объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна



11-81-203

С.И.Сердюкова

# НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ОПЕРАТОРА РЕЗОЛЬВЕНТЫ РАЗНОСТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Направлено на VI Всесоюзную школу по теории операторов в функциональных пространствах, Иркутск, 1981

1981

Рассматриваются разностные краевые задачи вида

$$v_\nu(t+\tau) = \sum_{j=-r1}^{r2} A_j v_{\nu+j}(t), \quad t = n\cdot\tau \geq 0, \qquad \nu = 1,2,\ldots, \qquad /1a/$$

$$v_\nu(0) = f_\nu, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} |f_\nu|^2 < \infty,$$

$$v_m(t) = \sum_{j=1}^{s} C_{jm} v_j(t), \quad m = 0,-1,\ldots,-r1+1, \qquad /1б/$$

$v_\nu$ - векторы размерности $k$; $A_j$, $C_{jm}$ - постоянные матрицы размерности $(k,k)$. Предполагается, что $A_{-r1}$, $A_{r2}$ - невырожденные матрицы, $r1 \geq 1$.

Обозначим через $\mathcal{H}$ гильбертово пространство последовательностей векторов $v = \{v_{-r1+1}, \ldots, v_0, v_1, \ldots\}$, удовлетворяющих краевым условиям /1б/. Норма в $\mathcal{H}$ дается соотношением

$$\|v\|^2 = \sum_{1}^{\infty} |v_\nu|^2.$$

Разностная краевая задача /1/ устойчива, если существует постоянная $c>0$, не зависящая от $\tau$, $n$, такая, что

$$\|v(t)\| \leq c\|v(0)\|$$

для всех $t = n\cdot\tau \geq 0$ и всех $v(0) \subset \mathcal{H}$.

Задача /1/ может быть представлена в операторном виде $v(t+\tau) = Gv(t)$. $G$ - оператор перехода от слоя к слою, действующий из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$. Устойчивость означает равномерную по $n$ ограниченность $\|G^n\|$. Если устойчивости нет, порядок роста $\|G^n\|$ характеризует скорость роста решений /1/. В самом деле, по определению,

$$\|G^n\| = \sup_{v(0)\subset\mathcal{H}} \frac{\|v(t)\|}{\|v(0)\|}, \quad t = n\cdot\tau.$$

<u>Определение спектра оператора $G$.</u> Комплексное число $z_0$ называется точкой спектра оператора $G$, если существует $v \subset \mathcal{H}$, $\|v\| \neq 0$, такая, что $Gv = z_0 v$.

Для того чтобы задача /1/ была устойчива, необходимо, чтобы спектр оператора $G$ лежал в единичном круге $D = \{z : |z| \leq 1\}$. В противном случае $\|G^n\|$ экспоненциально растет с ростом $n$. Далее для устойчивости /1/ необходимо, чтобы была устойчива соответствующая задача Коши. Ниже предполагается, что необходимые условия устойчивости выполняются.

Чтобы получить необходимые и достаточные условия устойчивости, оценим скорость роста $\|G^n\|$ при $n\to\infty$. Для этого представим $G^n$ в виде контурного интеграла от резольвенты /1/:

$$G^n = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (G-zI)^{-1}\cdot z^n\,dz.$$

Здесь $\Gamma$ - произвольный контур, охватывающий все точки спектра оператора $G$. Так как спектр $G$ лежит в единичном круге, в качестве $\Gamma$ можно взять, например, окружность $|z|=1+\rho$. Основные оценки получаются с помощью метода перевала. При этом контур интегрирования деформируется, и нам потребуется явный вид резольвенты в окрестности единичной окружности $|z|=1$. Построение резольвенты сводится к решению системы обыкновенных разностных уравнений с параметром $z$: $(G-zI)v=f$; $v,f\subset\mathcal{H}$; $f$ - заданная, $v$ - искомая последовательности. Используя явный вид $G$, перепишем систему в таком виде:

$$v_{\nu+r2} = -A_{r2}^{-1}\Big(\sum_{j=-r1}^{r2-1} A_j v_{\nu+j} - z v_\nu - f_\nu\Big),\quad \nu=1,2,\dots,$$

$$v_m = \sum_{j=1}^{s} C_{jm} v_j,\qquad m=0,-1,\dots,-r1+1.$$

После замены переменных:

$$y_\nu = (v_{\nu+r2-1},\dots,v_\nu,\dots,v_{\nu-r1}),$$

получаем одношаговую формулу $y_{\nu+1}=M(z)\,y_\nu+g_\nu$, где

$$M(z)=\begin{bmatrix} -A_{r2}^{-1}\cdot A_{r2-1} & \dots & -A_{r2}^{-1}(A_0-zI) & \dots & -A_{r2}^{-1}\cdot A_{-r1} \\ I & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix},\qquad g_\nu=\begin{bmatrix} A_{r2}^{-1}f_\nu \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{bmatrix},$$

$M(z)$ - резольвентная матрица. Чтобы выписать в явном виде оператор резольвенты, постараемся факторизовать $M(z)$. Начнем с исследования ее спектра. Заметим, что $\dim M(z)=(r1+r2)\cdot k$.

Если спектр $G$ лежит в единичном круге и задача Коши устойчива, то при $|z|\geq 1$ ровно $r1\cdot k$ собственных значений $|\kappa_j|\leq 1$ и ровно $r2\cdot k$ - $|\kappa_j|\geq 1$.

Точку единичной окружности $z_0=e^{i\phi_0}$ назовем определяющей, если в этой точке хотя бы одно собственное значение по модулю равно единице: $|\kappa_i(z_0)|=1$. Общую задачу устойчивости полубесконечных разностных краевых задач удается решить благодаря следующему обстоятельству: если некоторой точке единичной окружности $z_0=e^{i\phi_0}$ отвечает собственное значение $\kappa_j$, равное в этой точке по модулю единице: $|\kappa_j(z_0)|=1$, то само $\kappa_j(z_0)$ является определяющей точкой характеристической матрицы задачи Коши. Это видно из структуры резольвентного уравнения:

$$\mathrm{Det}\Big(\sum_{j=-r1}^{r2} A_j\cdot\kappa^j - zI\Big)=0, \qquad /2/$$

и характеристического уравнения задачи Коши:

$$\mathrm{Det}\Big(\sum_{j=-r1}^{r2} A_j\, e^{ij\psi}-\lambda I\Big)=0. \qquad /3/$$

Известно /2/, что если задача Коши устойчива, то собственные значения характеристической матрицы в окрестности определяющих точек допускают разложение

$$\lambda(\psi)=\exp\{i\phi_0+i\gamma(\psi-\psi_0)+i\sum_{j=p}^{2\mu}\alpha_j(\psi-\psi_0)^j-\beta(\psi-\psi_0)^{2\mu}+\dots\}. \qquad /4/$$

Здесь $\phi_0,\gamma,\alpha_j$ - вещественные, $\beta>0$; $p\geq 2$, $\mu$ - целые. Далее предполагается, что есть лишь конечное число определяющих точек и $\mu<\infty$. Прямые $n+\gamma\nu=0$ называются разностными характеристиками. Разностная функция Грина, или функция единичной ошибки, локализована около разностных характеристик. Сначала рассмотрим подкласс систем разностных уравнений с чисто наклонными характеристиками: $\gamma\neq 0$ для всех собственных значений характеристической матрицы относительно всех определяющих точек.

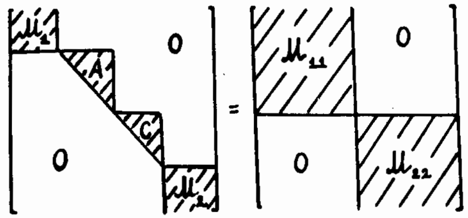
Из уравнений /2/, /3/ следует, что разложения собственных значений резольвентной матрицы в окрестности определяющих точек могут быть получены как обратные функции собственных значений характеристической матрицы задачи Коши. При этом, так как $\gamma\neq 0$, каждому $\lambda$ отвечает единственное $\kappa$, и его асимптотика имеет вид

$$\kappa(\phi)=\exp\{i\psi_0+i\frac{\phi-\phi_0}{\gamma}P(\phi-\phi_0)+\frac{\beta}{\gamma^{2\mu+1}}(\phi-\phi_0)^{2\mu}+\dots\}. \qquad /5/$$

Здесь $P(t)$ - многочлен степени $2\mu$ с вещественными коэффициентами; $P(0)=1$.

Из /5/ следует, что собственные значения с уходящими характеристиками $(\gamma<0)$ порождают $\kappa$ с $|\kappa|\leq 1$ при $|z|\geq 1$. Соответственно $\lambda$ с приходящими характеристиками $(\gamma>0)$ порождают $\kappa$ с $|\kappa|\geq 1$ при $|z|\geq 1$. Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а. Для произвольной точки единичной окружности $z_0$, $|z_0|=1$, найдется постоянная $\rho$ и невырожденная аналитическая при $|z-z_0|<\rho$ матрица $T(z)$, такая, что

$T \mathcal{M} T^{-1} = \bar{\mathcal{M}} =$ 

Элементы матриц $T, T^{-1}$ разлагаются в ряды по дробным степеням $(z-z_0)$. Собственные значения $M_1, M_2^{-1}$ по модулю строго меньше 1 при $|z-z_0|<\rho$. Собственные значения $A, C^{-1}$ по модулю меньше единицы при $|z-z_0|<\rho \cap |z|>1$. При $z \to z_0$ собственные значения $A, C^{-1}$ стремятся к предельным значениям, равным по модулю единице. Заметим[1], что $\dim M_{11} = r1 \cdot k$, $\dim M_{22} = r2 \cdot k$, $\dim A = \ell_1$, $\dim C = \ell_2$. Если $z_0$ не является определяющей точкой, $\ell_1 = \ell_2 = 0$.

Резольвентная матрица факторизована. Можно построить резольвенту. Напомним, что построение резольвенты сводится к решению системы обыкновенных разностных уравнений: $(G - zI)v = f$; $v$, $f \subset \mathcal{H}$, $v$ - искомая последовательность. Эта система была преобразована к виду

$$y_{\nu+1} = My_\nu + g_\nu .$$

После замены переменных $w_\nu = Ty_\nu$ система преобразуется к виду $w_{\nu+1} = \bar{M} w_\nu + Tg_\nu$. Последняя система естественным образом разбивается на две подсистемы:

$$\begin{cases} w^{I}_{\nu+1} = M_{11} w^{I}_{\nu} + (Tg_\nu)^{I}, \\ w^{II}_{\nu+1} = M_{22} w^{II}_{\nu} + (Tg_\nu)^{II} . \end{cases} \qquad /6/$$

Вектор $w^I_\nu$ состоит из верхних $r1 \cdot k$ компонент вектора $w_\nu$, соответственно $w^{II}_\nu$ состоит из нижних $r2 \cdot k$ компонент $w_\nu$. Так как при $|z|>1$ спектры $M_{11}, M_{22}$ лежат соответственно внутри и вне единичного круга, решение /6/ может быть представлено в виде

$$\begin{cases} w^{I}_{\nu} = \sum\limits_{j=1}^{\nu-1} M_{11}^{\nu-j-1} (Tg_j)^{I} + M_{11}^{\nu-1} w^{I}_{1}, & \nu \geq 2, \\ w^{II}_{\nu} = -\sum\limits_{j=\nu}^{\infty} M_{22}^{\nu-j-1} (Tg_j)^{II}, & \nu \geq 1 . \end{cases} \qquad /7/$$

Вектор $w^I_1$ определяется из краевых условий. Напомним, что исходные краевые условия имеют вид

$$v_m = \sum_{j=1}^{s} C_{jm} v_j , \quad m = 0, -1, \dots, -r1+1 .$$

Введем в рассмотрение матрицы размерности $(r1 \cdot k, r1 \cdot k)$:



$$C_{r1} = \begin{bmatrix} C_{r1,0} & \dots C_{1,0} \\ C_{r1,-1} & \dots C_{1,-1} \\ \vdots & \vdots \\ C_{r1,-r1+1} & \dots C_{1,-r1+1} \end{bmatrix}, \qquad C_\ell = \begin{bmatrix} C_{\ell,0} & 0 \dots 0 \\ C_{\ell,-1} & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ C_{\ell,-r1+1} & 0 \dots 0 \end{bmatrix}, \ r1+1 \leq \ell \leq s.$$

Если $s \leq r1$, недостающие матрицы заменяем нулевыми. После замены $y_\nu = (v_{\nu+r2-1}, \dots, v_\nu, \dots, v_{\nu-r1})$ краевые условия преобразуются к виду

$$[\,0\ I\,]_{r1 \cdot k}\, y_1 = \sum_{\ell=r1}^{s} [\,0\ C_\ell\,]\, y_{\ell+1} .$$

После замены $w_\nu = Ty_\nu$ получаем

$$T^{-}_{21} w^{I}_{1} + T^{-}_{22} w^{II}_{1} = \sum_{\ell=r1}^{s} C_\ell T^{-}_{21} w^{I}_{\ell+1} + C_\ell T^{-}_{22} w^{II}_{\ell+1} . \qquad /8/$$

Через $T^{-}_{11}, T^{-}_{12}, T^{-}_{21}, T^{-}_{22}$ обозначены блоки $T^{-1}$:

$$T^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} T^{-}_{11} & T^{-}_{12} \\ T^{-}_{21} & T^{-}_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} r2 \cdot k \\ r1 \cdot k \end{array} \\ \begin{array}{cc} r1 \cdot k & r2 \cdot k \end{array} & \end{array}$$

Используя /6/, краевое условие /8/ можно преобразовать к виду

$$K_1 w^{I}_{1} = K_2 w^{II}_{1} + \sum_{j=1}^{s} B^{I}_{j} (Tg_j)^{I} + B^{II}_{j} (Tg_j)^{II}, \qquad /9/$$

$K_1, K_2, B^I_j, B^{II}_j$ - аналитические краевые матрицы:

$$K_1 = T^{-}_{21} - \sum_{\ell=r1}^{s} C_\ell T^{-}_{21} M_{11}^{\ell}, \qquad K_2 = -T^{-}_{22} + \sum_{\ell=r1}^{s} C_\ell T^{-}_{22} M_{22}^{\ell},$$

$$B^{I}_{j} = \sum_{\ell=\max(r1,j)}^{s} C_\ell T^{-}_{21} M_{11}^{\ell-j}, \qquad B^{II}_{j} = \sum_{\ell=\max(r1,j)}^{s} C_\ell T^{-}_{22} M_{22}^{\ell-j} .$$

Итак, оператор резольвенты выписан в явном виде /формулы /7/, /9//. В /7/ присутствуют степени матриц $M_{11}, M_{22}^{-1}$. Желательно, чтобы основные блоки $A, C^{-1}$ имели возможно более простую форму. Удается доказать, что основные блоки $A, C^{-1}$ имеют ту же структуру, что и основной блок характеристической матрицы задачи Коши[2-4]. Напомним, что в окрестности определяющих точек собственные значения блоков $A, C^{-1}$ допускают разложение вида

$$\kappa(\phi) = \exp\{\, i\psi_0 + i\frac{\phi-\phi_0}{\gamma} P(\phi-\phi_0) + \frac{\beta}{\gamma^{2\mu+1}} (\phi-\phi_0)^{2\mu} + \dots \} . \qquad /10/$$

Собственные значения $\kappa_i, \kappa_j$ принадлежат одному классу относительно определяющей точки $\phi_0$, если $2\mu_i = 2\mu_j = 2\mu$ и $\ln\kappa_i - \ln\kappa_j = o(\phi-\phi_0)^{2\mu}$; $2\mu$ назовем определяющим порядком класса.

Воспользуемся следующей теоремой[5]: для произвольной определяющей точки $z_0$, $|z_0|=1$, найдется невырожденное аналитическое в окрестности $z_0$ преобразование подобия, которое приводит блоки $A, C$ к специальному блочно-треугольному виду: на диагонали располагаются треугольные блоки, которым отвечают классы собственных значений. Внедиагональные элементы этих блоков при $z=z_0$ имеют нули порядка $2\mu$, где $2\mu$ - определяющий порядок соответствующего класса собственных значений.

Нормальная форма оператора резольвенты для гиперболических систем построена. После этого исследование устойчивости левой краевой задачи сводится к построению асимптотик интегралов. Необходимое и достаточное условие устойчивости сводится к ряду ограничений на порядки особенностей элементов краевых матриц $K_1^{-1}, K_1^{-1}\cdot K_2$ в точках единичной окружности. В работе шведского математика Х.-О.Крайса /1/ показано, что точки вырождения $K_1(z)$ являются точками спектра или обобщенными точками спектра оператора $G$.

Переходим к случаю, когда есть собственные значения с вертикальными характеристиками /в разложении /4/ $\gamma=0$ /. Параболическому собственному значению характеристической матрицы

$$\lambda(\psi)=\exp\{i\phi_0+i\sum_{\ell=p}^{2\mu} a_\ell(\psi-\psi_0)^\ell-\beta(\psi-\psi_0)^{2\mu}+\dots\}$$

отвечает p собственных значений резольвентной матрицы. В окрестности $e^{i\phi_0}$ справедливы следующие разложения. Если $p<2\mu$, то

$$\kappa_\ell(\phi)=\exp\{i\psi_0+i\left(\frac{\phi-\phi_0}{a_p}\right)_\ell^{1/p} P\left(\left(\frac{\phi-\phi_0}{a_p}\right)_\ell^{1/p}\right)+\frac{\beta}{pa_p}\left(\frac{\phi-\phi_0}{a_p}\right)_\ell^{(2\mu-p+1)/p}+\dots\},$$

$$\ell=0,1,\dots,p-1.$$

Здесь

$$\left(\frac{\phi-\phi_0}{a_p}\right)_\ell^{1/p}=\left|\frac{\phi-\phi_0}{a_p}\right|^{1/p}\exp\frac{i}{p}(\chi-\operatorname{Arg}a_p+2\pi\ell),\quad -\frac{3\pi}{2}\le\chi\le\frac{\pi}{2},$$

$P(t)$ - многочлен с вещественными коэффициентами; $P(0)=1$. При $|z|\ge1$, $\ell=1,2,\dots,\left[\frac{p}{2}+\frac{\operatorname{Arg}a_p}{2\pi}\right]$, $|\kappa_\ell(z)|\le1$, остальные $|\kappa_\ell(z)|\ge1$.

Если $p=2\mu$,

$$\kappa_\ell(\phi)=\exp\{i\psi_0+i\left(\frac{\phi-\phi_0}{a_p+i\beta}\right)_\ell^{1/p}+\dots\},\quad \ell=0,1,\dots,p-1.$$

Здесь

$$\left(\frac{\phi-\phi_0}{a_p+i\beta}\right)_\ell^{1/p}=\left|\frac{\phi-\phi_0}{a_p+i\beta}\right|^{1/p}\exp\frac{i}{p}(\chi-\omega_0+2\pi\ell),$$

$0\le\operatorname{Arg}(a_p+i\beta)=\omega_0\le\pi$. При $|z|\ge1$, $\ell=1,\dots,\mu$, $|\kappa_\ell(z)|\le1$, остальные $|\kappa_\ell(z)|\ge1$ при $|z|\ge1$. Множество собственных значений разделено полностью. Если есть параболические собственные значения, нормальная форма резольвентной матрицы имеет более сложную структуру, чем в гиперболическом случае, когда все $\gamma\ne0$. В этом случае есть жордановы связи, которые не позволяют факторизовать резольвентную матрицу. В самом деле, пусть характеристическая матрица имеет единственное собственное значение с вертикальной характеристикой $\lambda(w)$. Этому собственному значению отвечает собственный вектор, который разлагается по целым степеням:



$$e(w)=\sum_{j=0}^{\infty} e_j(w-w_0)^j,\qquad w=e^{i\psi}.$$

Пусть $\kappa_1,\dots,\kappa_p$ - собственные значения резольвентной матрицы, отвечающие $\lambda(w)$, $r1+r2=r$. Векторы

$$E_1=(\kappa_1^{p+r-2}\cdot e(\kappa_1),\dots,\kappa_1^{p-1}\cdot e(\kappa_1))^*,$$

$$E_i=\sum_{j=1}^{i}\left(E_1(\kappa_j)/\prod_{\substack{\xi=1\\ \xi\ne j}}^{i}(\kappa_j-\kappa_\xi)\right),\quad i=2,\dots,p,$$

составляют систему собственных и присоединенных векторов:

$$ME_1=\kappa_1E_1,$$

$$ME_i=\kappa_iE_i+E_{i-1},\quad i=2,\dots,p.$$

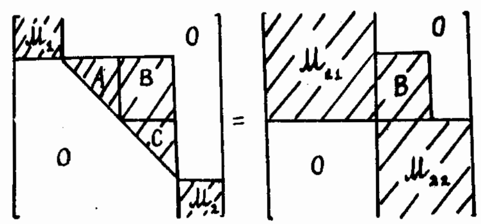
В частности, одномерному случаю /характеристическая функция с $\gamma=0$ / отвечает резольвентная матрица, у которой основной блок нормальной формы имеет вид жорданова ящика /6/.

Рассмотрим случай единственного параболического блока размерности k. В окрестности определяющей точки $z_0$ резольвентная матрица невырожденным аналитическим преобразованием подобия приводится к нормальному виду $\bar{M}(z)$. Параболический класс собственных значений характеристической матрицы рождает p классов собственных значений резольвентной матрицы, каждому из которых на диагонали $\bar{M}(z)$ отвечает треугольный блок $\Delta_j(z)$ размерности k. Внедиагональные элементы $\Delta_j(z)$ при $z=z_0$ имеют нули порядка $\frac{2\mu-p+1}{p}$. Непосредственно над $\Delta_j(z)$ стоит невырожденный блок $T_{j-1,j}(z)$, $\operatorname{Det}T_{j-1,j}(z_0)\ne0$. Выше располагаются блоки

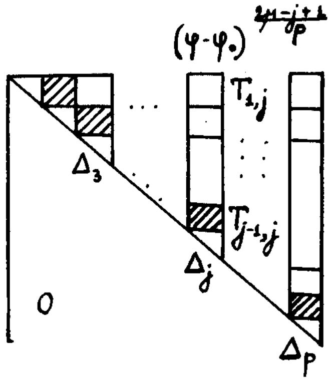
$$T_{j-2,j}(z),\dots,T_{1,j}(z),$$

элементы которых при $z=z_0$ имеют нули порядка

$$\frac{2\mu-j+1}{p}\ge\frac{1}{p},\quad j=3,\dots,p.$$

$T\mathcal{M}T^{-1}=\bar{\mathcal{M}}=$  ,

$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} =$




Таким образом, в отличие от гиперболического случая, внутри А и С есть связи жорданова типа и есть связь между А и С. Решение резольвентной системы принимает вид

$$w_\nu^{I} = \sum_{j=1}^{\nu-1} M_{11}^{\nu-j-1} \left((Tg_j)^{I} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} w_j^{II}\right) + M_{11}^{\nu-1} w_1^{I}, \quad \nu \geq 2,$$

$$w_\nu^{II} = -\sum_{j=\nu}^{\infty} M_{22}^{\nu-j-1} (Tg_j)^{II}, \quad \nu \geq 1,$$

$$K_1 w_1^{I} = K_2 w_1^{II} + \sum_{j=1}^{s} B_j^{I}\left((Tg_j)^{I} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} w_j^{II}\right) + B_j^{II} (Tg_j)^{II}.$$

Нормальная форма оператора резольвенты построена.

ЛИТЕРАТУРА


1. Kreiss H.-O. Math. of Comp., 1968, 22, 104, p. 703-714.
2. Урм В.Я. ДАН СССР, 1961, 139, 1, с. 40-43.
3. Kreiss H.-O. Math.Scand., 1959, 7, p. 71-80.
4. Сердюкова С.И. ОИЯИ, Р11-3531, Дубна, 1967.
5. Сердюкова С.И. ОИЯИ, Р5-12062, Дубна, 1978.
6. Wasow W. J. of Math. Anal. and Appl., 1962, 4, 2, p. 202-206.



Рукопись поступила в издательский отдел
25 марта 1981 года.