объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

11-80-807

Р.Д.Лазаров

К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Направлено в журнал
"Дифференциальные уравнения"

1980

Исследование сходимости разностных схем, основанное на анализе погрешности аппроксимации, приводит к завышенным требованиям, предъявляемым к гладкости решения исходной задачи. Например, в [1,2] установлена сходимость разностной схемы со скоростью $O(|h|^2)$ в сеточных нормах W_2^1 и C в предположении, что решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона принадлежит $C^4(\Omega)$. В последнее время большое внимание уделяется исследованию сходимости разностных схем к обобщенным решениям исходной задачи [3-5].

В теории вариационно-разностных методов [6,7] естественно получаются оценки сходимости с использованием принципа минимума энергии ошибки и аппроксимации кусочно-полиномиальными функциями. При таком подходе требования к гладкости решения более слабые, чем в разностных методах, но и скорость сходимости на порядок ниже. Однако при повышении гладкости решения исходной задачи из общей теории вариационно-разностных схем не следует повышение скорости сходимости. Это связано с метрикой, в которой исследуется сходимость. В [7-10] построены дискретные нормы на точках "сверхсходимости", в которых вариационно-разностные схемы имеют более высокий порядок сходимости.

В настоящей работе предлагается способ исследования сходимости разностных схем, когда решение исходной задачи принадлежит пространству $W_2^{2+s}(\Omega)$, $s=0,1$. Показано, что обычная пятиточечная разностная схема для первой краевой задачи для уравнения Пуассона в осесимметричном случае сходится со скоростью $O(|h|^{1+s}\|u\|_{W_2^{2+s}(\Omega)})$, $s=0,1$, в сеточной норме $W_2^1(\omega)$ и со скоростью $O(|h|^{1+s}|\ln h^*|^{1/2}\|u\|_{W_2^{2+s}(\Omega)})$, $h^*=\min\{h_1,h_2\}$, в сеточной норме $C(\omega)$.

Исследование разностной схемы для второй краевой задачи дает скорость сходимости $O(|h|^{1+s/2}\|u\|_{W_2^{2+s}(\Omega)})$, $s=0,1$, то есть получается потеря половины порядка в случае $u\in W_2^3(\Omega)$. Оказалось, однако, что разностная схема, построенная на сдвинутой на полшага от границы сетке /см. рис. 3/, имеет второй порядок точности при обобщенных решениях из $W_2^3(\Omega)$.

1. Рассмотрим первую краевую задачу для трехмерного осесимметричного уравнения Пауссона в прямоугольнике $\Omega=\{x=(x_1,x_2): 0\le x_\alpha\le \ell_\alpha,\ \alpha=1,2\}$:

$$\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1\frac{\partial u}{\partial x_1})+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=-f(x), \qquad x\in\Omega, \qquad /1/$$

$$u(x)=0, \qquad x\in\Gamma, \qquad /2/$$

где x_1 есть радиальное направление; x_2 - осевое направление, а Γ - граница области.

На множестве функций, заданных в Ω, введем следующие нормы и полунормы:

$$|u|_{W_2^k(\Omega)}=(\iint_\Omega \sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial^k u}{\partial x_i^k})^2 dx)^{1/2}, \quad ||u||_{W_2^k(\Omega)}=\sum_{s=0}^{k}|u|_{W_2^s(\Omega)}. \qquad /3/$$

Уравнение /1/ получено из трехмерного уравнения Пуассона после введения цилиндрических координат. Чтобы найти естественный вид норм Соболева в цилиндрических координатах, следует исходить из трехмерного декартового пространства, затем перейти к цилиндрическим координатам и учесть, что входящие функции не зависят от угловой переменной /см., например[7], с. 258/. Получим следующие нормы, которые в отличие от введенных в /3/ норм обозначим через $W_{2,r}^s(\Omega)$:

$$|u|_{W_{2,r}^0(\Omega)}=||u||_{L_{2,r}}=(\iint_\Omega x_1 u\,dx)^{1/2}, \quad |u|_{W_{2,r}^1(\Omega)}=(\iint_\Omega x_1[(\frac{du}{dx_1})^2+(\frac{du}{dx_2})^2]dx)^{1/2},$$

$$|u|_{W_{2,r}^2(\Omega)}=\{\iint_\Omega x_1[(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2})^2+(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2})^2+2(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2})^2+\frac{1}{x_1^2}(\frac{\partial u}{\partial x_1})^2]dx\}^{1/2},$$

$$/4/$$

$$|u|_{W_{2,r}^3(\Omega)}=\{\iint_\Omega x_1[(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3})^2+(\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3})^2+3(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2\partial x_2})^2+3(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\partial x_2^2})+$$

$$+\frac{3}{x_1^2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2})^2+3(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1})^2]dx\}^{1/2},$$

$$||u||_{W_{2,r}^k(\Omega)}=\sum_{s=0}^{k}|u|_{W_{2,r}^s(\Omega)}.$$

Основную роль при исследовании погрешности аппроксимации разностных схем играет следующая лемма.

Лемма 1 /лемма Брэмбля-Гильберта /11/ /. Пусть $\ell(u)$ - линейный ограниченный функционал в $W_2^{s+1}(\Omega)$, то есть имеет место оценка

$$|\ell(u)| \le M\,\|u\|_{W_2^{s+1}(\Omega)}, \qquad u \in W_2^{s+1}(\Omega). \tag{/5/}$$

Пусть $\ell(u)$ обращается в нуль на полиномах степени s от переменных x_1 и x_2. Тогда выполнено неравенство

$$|\ell(u)| \le M\,|u|_{W_2^{s+1}(\Omega)}. \tag{/6/}$$

Эта лемма заменяет формулу Тейлора при оценке погрешности аппроксимации уравнения /1/ разностными уравнениями в точках сетки /см. теорему 4/.

2. В области Ω введем сетку $\bar\omega = \omega_1 \times \omega_2$:

$$\omega_1 = \{x_1 = (i_1 - 0{,}5)h_1,\ \ i_1 = 0,1,\dots,N_1,\ \ h_1 = 2\ell_1/(2N_1 - 1)\},$$

$$\omega_2 = \{x_2 = i_2 h_2,\ \ i_2 = 0,1,\dots,N_2,\ \ h_2 = \ell_2/N_2\}.$$

Через ω обозначим внутренние узлы сетки ω области Ω, а через $\gamma = \bar\omega \setminus \omega$ - граничные узлы. Для функций $y(x)$, заданных на $\bar\omega$, будем использовать обозначения

$$y = y(x) = y(x_1, x_2);\quad y^{(\pm 1_1)}(x) = y(x_1 \pm h_1, x_2);\quad y^{(\pm 1_2)}(x) = y(x_1, x_2 \pm h_2),$$

$$y_{\bar x_\alpha} = (y - y^{(-1_\alpha)})/h_\alpha;\quad y_{x_\alpha} = (y^{(+1_\alpha)} - y)/h_\alpha,\quad y_{\bar x_\alpha x_\alpha} = (y^{(+1_\alpha)} - 2y + y^{(-1_\alpha)})/h_\alpha^2 .$$

Скалярные произведения и нормы сеточных функций, определенных на $\bar\omega$, зададим следующим образом:

$$(y,v) = \sum_{\omega} y\,v\,x_1 h_1 h_2,\quad \|y\| = (y,y)^{1/2},\quad \|y\|_{C(\omega)} = \max_{x\in\omega}|y(x)|,$$

$$a_h(y,y) = \sum_{x_2=0}^{\ell_2}\ \sum_{x_1=h_1/2}^{\ell_1} (x_1 - 0.5h_1)\,y_{\bar x_1}^2\,h_1 h_2 + \sum_{x_2=h_2}^{\ell_2}\ \sum_{x_1=h_1/2}^{\ell_1} x_1\,y_{\bar x_2}^2\,h_1 h_2,$$

$$\|y\|_1^2 = \|y\|^2_{W_2^1(\omega)} = \|y\|^2 + a_h(y,y), \tag{/7/}$$

$$\|v\|_{(-1)} = \|v\|_{W_2^{(-1)}(\omega)} = \sup_{y\ne 0}\left(|(v,y)| \,/\, \|y\|_1\right).$$

Задачу /1/, /2/ аппроксимируем разностной схемой /см.[2], с. 123/:

$$-\Lambda y = \frac{1}{x_1}((x_1-0{,}5h_1)y_{\bar{x}_1})_{x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -\phi, \quad x \in \omega, \tag{8}$$

$$y(x)=0, \quad x \in \gamma, \tag{9}$$

где правая часть ϕ есть некоторый линейный функционал от $f(x)$ /дается формулой /18//.

Теорема 1 /см.[2], с. 155, 316/. Разностная задача /8/, /9/ однозначно разрешима, и для ее решения справедливы оценки

$$\|y\|_{W_2^1(\omega)} \le M\|\phi\|_{W_2^{(-1)}(\omega)}, \tag{10}$$

$$\|y\|_{C(\omega)} \le M\|x_1\phi\|_{C(\omega)} \tag{11}$$

с постоянной M, не зависящей от h.

Если решение u как функция от декартовых переменных в трехмерной области $\Omega\times[0,2\pi]$ имеет ограниченные четвертые производные, тогда равномерно по h выполнены оценки /см.[2], с. 157/:

$$\|y-u\|_{W_2^1(\omega)} \le M|h|^2, \quad \|y-u\|_{C(\omega)} \le M|h|^2, \quad |h|^2=h_1^2+h_2^2 . \tag{12}$$

В работе[7] /с. 281/ показано, что для линейного интерполянта y_I сеточного решения y выполнена оценка

$$\|y_I-u\|_{W_{2,r}^1(\Omega)} \le M|h|\,\|u\|_{W_{2,r}^2(\Omega)} \tag{13}$$

с постоянной M, не зависящей от u и h.

Ставится следующая задача: оценить скорость сходимости разностной схемы /8/, /9/ в сеточных нормах $C(\omega)$ и $W_2^1(\omega)$ в предположении, что решение исходной задачи $u(x)$ принадлежит $W_{2,r}^{2+s}(\Omega)$, $s=0,1$.

3. Перейдем к исследованию погрешности аппроксимации. Рассмотрим задачу для $z=y-u$:

$$\Lambda z=\psi, \quad x\in\omega, \tag{14}$$

$$z=0, \quad x\in\gamma, \tag{15}$$

где $\psi=\phi-\Lambda u$ – погрешность аппроксимации схемы /8/ на решении задачи /1/ /см.[1], с.235/.

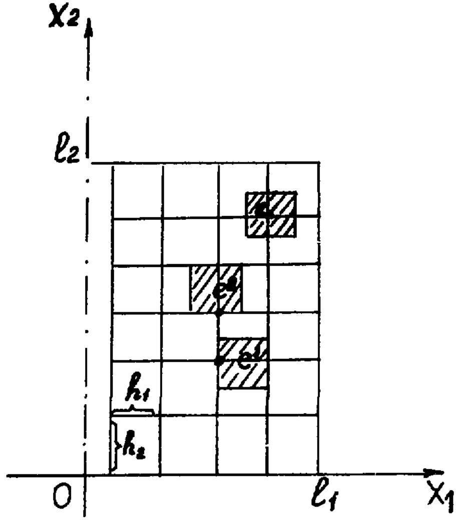

Рис.1

Введем еще некоторые обозначения /рис. 1/. Пусть

$$e(x)=\{\xi=(\xi_1,\xi_2):\quad x_i-0{,}5h_i\leq\xi_i\leq x_i+0{,}5h_i\ ,\ x\in\omega\ ,\ i=1,2\}$$

– элементарная ячейка с центром в точке сетки $x\in\omega$. Ее границы обозначим через $e_{\pm i}=\{\xi\in e(x),\ \xi_i=x_i\pm 0{,}5h_i\}$, $i=1,2$. Введем еще две ячейки /рис. 1/:

$$e^i(x)=\{\xi=(\xi_1,\xi_2):\ x_i\leq\xi_i\leq x_i+h_i\ ,\ x_{3-i}-0{,}5h_{3-i}\leq\xi_{3-i}\leq x_{3-i}+0{,}5h_{3-i}\},\quad i=1,2.$$

Погрешность аппроксимации /14/ имеет вид

$$\psi(x)=\phi+\frac{1}{x_1}((x_1+0{,}5h_1)u_{x_1})_{\bar{x}_1}+u_{\bar{x}_2x_2}\ . \qquad /16/$$

Представим ее в дивергентном виде /см. [1], с. 164, а также [10]/, используя дифференциальное уравнение [1,10], умноженное на x_1 и проинтегрированное по $e(x)$:

$$\psi(x)=\frac{1}{x_1}(\overset{+}{x}_1u_{x_1})_{\bar{x}_1}+u_{\bar{x}_2x_2}+\phi-\frac{1}{x_1h_1h_2}\iint_{e(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+x_1\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}+x_1f\right)dx=$$

$$=\frac{1}{x_1}\left(\overset{+}{x}_1\left(u_{x_1}-\frac{1}{h_2}\int_{e_{+1}}\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_2\right)\right)_{\bar{x}_1}+\left(u_{x_2}-\frac{1}{x_1h_1}\int_{e_{+2}}x_1\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_1\right)_{\bar{x}_2}+ \qquad /17/$$

$$+\phi-\frac{1}{x_1h_1h_2}\iint_{e(x)}x_1f(x)\,dx,\qquad \overset{+}{x}_1=x_1+0{,}5h_1\ .$$

Пусть правая часть $\phi(x)$ разностной схемы /8/ вычисляется по формуле

$$\phi(x) = \frac{1}{x_1 h_1 h_2} \iint_{e(x)} \xi_1 f(\xi_1, \xi_2) d\xi . \qquad /18/$$

Тогда погрешность аппроксимации $\psi(x)$ может быть представлена в виде

$$\psi(x) = \frac{1}{x_1}(\overset{+}{x}_1 \eta_1)_{\bar{x}_1} + \eta_{2\bar{x}_2} , \quad x \in \omega , \qquad /19/$$

где

$$\eta_1(x) = u_{x_1}(x) - \frac{1}{h_2} \int_{e_{+1}} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1 + 0{,}5h_1 , \xi_2) d\xi_2 ,$$

$$\eta_2(x) = u_{x_2}(x) - \frac{1}{x_1 h_1} \int_{e_{+2}} \xi_1 \frac{\partial u}{\partial x_2}(\xi_1, x_2 + 0{,}5h_2) d\xi_1 . \qquad /20/$$

<u>Теорема 2.</u> Пусть решение u задачи /1/, /2/ принадлежит пространству $W^{2+s}_{2,r}(\Omega), s = 0, 1$. Тогда для погрешности аппроксимации $\psi(x)$, представленной в виде /19/, /20/, имеют место следующие оценки:

$$|\eta_i(x)| \le M\,|h|^{1+s}\,(x_1 h_1 h_2)^{-1/2} \|u\|_{W^{2+s}_{2,r}(e^i)} , \; i = 1{,}2, \quad s = 0{,}1, \qquad /21/$$

с постоянной M, не зависящей от шага h и функции $u(x)$.

<u>Доказательство.</u> Исследуем член η_1 из /20/. Отобразим область $e^1(x)$ на квадрат $E^1 = \{ t = (t_1, t_2) : 0 \le t_1 \le 1, -0{,}5 \le t_2 \le 0{,}5 \}$ при помощи линейного преобразования

$$\xi_1 = x_1 + t_1 h_1 , \quad \xi_2 = x_2 + t_2 h_2 , \quad \tilde{u}(t) = u(\xi_1(t), \xi_2(t)). \qquad /22/$$

Тогда

$$\eta_1(x) = \frac{u(x_1 + h, x_2) - u(x_1, x_2)}{h_1} - \frac{1}{h_2} \int_{x_2 - 0{,}5h_2}^{x_2 + 0{,}5h_2} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1 + 0{,}5h_1, \xi_2) d\xi_2 =$$

$$= \frac{1}{h_1}[\tilde{u}(1{,}0) - \tilde{n}(0{,}0) - \int_{-0{,}5}^{0{,}5} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t_1}(0{,}5 , t_2) dt_2]. \qquad /23/$$

Выражение η_1 представляет собой линейный ограниченный функционал в пространстве $W_2^2(E^1)$ /и тем более в $W_2^3(E^1)$ /. Действительно, по теореме вложений /12/,

$$\max|\tilde{u}| \leq M \quad \|\tilde{u}\|_{W_2^2(E^1)},$$

$$\int_{-0,5}^{0,5} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t_1}(0,5,t_2)\,dt_2 \leq \left(\int_{-0,5}^{0,5} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t_1}(0,5,t_2)\right)^2 dt_2\right)^{1/2} \leq M\|\tilde{u}\|_{W_2^2(E^1)},$$

причем постоянная M не зависит от u и шага h. Следовательно,

$$|\eta_1| \leq \frac{M}{h_1}\|\tilde{u}\|_{W_2^{2+s}(E^1)}, \quad u \in W_2^{2+s}(\Omega), \quad s=0,1. \qquad /24/$$

Функционал η_1 обращается в нуль на полиномах второй степени. Если $\tilde{u} = a_0 + a_1t_1 + a_2t_2 + a_3t_1t_2 + a_4t_1^2 + a_5t_2^2$,

$$\eta_1 = \frac{1}{h_1}\left(a_0 + a_1 + a_4 - a_0 - \int_{-0,5}^{0.5}(a_1 + a_3t_2 + a_4)dt_2\right) = 0.$$

Тогда, по лемме Брэмбля-Гильберта, имеет место оценка

$$|\eta_1(x)| \leq \frac{M}{h_1}|\tilde{u}|_{W_2^{2+s}(E^1)}, \quad s=0,1, \quad u \in W_2^{2+s}(\Omega). \qquad /25/$$

Применив в /25/ обратное отражение в /22/, получим

$$|\eta_1| \leq M|h|^{1+s}|u|_{W_2^{2+s}(e^1)}(h_1h_2)^{-1/2}, \quad s=0,1.$$

Чтобы получить окончательную оценку /21/, достаточно заметить, что

$$|u|_{W_2^k(e^1)} \leq x_1^{-1/2}|u|_{W_{2,r}^k(e^1)}, \quad k=2,3.$$

Перейдем к исследованию члена η_2. Пусть $u \in W_{2,r}^2(\Omega)$. Тогда η_2 - линейный ограниченный функционал в пространстве $W_{2,r}^2(e^1)$, причем выполнена оценка /в переменных t /

$$|\eta_2| \leq \frac{M}{h_2\sqrt{x_1}}\|\tilde{u}\|_{W_{2,r}^2(E^2)}.$$

Здесь E^2- квадрат, в который преобразована область e^2 при помощи отображения /22/, а постоянная M не зависит от шага h и функции $u(x)$. Кроме того, η_2 аннулируется на полиномах первой степени. Тогда, по лемме Брэмбля-Гильберта, имеет место оценка /после перехода к старым переменным/:

$$|\eta_2| \leqq M|h|(x_1 h_1 h_2)^{-1/2} \|u\|_{W^2_{2,r}(e^2)} \cdot \qquad /26/$$

Рассмотрим случай, когда $u \in W^3_{2,r}(\Omega)$. Выражение η_2 представим в виде

$$\eta_2(x) = u_{x_2}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2 + 0{,}5h_2) + \frac{1}{x_1}[x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2 + 0{,}5h_2) -$$

$$- \frac{1}{h_1} \int_{e_{+2}} \xi_1 \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_1, x_2 + 0{,}5h_2)\, d\xi_1] = I_1 + I_2 . \qquad /27/$$

Член I_1 представляет собой линейный ограниченный функционал в $W^3_2(e^2)$, который обращается в нуль на полиномах второй степени. Применяя технику, которую использовали при оценке члена η_2, получим

$$|I_1| \leqq M|h|^2 (x_1 h_1 h_2)^{-1/2} |u|_{W^3_{2,r}(e^2)} \cdot \qquad /28/$$

Член I_2 является линейным ограниченным функционалом от функции $v = x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2}$ при $v \in W^2_2(e^2)$, который аннулируется на полиномах первой степени. Тогда применение леммы 1 дает

$$|I_2| \leqq M \frac{|h|^2}{x_1}(h_1 h_2)^{-1/2} |v|_{W^2_2(e^2)} \cdot \qquad /29/$$

Но

$$|v|_{W^2_2(e^2)} = \Big(\iint_{e^2} \Big[\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_2^2}\Big)^2 \Big] d\xi_1 d\xi_2 \Big)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \Big\{ 2 \iint_{e^2} \Big\{ \xi_1^2 \Big(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2}\Big)^2 + 4\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\Big)^2 + \xi_1^2 \Big(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi_2^3}\Big)^2 \Big\} d\xi\, d\xi \Big\}^{1/2} \leqq \qquad /30/$$

$$\leqq 2\sqrt{x_1} \Big\{ \iint_{e^2} \xi_1 \Big[\Big(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2}\Big)^2 + \frac{8}{\xi_1^2}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi_2^3}\Big)^2 \Big] d\xi_1 d\xi_2 \Big\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq 2\sqrt{x_1}\, |u|_{W^3_{2,r}(e^2)} \cdot$$

Подставим /30/, /29/ и /28/ в /27/ и получим аналогичную оценку и в случае $s = 1$, $i = 2$. Таким образом, теорема доказана.

4. Оценку скорости сходимости получаем из априорной оценки /10/ для задачи /12/, /13/, используя представление погрешности аппроксимации в виде /19/, /20/ и оценки /21/.

Теорема 3. Пусть решение u задачи /1/, /2/ принадлежит пространству $W^{2+s}_{2,r}(\Omega)$, $s=0,1$. Тогда решение разностной задачи /8/, /9/ с правой частью ϕ, вычисляемой по формуле /18/, сходится в сеточной норме $W^1_2(\omega)$ со скоростью $O(|h|^{1+s})$, так что равномерно по $|h|$ выполнена оценка

$$\|y-u\|_{W^1_2(\omega)} \leqq M|h|^{1+s}\|u\|_{W^{2+s}_{2,r}(\Omega)}, \quad s=0,1. \qquad /31/$$

Доказательство. Для решения $z(x)$ задачи /12/, /13/ выполнена оценка /10/. Оценим $\|\psi\|_{(-1)}$, используя /19/ и оценки /21/:

$$\|\psi\|_{W_2^{(-1)}(\omega)} = \sup_{y\neq 0}\left(|(\psi,y)|/\|y\|_1\right) =$$

$$= \sup\left(\left|\sum_{\omega}\left[(\overset{+}{x}_1\eta_1)_{\bar{x}_1} + x_1\eta_{2\bar{x}_2}\right] y h_1 h_2\right| / \|y\|_1\right) \leqq$$

$$\leqq \sup_{y\neq 0}\left\{\left(\left|\sum_{\omega}\overset{+}{x}_1\eta_1 y_{x_1} h_1 h_2\right| + \left|\sum_{\omega} x_1\eta_2 y_{x_2} h_1 h_2\right|\right)/\|y\|_1\right\} \leqq$$

$$\leqq \left(\sum_{\omega}\overset{+}{x}_1\eta_1^2 h_1 h_2\right)^{1/2} + \left(\sum_{\omega} x_1\eta_2^2 h_1 h_2\right)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq M\left\{\sum_{\omega}|h|^{2+2s}\left(\overset{+}{x}_1 (x_1 h_1 h_2)^{-1} h_1 h_2 \|u\|^2_{W^{2+s}_{2,r}(e^1)} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + x_1 (x_1 h_1 h_2)^{-1} h_1 h_2 \|u\|_{W^{2+s}_{2,r}(e^2)}\right)\right\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq M|h|^{1+s}\left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{\omega}\|u\|^2_{W^{2+s}_{2,r}(e^i)}\right)^{1/2} \leqq M|h|^{1+s}\|u\|_{W^{2+s}_{2,r}(\Omega)}.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Случай декартовых координат, когда правая часть кусочно-непрерывная, детально рассмотрен в работе /5/.

5. При исследовании скорости сходимости в сеточной норме $C(\omega)$ разностной схемы /8/, /9/ необходима оценка максимума модуля сеточной функции через ее $W^1_2(\omega)$ -норму. Эта оценка не

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги,
если они не были заказаны ранее.

Д1,2-9224	IV Международный семинар по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1975.	3 р. 60 к.
Д-9920	Труды Международной конференции по избранным вопросам структуры ядра. Дубна, 1976.	3 р. 50 к.
Д9-10500	Труды II Симпозиума по коллективным методам ускорения. Дубна, 1976.	2 р. 50 к.
Д2-10533	Труды X Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Баку, 1976.	3 р. 50 к.
Д13-11182	Труды IX Международного симпозиума по ядерной электронике. Варна, 1977.	5 р. 00 к.
Д17-11490	Труды Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1977.	6 р. 00 к.
Д6-11574	Сборник аннотаций XV совещания по ядерной спектроскопии и теории ядра. Дубна, 1978.	2 р. 50 к.
Д3-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
Д13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
Д1,2-12036	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
Р18-12147	Труды III Совещания по использованию ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1978.	2 р. 20 к.
Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
Р2-12462	Труды V Международного совещания по нелокальным теориям поля. Алушта, 1979.	2 р. 25 к.
Д-12831	Труды Международного симпозиума по фундаментальным проблемам теоретической и математической физики. Дубна, 1979.	4 р. 00 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

$$|G(x,\xi)| \leq \sum_{k_1=1}^{N_1-1}\sum_{k_2=1}^{N_2-1}\frac{1}{\lambda_{k_1}+\lambda_{k_2}} \leq$$

$$\leq \max\{\ell_1^2, \ell_2^2\}\sum_{k_1=1}^{N_1-1}\sum_{k_2=1}^{N_2-1}\frac{1}{(2k_1-1)^2+(2k_2)^2} \leq M(\ell_1, \ell_2)\,|\ln h^*|, \qquad /39/$$

$$h^* = \min\{h_1, h_2\}.$$

Искомая оценка /32/ следует довольно просто из /39/. Пусть $|y(x_0)| = \max\limits_{x\in\omega}|y(x)|$. Тогда, используя последовательно определение функции Грина, формулу суммирования по частям, неравенство Коши-Буняковского и оценку /39/, получим

$$\|y(x)\|_{C(\omega)} = |y(x_0)| = \Big|\sum_{x\in\omega} y(x)\frac{\delta(x-x_0)}{x_1 h_1 h_2} x_1 h_1 h_2\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{x\in\omega}\Lambda G(x,x_0)y(x)x_1 h_1 h_2\Big| = \Big|\sum_{x_1=h_1/2}^{\ell_1}\sum_{x_2=h_2}^{\ell_2-h_2}\bar{x}_1 G_{\bar{x}_1} y_{\bar{x}_1} h_1 h_2 +$$

$$+ \sum_{x_1=h_1/2}^{\ell_1-h_1}\sum_{x_2=h_2}^{\ell_2} x_1 G_{\bar{x}_2} y_{\bar{x}_2} h_1 h_2\Big| \leq (a_h(G,G)\,a_h(y,y))^{1/2} \leq$$

$$\leq \Big|\sum_{x\in\omega} x_1 \Lambda G(x,x_0)\,G(x,x_0)\,h_1 h_2\Big|^{1/2} \|y\|_1 \leq$$

$$\leq |G(x_0,x_0)|^{1/2}\,\|y\|_1 \leq M|\ln h^*|^{1/2}\|y\|_1 .$$

Из оценок /31/ и /32/ сразу следует сходимость разностной схемы в сеточной норме $C(\omega)$.

<u>Теорема 4</u>. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда имеет место оценка

$$\|y-u\|_{C(\omega)} \leq M|h|^{1+s}\,|\ln h^*|^{1/2}\,\|u\|_{W^{2+s}_{2,r}(\Omega)}, \quad s=0,1, \qquad /40/$$

с постоянной M, не зависящей от h и u.

6. Рассмотрим простейшую задачу с периодическими условиями на границах $x_2=0,\ell_2$ и условием второго рода на остальной части границы $x_1=\ell_1$:

$$\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big)+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - u = -f(x), \quad x\in\Omega, \qquad /41/$$

$$u(x_1,0) = u(x_1,\ell_2), \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,0) = \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\ell_2), \quad 0 \leqq x_1 \leqq \ell_1, \qquad /42/$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(\ell_1, x_2) = 0, \qquad 0 < x_2 < \ell_2 . \qquad /43/$$

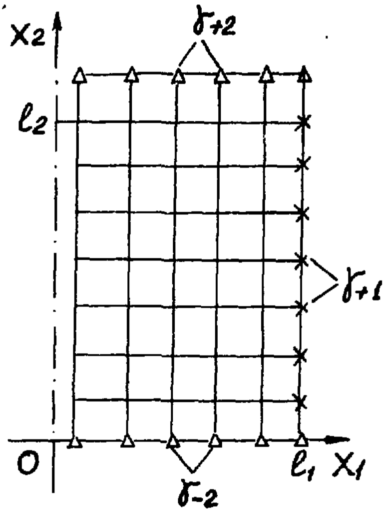

Рис.2

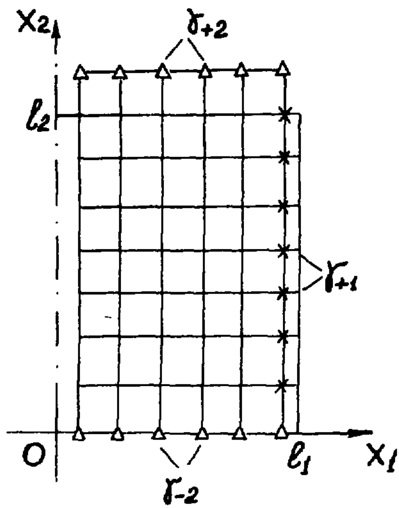

Рис.3

В область Ω введем сетку $\bar{\omega}_\pi = \omega_1 \times \omega_2^\pi$ /рис. 2/, где

$\omega_2^\pi = \{x_2 = i_2 h_2,\ i_2 = 0,1,\dots,N_2,\ h_2 = \ell_2/(N_2-1)\}$; $\gamma_{-2} = \{x \in \bar{\omega}_\pi,\ x_2 = 0\}$,

$\gamma_{+2} = \{x \in \bar{\omega}_\pi,\ x_2 = \ell_2 + h_2\}$; $\gamma_{+1} = \{x \in \bar{\omega}_\pi,\ x_1 = \ell_1\}$;

$\omega = \bar{\omega}_\pi \setminus (\gamma_{-2} \cup \gamma_{+2} \cup \gamma_{+1})$.

Задачу /41/-/43/ аппроксимируем разностной схемой:

$$\frac{1}{x_1}((x_1 - 0{,}5h_1) y_{\bar{x}_1})_{x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} - y = -\bar{\phi}, \quad x \in \omega, \qquad /44/$$

$$y(x_1,0) = y(x_1,\ell_2); \quad y(x_1,h_2) = y(x_1,\ell_2 + h_2); \quad 0 \le x_1 \le \ell_1, \qquad /45/$$

$$-\frac{2}{x_1 h_1}(x_1-0{,}5h_1)\,y_{\bar{x}_1}+y_{\bar{x}_2 x_2}-y=-\phi;\quad x\in\gamma_{+1}\,. \qquad /46/$$

Исследуем погрешность аппроксимации этой схемы. По аналогии с разностной задачей /8/, /9/ получим

$$\psi(x)=\eta_0+\frac{1}{x_1}(\overset{+}{x}_1\eta_1)_{\bar{x}_1}+\eta_{2\bar{x}_2},\quad x\in\omega\cup\gamma_{+1}\,, \qquad /47/$$

где

$$\eta_0=u(x)-\frac{1}{x_1 H}\iint\limits_{e(x)}\xi_1 u(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2,\quad H=\mathrm{mes}\,e(x),$$

а η_1 и η_2 выражаются по формулам /20/, причем

$$\eta_1(\ell_1,x_2)=0\,;\ \eta_1(\ell_1-h_1,x_2)=2(u_{\bar{x}_1}-\frac{1}{h_2}\int\limits_{e_{-1}}\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_2)\,;$$

$$\eta_2(\ell_1,x_2)=2(u_{x_2}-\frac{1}{x_1 h_2}\int\limits_{e_{+2}}\xi_1\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_1,x_2+0{,}5h_2)\,d\xi_1;\quad x\in\gamma_{+1}. \qquad /48/$$

Как показано в теореме 1,

$$|\eta_1|\leqq M|h|^2(x_1h_1h_2)^{-1/2}\,|u|_{W^3_{2,r}(e^1)},\quad x\in\omega\cup\gamma_{+1}\,. \qquad /49/$$

Слагаемое η_0 оценивается аналогично. Во внутренних узлах для η_2 имеет место оценка /21/. Для граничных узлов $x\in\gamma_{+1}$ получаем

$$|\eta_2(x)|\leqq M|h|(x_1h_1h_2)^{-1/2}\,|u|_{W^2_{2,r}(e^2)}\,. \qquad /50/$$

Отсюда следует, что скорость сходимости разностной схемы /44/-/46/ есть $O(|h|^{1+s/2}\|u\|_{W^{2+s}_{2,r}(\Omega)})$, $s=0{,}1$.

Для задачи /41/-/43/ построим разностную схему, которая имеет второй порядок точности при $u\in W^3_2(\Omega)$. Введем сетку $\overset{*}{\omega}=\overset{*}{\omega}_1\times\omega^{\pi}_2$, где ω^{π}_2 определена выше, а

$$\overset{*}{\omega}_1=\{x_1=(i_1-0{,}5)h_1,\ i_1=0,1,2,\dots,N_1,\ h_1=\ell_1/N_1\}$$

/см. рис. 3/, $\gamma_{+1}=\{x\in\overset{*}{\omega},\ x_1=\ell_1-0{,}5h_1\}$. Сетка $\overset{*}{\omega}$ введена таким образом, что граница, где задано краевое условие третьего рода, является "потоковой" линией сетки.

Напишем разностную схему

$$\frac{1}{x_1}((x_1-0{,}5h_1)y_{\bar{x}_1})_{x_1}+y_{\bar{x}_2x_2}-y=-\phi,\ x\in\overset{*}{\omega}\ \ \gamma_{+1}\ , \qquad /51/$$

$$y(x_1,0)=y(x_1,\ell_2),\ y(x_1,h_2)=y(x_1,\ell_2+h_2),\quad 0\leq x_1\leq \ell_1, \qquad /52/$$

$$-\frac{1}{x_1h_1}(x_1-0{,}5h_1)y_{\bar{x}_1}+y_{\bar{x}_2x_2}-y=-\phi,\quad x\in\gamma_{+1}\ . \qquad /53/$$

Погрешность аппроксимации записывается и на этот раз в виде /47/. Нетрудно заметить, что выражения для погрешности в точках $x\in\gamma_{+1}$ имеют тот же вид, что и во внутренних узлах, и оцениваются при помощи неравенства /21/ теоремы 4. Таким образом, установлено, что схема /51/-/53/ имеет такую же скорость сходимости, как и схема /8/, /9/ для первой краевой задачи.

Замечание 2. Аналогично строится разностная схема для краевой задачи с условием второго рода на всей границе. Удается построить аппроксимацию второго порядка на обобщенных решениях из W_2^3 и для краевого условия третьего рода /хотя эта аппроксимация более сложная/.

Замечание 3. Существенная особенность построенных схем состоит в том, что ось x_2 является потоковой линией /она не является линией сетки/. Отметим, что вариационно-разностные схемы из /7/ даже на решениях из $C^4(\Omega)$ дают сходимость порядка $O(|h|^2|\ln h^*|^{1/2})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. "Наука", М., 1977.
2. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. "Наука", М., 1976.
3. Макаров В.Л., Самарский А.А. Дифф. уравнения, 1980, т. 16, №7, с. 1276-1282.
4. Andreev A.S., Popov V.A., Sendov Bl. Comptes Rendus Acad. Bul. Scil., 1979, 32, No. 8, p. 1023-1026.
5. Березин Б.И. Вестн. МГУ, сер. вычисл. матем. и киберн., 1979, № 2, с. 26-31.
6. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. "Мир", М., 1977.
7. Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Изд-во АН АрССР, Ереван, 1979.

8. Zlamal M. Math. Comput., 1978, 32, No. 43, p. 663-685.
9. Даутов Р.З., Лапин А.В. Известия вуз, математика, 1979, 10/185/, с. 24-37.
10. Даутов Р.З., Лапин А.В., Ляшко А.Д. ЖВМ и МФ, 1980, т. 20, № 2, с. 334-349.
11. Bramble J.H., Hilbert S. Numer.Math., 1971, v. 16, No. 4.
12. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. "Наука", М., 1969.
13. Положий Г.Н., Макаров В.Л. Вестн. Киевского ун-та, сер. мех. мат., 1966, №8, с. 11-20.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 декабря 1980 года.