

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

4513 / 2-81

7/9-81  
11-81-385 +

Д.Баатар, И.В.Пузынин

ЗАДАЧА ОБ ЭФФЕКТЕ ШТАРКА  
КАК ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ  
СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

1981

## I. Введение

Задача о смещении энергетических уровней атома водорода под действием постоянного электрического поля (эффект Штарка) является классической в квантовой механике<sup>/1/</sup>. Эта задача может быть описана уравнением Шредингера в атомных единицах<sup>/1/</sup> (а.е.):

$$\left(\frac{1}{2} \Delta + \frac{1}{z} - Fz + E\right) \Psi = 0, \quad (I.1)$$

где  $F$  - напряженность электрического поля, направленная вдоль оси  $Z$ . В параболической системе координат:  $\xi = z + z$ ,  $\eta = z - z$ ,  $\varphi = \text{arctg}(\frac{y}{x})$  ( $0 \leq \xi, \eta < \infty$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ), уравнение (I.1) допускает разделение переменных<sup>/1/</sup>. Полная волновая функция  $\Psi$  представляется в виде произведения:

$$\Psi = (\xi \eta)^{-1/2} \Phi_{n_1, m}(\xi) \chi_{n_2, m}(\eta) e^{\pm i m \varphi}, \quad (I.2)$$

подстановка которой в уравнение (I.1) приводит к системе уравнений:

$$\left[ \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{E}{2} + \frac{\beta_1}{\xi} + \frac{1-m^2}{4\xi^2} - \frac{F}{4} \xi \right] \Phi_{n_1, m}(\xi) = 0, \quad (I.3a)$$

$$\left[ \frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{E}{2} + \frac{\beta_2}{\eta} + \frac{1-m^2}{4\eta^2} + \frac{F}{4} \eta \right] \chi_{n_2, m}(\eta) = 0. \quad (I.3b)$$

Здесь  $n_1, n_2$  - параболические квантовые числа;  $m$  - магнитное квантовое число;  $E$  - энергия;  $\beta_1$  и  $\beta_2$  - константы разделения, связанные условием

$$\beta_1 + \beta_2 = 1. \quad (I.4)$$

Функции  $\Phi_{n_1, m}(\xi)$  и  $\chi_{n_2, m}(\eta)$  должны удовлетворять условиям регулярности в точках  $\xi = \eta = 0$ ,

$$\Phi_{n_1, m}(0) = \chi_{n_2, m}(0) = 0. \quad (I.5)$$

При  $\xi \rightarrow \infty$  необходимо, чтобы функция  $\Phi_{n_1, m}(\xi)$  экспоненциально убывала:

$$\Phi_{n_2, m}(\xi) \rightarrow \frac{A}{\xi^{1/4}} \exp\left(-\frac{\sqrt{F}}{3} \xi^{3/2} + \frac{E}{\sqrt{F}} \xi^{1/2}\right), \quad (I.6a)$$

а функция  $\chi_{n_2, m}(\eta)$  при  $\eta \rightarrow \infty$  должна иметь асимптотику

$$\chi_{n_2, m}(\eta) \rightarrow \frac{B}{\eta^{1/4}} \sin\left(\frac{\sqrt{F}}{3} \eta^{3/2} + \frac{E}{\sqrt{F}} \eta^{1/2} + \delta\right), \quad (I.6b)$$

где  $A$  и  $B$  - асимптотические амплитуды;  $\delta$  - асимптотический сдвиг фазы.

Особенность системы (I.3) состоит в том, что уравнения, ее составляющие, связаны лишь числовыми параметрами. При этом для уравнения (I.3a) граничные условия (I.5)-(I.6) определяют дискретный спектр значений энергии  $E$ , тогда как для уравнения (I.3b) условия (I.5)-(I.6b) соответствуют непрерывному спектру. В рассматриваемой задаче интерес представляют те значения энергии  $E$ , которые находятся в области резонансной зависимости сдвига фазы  $\delta$  от энергии, то есть определяют квазистационарные состояния<sup>/2/</sup>.

Большинство подходов к решению задачи (I.3)-(I.6) основано на теории возмущений. Однако для произвольных квантовых чисел и значений напряженности поля  $F$  общие эффективные схемы решения, как отмечено в работе<sup>/3/</sup>, разработать трудно. Поэтому в указанной работе был использован метод переразложения решения в степенные ряды, который основан на последовательном представлении искомого решения степенными рядами для уравнения (I.3a) и специальными рядами, учитывающими асимптотики (I.6b) для уравнения (I.3b) в окрестностях узловых точек (I.3b) ( $\xi_k, \eta_k; k = 0, 1, 2, \dots$ ). Для каждого заданного значения  $E$  использовалась итерационная процедура нахождения константы разделения  $\beta_1$ , обеспечивающей обращение в нуль решения уравнения (I.3a) в достаточно удаленных точках  $\xi_{n_2} > \xi_{n_2} \gg 1$ . Далее, с помощью найденного значения  $\beta_2$  методом переразложения находится приближенное решение уравнения (I.3b) и в достаточно удаленной от  $\eta=0$  области  $\eta_{n_2} \gg 1$  определяются параметры резонанса - резонансная энергия  $E_0$  и ширина резонанса  $\Gamma$ . Для этого используются асимптотические соотношения теории Вайскопфа-Вигнера<sup>/2/</sup>:

$$\delta = \delta_0 + \arctg \frac{\Gamma}{2(E-E_0)}, \quad B^2 = B_0^2 \left[ (E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \right]. \quad (I.7)$$

В работе<sup>/4/</sup> при решении рассматриваемой задачи использовался метод прямого численного интегрирования системы (I.3) методом Рунге-Кутты.

В данной работе дано решение задачи (I.3)-(I.6) как двухпараметрической спектральной задачи. При заданных значениях магнитного кван-

тового числа  $m$  и напряженности электрического поля  $F$  энергия  $E$  и константа разделения  $\beta_1$  рассматриваются как спектральные параметры, которые должны обеспечить асимптотическое поведение решений (I.6). Численное решение задачи (I.3)-(I.6) выполнено с помощью итерационной ньютоновской схемы для двухпараметрической задачи на собственные значения, разработанной в<sup>/5/</sup>. Эта схема позволяет более полно, чем в<sup>/3/</sup>, учесть асимптотику (I.6) искомого решения, а также эффективно выполнить анализ вычислительных ошибок и достичь необходимой точности результатов.

## 2. Постановка двухпараметрической задачи на собственные значения

При решении сингулярной спектральной задачи (I.3)-(I.6) с помощью итерационной ньютоновской схемы<sup>/5/</sup> необходимо преобразовать эту задачу в задачу на собственные значения. Это можно осуществить на основе развитого в<sup>/6/</sup> подхода к задаче рассеяния как к задаче на собственные значения.

Действительно, по своей постановке исследуемая задача сходна с задачей рассеяния с учетом закрытого канала реакции<sup>/6/</sup>. Асимптотика (I.6) решений системы (I.3) содержит неизвестный спектральный параметр  $E$ , а асимптотика (I.6b) еще и неизвестный параметр  $\delta$  - сдвиг фазы, причем функциональная зависимость  $\delta = \delta(E)$  служит для определения квазистационарных состояний. В используемом здесь подходе значение сдвига фазы  $\delta$  задается. При этом в асимптотику (I.6) будут входить только неизвестные спектральные параметры.

Асимптотические выражения (I.6) позволяют построить в достаточно удаленных точках асимптотических областей  $\xi_{max} \gg 1, \eta_{max} \gg 1$  приближенные однородные граничные условия для логарифмических производных решений системы (I.3), что дает возможность исключить неизвестные асимптотические амплитуды  $A$  и  $B$  в асимптотике (I.6).

Таким образом, сингулярная задача (I.3)-(I.6) аппроксимируется регулярной задачей типа Штурма-Лиувилля для системы уравнений (I.3) с краевыми условиями (I.5) и

$$\left[ \frac{d}{d\xi} + f_1(E, \xi) \right] \Phi_{n_2, m}(\xi) \Big|_{\xi=\xi_{max}} = 0, \quad (2.1a)$$

$$\left[ \frac{d}{d\eta} + f_2(E, \eta) \right] \chi_{n_2, m}(\eta) \Big|_{\eta=\eta_{max}} = 0, \quad (2.1b)$$

которые нелинейно зависят от искомого собственного значения  $E$ . Функции  $f_1(E, \xi)$  и  $f_2(E, \eta)$  строятся исходя из асимптотических выражений (I.6), причем в выражении (I.6b) значения фазы  $\delta$  задаются.

Решение двухпараметрической задачи на собственные значения (I.3), (I.5), (2.1) дает возможность при заданной фазе  $\delta$  определить решения  $\Phi_{n_2, m}(\xi)$ ,  $\chi_{n_2, m}(\eta)$  и собственные параметры  $E$  и  $\beta_2$ , а следовательно, в силу (I.4) и  $\beta_2$ . При этом собственные параметры  $E$  и  $\beta_2$  являются функциями  $\delta$ , то есть вместо зависимости  $\delta = \delta(E)$  определяется обратная функция  $E = E(\delta)$ . В этом подходе асимптотика (I.6a) решения дискретного спектра и асимптотика (I.6б) решения непрерывного спектра равноправно используются при постановке краевых условий (2.1). Кроме того, как показано в работе [7], в случае резонансной зависимости  $\delta$  от  $E$  более устойчивой является процедура определения обратной функции  $E = E(\delta)$ .

### 3. Особенности и анализ точности численного решения

Двухпараметрическая задача на собственные значения (I.3), (I.5), (2.1) доопределяется условиями нормировки собственных функций:

$$\int_0^{\xi_{\max}} \Phi_{n_2, m}^2(\xi) d\xi - 1 = 0, \quad (3.1a)$$

$$\int_0^{\eta_{\max}} \chi_{n_2, m}^2(\eta) d\eta - 1 = 0. \quad (3.1б)$$

Для численного решения задачи (I.3), (I.5), (2.1), (3.1) применяется итерационная ньютоновская схема, разработанная в [5]. Она сводит решение поставленной задачи к последовательности итерационных шагов. На каждом из них решаются линейные граничные задачи для двух независимых дифференциальных уравнений второго порядка. Численное решение этих задач реализуется с помощью метода конечных разностей [8]. При этом используются равномерные разностные сетки на отрезках  $0 \leq \xi, \eta \leq \tau$  с шагом  $h$  и трехточечные разностные схемы с порядком аппроксимации  $O(h^2)$ . Разностные граничные задачи решаются прогонкой [8], в результате чего находятся компоненты разностных итерационных поправок для приближений к искомым решениям. Далее на каждом итерационном шаге находим из системы интегральных уравнений поправки для приближений к искомым собственным параметрам. При этом интегралы аппроксимируются обобщенной квадратурной формулой трапеций, имеющей порядок аппроксимации  $O(h^2)$ . Итерации продолжаются до достижения достаточно малого заданного значения невязки. Под невязкой понимается норма вектора, получающегося в результате подстановки разностного приближенного решения в разностную задачу, аппроксимирующую исходную задачу (I.3), (I.5), (2.1), (3.1).

В качестве начальных приближений к искомым параметрам  $E$  и  $\beta_2$  задавались их значения, полученные с помощью теории возмущений [9]. Начальные приближения для искомых решений задавались функциями

$$\Phi_{n_2, m}(\xi) = \begin{cases} \xi \sin \frac{\pi(n_2-1)\xi}{\tau_{as}}, & 0 \leq \xi \leq \tau_{as}, \\ \Phi_{as}(\xi), & \tau_{as} \leq \xi \leq \tau, \end{cases} \quad (3.2a)$$

$$\chi_{n_2, m}(\eta) = \begin{cases} \eta \sin \frac{\pi(n_2-1)\eta}{\tau_{as}}, & 0 \leq \eta \leq \tau_{as}, \\ \chi_{as}(\eta), & \tau_{as} \leq \eta \leq \tau. \end{cases} \quad (3.2б)$$

Здесь параметр  $\tau_{as}$  минимизирует значение невязки, а  $\Phi_{as}(\xi)$ ,  $\chi_{as}(\eta)$  – асимптотические выражения, заданные формулами (I.6). При различных значениях параметров  $n_2, n_2, m, F$  и  $\delta$  начальные значения невязок получились порядка  $10^2$ . Для уточненных решений уровень невязки достигал меньше  $10^{-7}$ . Заметим, что для полученного решения уравнения (I.3б), возможно, потребуется перенормировка, поскольку интеграл в (3.1б) при  $\eta_{\max} \rightarrow \infty$  с учетом (I.6б) является расходящимся. Одной из таких перенормировок может быть условие  $B=1$ .

Рассмотрим ошибки, возникающие при численном решении задачи (I.3)–(I.6) с помощью изложенного подхода. Пусть  $\mathbf{z}^* = \{E^*, \beta_2^*, \Phi^*(\xi), \chi^*(\eta)\}$  – искомое решение задачи. Замена асимптотических условий (I.6) краевыми (2.1) приводит к регулярной задаче типа задачи Штурма–Лиувилля, соответствующее решение которой обозначим через  $\mathbf{z}(\mathbf{z})$ ,  $\mathbf{z} \gg 1$  – выбранная граница. Регулярная задача (I.3), (I.5), (2.1) аппроксимируется конечно-разностной на сетке узлов с шагом  $h$  с порядком аппроксимации  $O(h^2)$ . Решение этой задачи обозначим через  $\mathbf{z}(\tau, h)$ . В процессе ньютоновских итераций получается приближенное решение разностной задачи  $\mathbf{z}(\tau, h, M)$ , где  $M$  – число итераций. Предположим, что все собственные функции нормированы на отрезке  $[0; \tau]$  условиями (3.1) или дискретными аналогами этих условий. Тогда справедлива оценка ошибки в сеточной норме:

$$\|\mathbf{z}^* - \mathbf{z}(\tau, h, M)\| \leq \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad (3.3)$$

где  $\sigma_1 = \|\mathbf{z}^* - \mathbf{z}(\tau)\|$ ,  $\sigma_2 = \|\mathbf{z}(\tau) - \mathbf{z}(\tau, h)\|$ ,  $\sigma_3 = \|\mathbf{z}(\tau, h) - \mathbf{z}(\tau, h, M)\|$ .

Согласно теории разностной задачи Штурма–Лиувилля [8] для величины  $\sigma_2$  справедлива оценка

$$\sigma_2 \leq \text{const} \cdot h^2. \quad (3.4)$$

О величине  $\sigma_3$  можно косвенно судить по уровню достигнутой для решения  $\mathbf{z}(\tau, h, M)$  невязки ( $10^{-7}$ ). В частности, согласно работам [10, 11] величина невязки характеризует коридор ошибки для собственных параметров:

Таблица 1

F·10 <sup>4</sup>	σ	z	320	400
			E <sub>zh</sub>	-0,01617063
1,9448	0,5π	β <sub>zh</sub>	0,8304956	0,8304948
		E <sub>zh</sub>	-0,0152583	-0,0152577
2,5282	π	β <sub>zh</sub>	0,840982	0,840972

Таблица 2

F·10 <sup>4</sup>	σ	h	1,6	0,8	0,4	Δ <sub>1</sub>	Δ <sub>2</sub>	Δ <sub>1</sub> /Δ <sub>2</sub>
			1,9448	0,5π	E <sub>zh</sub>	-0,01604196	-0,01614466	-0,01617059
β <sub>zh</sub>	0,83096951	0,83058966			0,83049480	37985	9486	4,00
2,5282	π	E <sub>zh</sub>	-0,01512964	-0,01523185	-0,01525765	10221	2580	3,96
		β <sub>zh</sub>	0,84163309	0,84110360	0,84097156	52949	13204	4,01

$$|E(\tau, h) - E(\tau, h, M)| \leq \sigma, \quad |\beta_1(\tau, h) - \beta_1(\tau, h, M)| \leq \sigma,$$

где  $\sigma$  - величина невязки. Для величины  $\sigma_1$  имеется лишь качественная характеристика:  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \sigma_1 = 0$  /12/.

Подбор параметров  $\tau$  и  $M$  вычислительной схемы таким образом, чтобы выполнялись условия  $\sigma_1 \ll \sigma_2$ ,  $\sigma_3 \ll \sigma_2$ , позволяет эффективно использовать экстраполяцию по Ричардсону /13/ для уточнения разностного решения  $\mathcal{Z}(\tau, h)$ . Этот подбор осуществляется экспериментально. В таблице 1 приведена зависимость собственных параметров  $E(\tau, h)$ ,  $\beta_1(\tau, h)$  разностной задачи от  $\tau$ . Приведенные результаты получены для значений параметров задачи  $n=5$ ,  $n_1=3$ ,  $n_2=0$ ,  $m=1$  при шаге  $h=0,4$ . Таблица позволяет судить о стабилизации значений

$E(\tau)$ ,  $\beta_1(\tau)$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . В таблице 2 дана зависимость от шага  $h$  разностной сетки ошибки собственных параметров  $E(\tau, h)$ ,  $\beta_1(\tau, h)$  разностной задачи, вычисленных при  $\tau=400$  для различных значений  $h$ . Из таблицы видно, что эта зависимость квадратичная. Аналогичная зависимость сохраняется и для ошибок значений сеточных собственных функций. Это соответствует оценке (3.4).

Сравнение результатов, приведенных в таблицах 1 и 2, показывает, что выбор граничной точки  $\tau > 320$  и достижение в итерациях невязки  $\sigma < 10^{-7}$  обеспечивают стабилизацию в численных результатах 5-7 знаков после запятой. Это делает при  $h \approx 10^{-2}$  главной компоненту  $\sigma_2$  в оценке (3.3). Анализ таблицы 2 показывает, что при шаге  $h=0,4$  результаты имеют 3-4 верных знака после десятичной запятой. Для повышения точности решений /13/ в работе использовались расчеты на последовательности сгущающихся сеток ( $h=0,8; 0,4$ ), что дало возможность получить результаты с 5-6 верными знаками после запятой. Возможно и дальнейшее повышение точности.

#### 4. Определение параметров резонанса

Используемая в данной работе вычислительная схема дает возможность по заданному значению фазы  $\delta$  в асимптотике (1.6б) численно найти соответствующие значения  $E(\delta)$ ,  $\beta_1(\delta)$ . В работе /7/ сравниваются различные определения резонансных состояний. Воспользуемся приближенным условием существования резонанса на фазе  $\delta$ :

$$\delta_{res} \approx \pi(n_2 + \frac{1}{2}). \quad (4.1)$$

Задавая значения фазы  $\delta$  в окрестности (4.1), можно получить значения  $E(\delta)$ , причем обратная функция  $\delta = \delta(E)$  имеет резонансное поведение типа (1.7).

Для определения параметров резонанса  $E_0$ ,  $\delta_0$  и  $\Gamma$  воспользуемся методом наименьших квадратов /14/. Составим квадратичный функционал

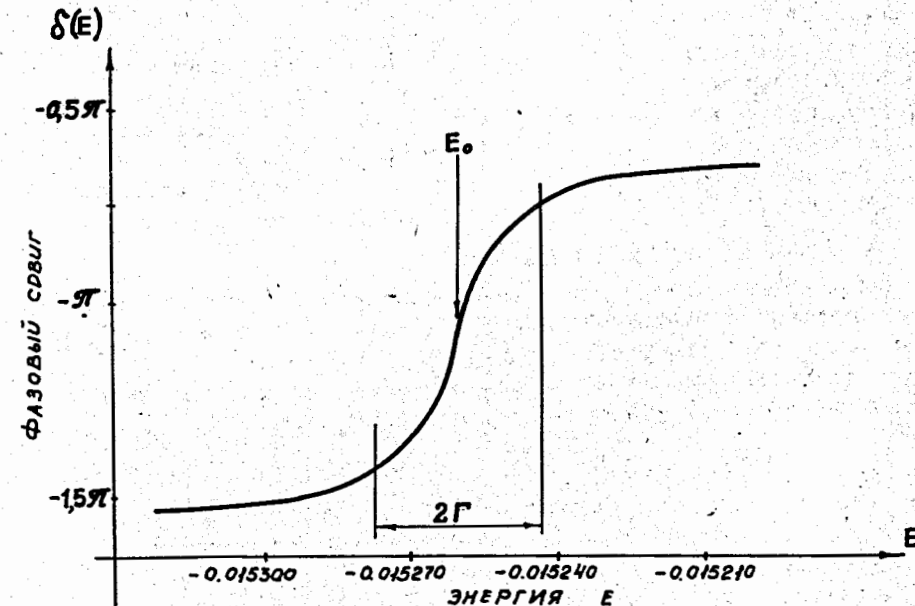


Рис. I

$$M(E_0, \delta_0, \Gamma) = \sum_{k=1}^N \frac{[E_{h,r}(\delta_k) - E(\delta_k)]^2}{\sigma_k^2}, \quad (4.2)$$

где  $\delta_k$  - последовательность значений фазы  $\delta$  в окрестности (4.1);  
 $E_{h,r}(\delta_k)$  - вычисленные значения энергии с ошибками  $\sigma_k$ , а  
 функция  $E(\delta)$  является обратной к функции (1.7):

$$E = \frac{\Gamma}{2} \operatorname{ctg}(\delta - \delta_0) + E_0. \quad (4.3)$$

Параметры  $E_0, \delta_0, \Gamma$ , обеспечивающие минимум функционала (4.2), будем считать искомыми параметрами резонанса.

Минимизация функционала (4.2) осуществлялась с помощью стандартной программы **FUMPI**, использующей метод линеаризации квадратичного функционала [14]. Используемая программа дает статистические оценки ошибок в определении искомых параметров.

В расчетах строилась равномерная сетка узлов  $\delta_k$  ( $N=29, \Delta\delta=0.1$ ). На рис.1 представлена кривая  $\delta = \delta(E)$ , вычисленная при значениях параметров задачи  $n = 5, n_1 = 3, n_2 = 0, m = 1, F = 2,5282 \cdot 10^{-4}$  а.е. На рис.2 приведен график собственных функций  $\Phi_{n_1, m}(\xi), \chi_{n_1, m}(\eta)$  в области действия эффективных потенциалов при  $\delta = 0,5, n = 5, n_1 = 3,$

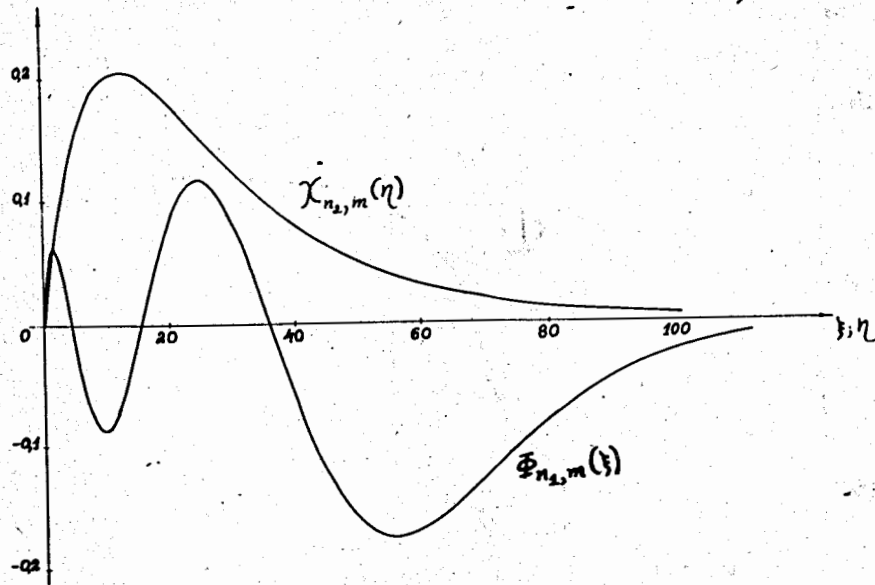


Рис.2

Таблица 3

$F \cdot 10^4$	$E_0^{13/}$	$\Gamma^{13/}$	$E_0^{14/}$	$\beta_1^{14/}$	$\Gamma^{14/}$	$E_0$	$\beta_1$	$\Gamma$
1,5560	-0,01685524	0,42 · 10 <sup>-9</sup>	-0,01684013	0,82405667	0,503 · 10 <sup>-9</sup>	-0,01684663	0,82404312	0,498 · 10 <sup>-9</sup>
1,9448	-0,01617939	0,1438 · 10 <sup>-6</sup>	-0,01616271	0,83052	0,148 · 10 <sup>-6</sup>	-0,01617072	0,8304971	0,149 · 10 <sup>-6</sup>
2,1393	-0,01586047	0,1058 · 10 <sup>-5</sup>	-0,0158429	0,8339	0,109 · 10 <sup>-5</sup>	-0,01584816	0,8338024	0,108 · 10 <sup>-5</sup>
2,5282	-0,01526920	0,1756 · 10 <sup>-4</sup>	-0,015255	0,84105	0,178 · 10 <sup>-4</sup>	-0,01526125	0,8410320	0,171 · 10 <sup>-4</sup>
2,9172	-0,01474024	0,9765 · 10 <sup>-4</sup>	-0,014735	0,84886	0,995 · 10 <sup>-4</sup>	-0,0147847	0,8496195	0,987 · 10 <sup>-4</sup>
3,3061	-0,01424249	0,2785 · 10 <sup>-3</sup>	-0,01427	0,85724	0,303 · 10 <sup>-3</sup>	-0,0143889	0,859025	0,299 · 10 <sup>-3</sup>

$n_x=0$ ,  $m=1$ ,  $F=1,9448 \cdot 10^{-4}$  а.е. Вычисленное значение  $\chi^2$  при минимизации функционала (4.2) равно 28 при теоретическом значении  $N-3=26$  в случае  $F=2,5232 \cdot 10^{-4}$  а.е. Это свидетельствует о хорошей аппроксимации вычисленной кривой  $E_{h,z}(\delta_k)$  с помощью теоретической (4.3).

#### 5. Результаты вычислений

Результаты вычислений, выполненных в данной работе на ЭВМ CDC-6500 с помощью специальной программы, представлены в таблице 3. Здесь же для сравнения приведены результаты, полученные с помощью метода Нумерова<sup>/4/</sup> и методом переразложения в степенные ряды<sup>/3/</sup>. Имеется достаточно хорошее согласие результатов, которое говорит о том, что изложенный подход и используемая вычислительная схема могут успешно применяться к решению рассмотренной задачи.

#### 6. Заключение

Рассмотренный метод решения задачи об эффекте Штарка является более общим по сравнению с другими используемыми в этой задаче вычислительными схемами. Сходимость метода не зависит от значений параметров задачи, а оценки сходимости, следующие из теории разностной задачи Штурма-Лиувилля<sup>/8/</sup>, позволяют осуществить эффективный контроль точности результатов и при необходимости уточнить полученные результаты.

В заключение авторы выражают благодарность Л.И.Пономареву и В.В.Колосову за полезные обсуждения и А.П.Стельмаху за помощь в расчетах.

#### Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. "Наука", М., 1974.
2. Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. "Наука", М., 1966.
3. Damburg R.J., Kolosov U.U. Jour. Phys. B: Atom. Molec. Phys., 9, 18, 1976, p. 3149.
4. Guschina N.A., Nikulin U.K. Chem. Phys., 10, 1975, p.23.
5. Баатар Д., Пузынин И.В. ОИЯИ, Р5-80-109, Дубна, 1980.
6. Pomomarev L.I. et al. Annals Phys., 110, 2, 1978, p. 274.
7. Пономарев Л.И. и др. ОИЯИ, Р4-9915, Дубна, 1976.
8. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. "Наука", М., 1971.
9. Аллилуев С.П., Малкин И.А. ЖЭТФ, 66, 4, 1974, с.1283.
10. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. "Наука", М., 1965.

11. Гавурин М.К. УМН, 12, 1, 1957, с.173.
12. Глазман И.М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. Физматгиз, М., 1963.
13. Марчук Г.И., Шайдулов В.В. Повышение точности решений разностных схем. "Наука", М., 1979.
14. Соколов С.Н., Силин И.Н. ОИЯИ, Д-810, Дубна, 1961.

Рукопись поступила в издательский отдел  
9 июня 1981 года.