сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

11-81-314

П.Г.Акишин, Е.П.Жидков

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1981

Вычисление интегралов от сингулярных функций по многомерным областям в настоящее время является серьезной проблемой [1,2]. При дискретизации уравнений, описывающих магнитостатические поля, возникает проблема вычисления интегралов вида

$$R^{ij}_{kl}(S_1,S_2)=\int\limits_{S_1}\int\limits_{S_2} F^i(\bar x)G^j(\bar y)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_l}\left(\frac{1}{|\bar x-\bar y|}\right)dV_{\bar x}\,dV_{\bar y}, \qquad (1)$$

где S_1 и S_2 - два тетраэдра в трехмерном пространстве;

$\bar x \in S_1$, $\bar y \in S_2$;

$F^i(\bar x)$ - линейная функция вектора $\bar x$, равная 1 в i-й вершине, S_1 и 0 - в остальных вершинах; аналогично $G^j(\bar y)$ - линейная функция вектора $\bar y$, равная 1 в j-й вершине S_2, и 0 - в остальных вершинах;

x_k - k-я координата вектора $\bar x$,

y_l - l-я координата вектора $\bar y$.

Возможны пять случаев взаимного расположения тетраэдеров S_1 и S_2 в пространстве.

1) Тетраэдры S_1 и S_2 полностью совпадают.

2) Тетраэдры S_1 и S_2 имеют одну и только одну общую грань (рис.1).

3) Тетраэдры S_1 и S_2 имеют одно и только одно общее ребро (рис.2).

4) Тетраэдры S_1 и S_2 имеют одну и только одну общую вершину (рис.3).

5) Тетраэдры S_1 и S_2 не имеют ни одной общей точки.

В первых четырех случаях подынтегральная функция сингулярна и применение кубатурных формул затруднительно. В настоящей работе предлагается метод вычисления интегралов подобного типа. Используя понятие однородности функции, удается представить данные интегралы в виде суммы интегралов от регулярных функций. Результаты данной работы могут быть обобщены на другие виды областей интегрирования и подынтегральных функций.

§ I. Методы понижения порядка интегрирования

Рассмотрим однородную функцию $F(x)$ от одного переменного

$$F(\alpha x)=\alpha^{k}F(x), \quad k\geqslant -1. \qquad (2)$$

Требуется вычислить интеграл $\int_0^a F(x)\,dx$. Пусть $G(\lambda)=\int_0^{\lambda a}F(x)\,dx$. Будем предполагать, что интеграл $G(\lambda)$ существует для рассматриваемых λ. После замены переменных в интеграле $x=\lambda z$ имеем

$$G(\lambda)=\lambda\int_0^a F(\lambda z)\,dz.$$

Воспользовавшись (2), получаем

$$G(\lambda)=\lambda^{k+1}\int_0^a F(z)\,dz=\lambda^{k+1}G(1). \qquad (3)$$

Рассмотрим разность

$$\frac{1}{\Delta\lambda}\left(G(1+\Delta\lambda)-G(1)\right)=\frac{1}{\Delta\lambda}\int_a^{(1+\Delta\lambda)a}F(x)\,dx.$$

Устремляя $\Delta\lambda$ к нулю и предполагая непрерывность $F(x)$ в точке a, имеем

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{1}{\Delta\lambda}\left(G(1+\Delta\lambda)-G(1)\right)=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(G(\lambda)\right)\Big/_{\lambda=1}=F(a)\,a. \qquad (4)$$

Комбинируя (3) и (4), получаем

$$\int_0^a F(x)\,dx=\frac{F(a)\,a}{k+1}.$$

В одномерном случае все однородные функции исчерпываются функциями вида $F(x)=cx^k$. Таким образом, из соображений однородности мы вывели формулу

$$\int_0^a cx^k\,dx=\frac{c\,a^{k+1}}{k+1}.$$

Рассмотрим интеграл $\int_0^a\int_0^b F(x,y)\,dx\,dy$. Пусть

$$F(\alpha x,\alpha y)=\alpha^{k}F(x,y). \qquad (5)$$

Введем обозначения $G(\lambda)=\int_0^{\lambda a}\int_0^{\lambda b}F(x,y)\,dx\,dy$.
После замены переменных $x=\lambda\tilde{x}$, $y=\lambda\tilde{y}$, учитывая (5), получаем

$$G(\lambda)=\lambda^{k+2}G(1),$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(G(\lambda)\right)=(k+2)\,\lambda^{k+1}G(1). \qquad (6)$$

Вычислим предел разности, предполагая его существование:

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{G(1+\Delta\lambda)-G(1)}{\Delta\lambda}=\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{1}{\Delta\lambda}\iint_{R(\Delta\lambda)}F(x,y)\,dx\,dy, \qquad (7)$$

где $R(\Delta\lambda)$ изображено на рис.4.

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{1}{\Delta\lambda}\iint_{R(\Delta\lambda)}F(x,y)\,dx\,dy=b\int_0^a F(x,b)\,dx+a\int_0^b F(a,y)\,dy. \qquad (8)$$

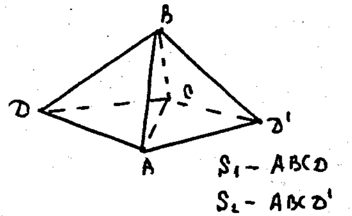

Рис.I

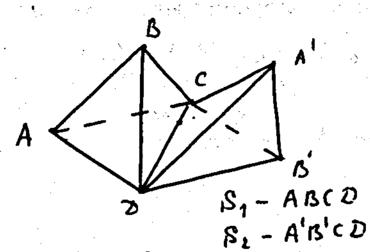

Рис.2

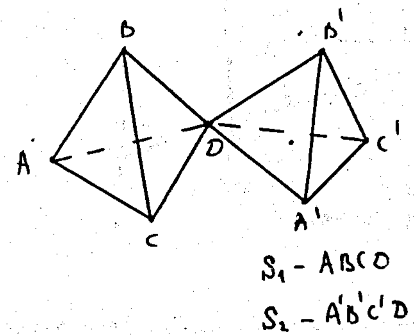

Рис.3

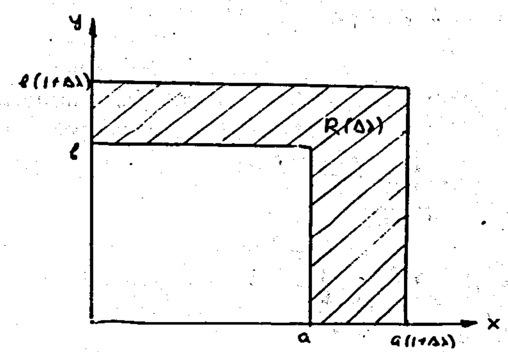

Рис.4

Предполагается, что интегралы, стоящие справа в (8), существуют.

Комбинируя (6),(7),(8), получаем

$$\int_0^a\int_0^b F(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{k+2}\left[b\int_0^a F(x,b)\,dx+a\int_0^b F(a,y)\,dy\right].$$

Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int_{S_1}\int_{S_1}\frac{dS_x\,dS_y}{|\bar x-\bar y|},$$

где S_1 - треугольник ABC (рис.5).

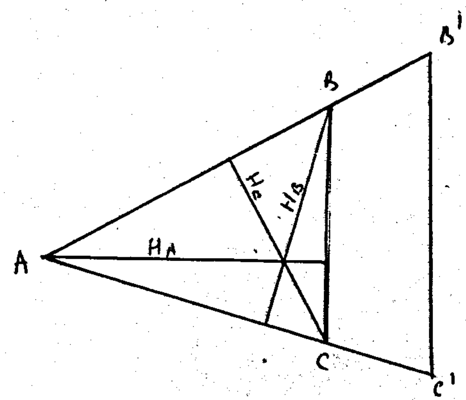

Рис.5

Перенесем начало координат в точку А. От переноса начала координат интеграл не меняется. $F(\bar x,\bar y)=\frac{1}{|\bar x-\bar y|}$ - однородная функция по совокупности переменных $\bar x,\bar y$:

$$F(\alpha\bar x,\alpha\bar y)=\frac{1}{\alpha}F(\bar x,\bar y). \tag{9}$$

Пусть A'B'C' - треугольник S_2, получаемый из ABC растяжением в λ раз относительно точки А. Обозначим $G(\lambda)$ интеграл

$$G(\lambda)=\int_{S_2}\int_{S_2}\frac{dS_{\bar x}\,dS_{\bar y}}{|\bar x-\bar y|}.$$

Заменяя $\bar y,\bar x$ на $\bar x=\lambda\tilde x$, $\bar y=\lambda\tilde y$ и учитывая (9), получаем

$$G(\lambda)=\lambda^3G(1). \tag{10}$$

Отсюда предел разности при $\Delta\lambda\to0$

$$\lim_{\Delta\lambda\to0}\frac{G(1+\Delta\lambda)-G(1)}{\Delta\lambda}=3G(1). \tag{11}$$

С другой стороны,

$$\frac{G(1+\Delta\lambda)-G(1)}{\Delta\lambda}=\frac{1}{\Delta\lambda}\left[\int_{S_1}dS_{\bar x}\int_{S_2\setminus S_1}\frac{dS_{\bar y}}{|\bar x-\bar y|}+\int_{S_1}dS_{\bar y}\int_{S_2\setminus S_1}\frac{dS_{\bar x}}{|\bar x-\bar y|}+\int_{S_2\setminus S_1}\int_{S_2\setminus S_1}\frac{dS_{\bar x}\,dS_{\bar y}}{|\bar x-\bar y|}\right].$$

Устремляя $\Delta\lambda$ к нулю и учитывая (11), получаем

$$\int_{S_1}\int_{S_1}\frac{dS_{\bar x}\,dS_{\bar y}}{|\bar x-\bar y|}=\frac{1}{3}H_A\left[\int_{BC}dl_{\bar x}\int_{S_1}\frac{dS_{\bar y}}{|\bar x-\bar y|}+\int_{BC}dl_{\bar y}\int_{S_1}\frac{dS_{\bar x}}{|\bar x-\bar y|}\right]=\frac{2}{3}H_A\int_{S_1}\int_{BC}\frac{dl_{\bar y}\,dS_{\bar x}}{|\bar x-\bar y|},$$

где H_A - высота из А на ВС.

Нам удалось понизить порядок интегрирования на единицу. Подынтегральная функция остается однородной при переносе начала координат в В или С. Поэтому проделаем аналогичную процедуру с растяжением относительно точки В, а затем относительно С.

В итоге получаем

$$\int\int\frac{dS_{\bar x}\,dS_{\bar y}}{|\bar x-\bar y|}=\frac{2S_0}{3}\left[H_A\int_{BC}\frac{dl_{\bar x}}{|\bar x-\bar x_A|}+H_B\int_{CA}\frac{dl_x}{|\bar x-\bar x_B|}+H_C\int_{AB}\frac{dl_x}{|\bar x-x_C|}\right], \tag{12}$$

где S_0 - площадь $\triangle ABC$; H_A, H_B, H_C - высоты, опущенные из А, В, С на ВС, СА и АВ соответственно. Интегралы, стоящие в правой части (12), однократные и регулярные. Аналогично можно действовать в трехмерном случае. При интегрировании сингулярных интегралов, используя данный метод, необходимо следить за тем, чтобы интеграл, получаемый понижением порядка, сходился абсолютно.

§ 2. Одна теорема общего характера

Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int_0^b dx\int_{G(x)}F(x,\bar y)\,dv_{\bar y}. \tag{13}$$

$G(x)$ – область из R^N, параметрически зависящая от x; $\bar y$ – вектор из $G(x)$. Сформулируем следующие четыре условия:

А. Интеграл (I3) сходится абсолютно.

В. Интеграл $\int_{G(x)} F(x,\bar y)\,dv_{\bar y}$ сходится абсолютно и есть непрерывная функция параметра x для всех x из полуинтервала $(0,b]$.

С. Существует γ, такое, что область $G(\lambda x)$ получается из области $G(x)$ растяжением в λ^{γ} относительно начала координат для всех λ из отрезка $[0,1]$.

Д. Функция $F(x,\bar y)$ такова, что $F(\lambda x, \lambda^{\gamma}\bar y) = \lambda^{k} F(x,\bar y)$; здесь γ то же самое, что и в С, и $0 \le \lambda \le 1$.

<u>Теорема</u>

Пусть выполняются условия А,В,С,Д и $\gamma N + 1 + k \ne 0$.

Тогда
$$\int_0^b dx \int_{G(x)} F(x,\bar y)\,dv_{\bar y} = \frac{1}{\gamma N+1+k}\int_{G(b)} F(b,\bar y)\,dv_{\bar y}.$$

<u>Доказательство теоремы</u>

Пусть
$$J(\lambda) = \int_0^{\lambda b} dx \int_{G(x)} F(x,\bar y)\,dv_{\bar y}. \qquad (I4)$$

Сделаем замену переменных в (I4): $x = \lambda \tilde x$.

Тогда
$$J(\lambda) = \lambda \int_0^{b} d\tilde x \int_{G(\lambda \tilde x)} F(\lambda \tilde x, \bar y)\,dv_{\bar y}. \qquad (I5)$$

Сделав замену $\bar y = \lambda^{\gamma}\tilde y$ в (I5) и воспользовавшись условиями С и Д, получаем:
$$J(\lambda) = \lambda^{k+\gamma N+1} J(1). \qquad (I6)$$

Рассмотрим разность
$$\frac{1}{\Delta\lambda}\left(J(1) - J(1-\Delta\lambda)\right) = \frac{1}{\Delta\lambda}\int_{b(1-\Delta\lambda)}^{b} dx \int_{G(x)} F(x,\bar y)\,dv_{\bar y}. \qquad (I7)$$

Перейдем к пределу в (I7) при $\Delta\lambda \to 0$ $(\Delta\lambda \ge 0)$ и воспользуемся теоремой о дифференцировании интеграла по верхнему пределу /4/. Так как выполняются условия А,В, то эта процедура корректна.

Имеем
$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(J(\lambda)\right)\Big|_{\lambda=1} = \int_{G(b)} F(b,\bar y)\,dv_{\bar y}. \qquad (I8)$$

Комбинируя (I6) и (I8), получаем требуемое тождество, и теорема доказана. Как видно из формулировки теоремы, все рассмотренные выше интегралы удовлетворяют условиям теоремы либо представляются в виде комбинации подобных интегралов.

§ 3. <u>Численные расчеты</u>

Данная методика применялась при расчете шестикратных сингулярных интегралов типа (I). Так как функции формы, участвующие в (I), можно представить в виде $F^i(\bar x) = c_0^i + (\bar a_0^i, \bar x)$, $G^j(\bar y) = b_0^j + (\bar d_0^j, \bar y)$, здесь $(\,,\,)$ – скалярное произведение, то такие интегралы можно представить в виде суммы интегралов, удовлетворяющих условиям теоремы. Для проверки качества вычислений использовался следующий факт.

Пусть $\Sigma_{ij} = R_{11}^{ij}(S_1,S_2) + R_{22}^{ij}(S_1,S_2) + R_{33}^{ij}(S_1,S_2)$

или
$$\Sigma_{ij} = \int_{S_1}\int_{S_2} F^i(\bar x)\,G^j(\bar y)\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial y_3}\right)\frac{1}{|\bar x - \bar y|}\right] dv_{\bar x}\,dv_{\bar y}. \qquad (I9)$$

Но выражение в квадратных скобках в (I9) есть $\frac{1}{4\pi}\delta(\bar x - \bar y)$, где $\delta(\bar x)$ – функция Дирака /3/. Интегралы типа $\int_{S_1}\int_{S_2} F^i(\bar x)\,G^j(\bar y)\,\delta(\bar x - \bar y)\,dv_{\bar x}\,dv_{\bar y}$ легко вычисляются аналитически. В таблице приведены результаты вычислений для случая, когда S_1 равен S_2 и есть единичный тетраэдр АВСД с вершинами А(0,0,0), В(I,0,0), С(0,I,0), Д(0,0,I). Для расчета регулярных интегралов применялись кубатурные формулы пятого порядка точности.

Таблица

Σ_{ij}	Результаты численных расчетов	Точное значение интегралов
Σ_{11}	0,0166646	0,0166666
Σ_{12}	0,0083330	0,0083333
Σ_{13}	0,0083330	0,0083333
Σ_{22}	0,0166652	0,0166666
Σ_{23}	0,0083332	0,0083333
Σ_{33}	0,0166652	0,0166666

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3, "Наука", М., 1970.
2. Микеладзе Ш.Е. Численные методы математического анализа. ГИТТЛ, М., 1953.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. "Наука", М., 1966.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2, "Наука", М., 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 мая 1981 года.