,60300566479I649	I2
		3I – точечная формула степени 7			
0,I0452490533I238	0,250000000000000	0,250000000000000	0,250000000000000	0,250000000000000	I
0,I32709834743269	0,0855III282432I4	0,0855III282432I4	0,0855III282432I4	0,7434666I5270357	4
0,0404793I5356054	0,3267330898I5793	0,3267330898I5793	0,3267330898I5793	0,0I98007305526I9	4
-0,629435890I07533	0,II37I9839946670	0,II37I9839946670	0,II37I9839946670	0,658840480I59989	4
0,0I452I342450256	0,029096I60499228	0,029096I60499228	0,47090383950077I	0,47090383950077I	6
0,2I9444500000004	0,I00000000000000	0,I00000000000000	0,627808686088960	0,I72I9I3I39II039	I2

Литература

1. Laursen M.E., Gellert M.. Int. J. Numer. Meth. Eng., 1978, v.12, pp 67-76.
2. Gowper G.R., Int. J. Numer. Meth. Eng., 1973, v.7., pp 405-408.
3. Hammer P.C. et. al., MTAC, v.10, 1956, pp. 130-137 .
4. Hammer P.C. et. al., MTAC, v.10, 1956, pp. 137-139 .
5. Stroud A.H. Approximate Calculation of Multiple Integrals., 1971, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs N.J.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. "Наука", М., I968.

Рукопись поступила в издательский отдел
II июня I981 года.