ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

11 - 7503

БУДНЯМ
Санжа

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО КОЛЬЦА ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ОБОБЩЕННОГО НЕПРЕРЫВНОГО АНАЛОГА МЕТОДА НЬЮТОНА

Специальность 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

(Диссертация написана на русском языке)

Дубна 1973

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук

Е.П.ЖИДКОВ

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
член-корреспондент АН СССР, профессор

Н.Н.ГОВОРУН

доктор физико-математических наук,
профессор

Д.П.КОСТОМАРОВ

Ведущее научно-исследовательское учреждение:

Московский инженерно-физический институт

Автореферат разослан " " 1973 г.

Защита диссертации состоится " " 1973 г. на заседании Ученого Совета Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ, г. Дубна, Московской обл.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета

Е.А.ЛОГИНОВА

11 - 7503

БУДНЯМ
Санжа

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО КОЛЬЦА ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ОБОБЩЕННОГО НЕПРЕРЫВНОГО АНАЛОГА МЕТОДА НЬЮТОНА

Специальность 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

(Диссертация написана на русском языке)

К необходимости находить или исследовать решения нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений приводят многие задачи физики и техники. Теория нелинейных уравнений в различных аспектах интересовала многих математиков. Различные методы приближенного решения нелинейных задач развивались Л.В.Канторовичем, А.Н. Тихоновым, Р.Беллманом, Коллатцом и их учениками. Это направление особенно актуально в связи с тем, что нелинейные математические задачи, возникающие при описании физических явлений, столь сложны, что не поддаются качественному исследованию или написанию решения в явном виде без серьёзных упрощений задачи.

Чаще всего единственной возможностью исследования является разработка алгоритма численного решения задачи и его реализация на ЭВМ. Такой подход оказался весьма важным при обсуждении нелинейных проблем. С другой стороны, прогресс в физике и технике будет зависеть в значительной степени от прогресса в нелинейной математике, в методах решения нелинейных уравнений. В ряде случаев нелинейности доминирующим фактором оказываются дополнительные данные задачи, как, например, при изучении задачи определения формы замкнутого электронного пучка с большим током /8-9/. Главная трудность задачи состоит не в решении основных уравнений, а в удовлетворении граничным условиям, которые, с одной стороны, нелинейно содержат искомые величины, а с другой стороны, - должны удовлетворяться на неизвестной границе. Математическая постановка задачи такова:

а) даны два двумерных интегральных уравнения

$$\gamma(r,z)=\iint_{\Omega} G(r,z,r',z')\gamma(r',z')\,dr'dz'+f(r,z)$$

$$\eta(r,z)=\iint_{\Omega} A(r,z,r',z')\eta(r',z')\,dr'dz'+L(r,z), \qquad (I)$$

где ядра $G(r,z,r',z')$, $A(r,z,r',z')$ и свободные члены $f(r,z)$, $L(r,z)$ определены при любых r, z, r', z' и являются достаточно гладкими функциями своих аргументов. Кроме того, решения интегральных уравнений (I) на границе q области Ω связаны следующим нелинейным соотношением:

$$\Phi[\gamma(r,z),\eta(r,z)]=0, \qquad (2)$$

где $\Phi(r,z)$ – достаточно гладкая нелинейная функция своих аргументов. В конкретной задаче об определении формы пучка электронов

$$\Phi(r,z)=\gamma^2(r,z)-\eta^2(r,z)-1. \qquad (3)$$

Требуется найти область Ω с достаточно гладкой границей, чтобы решения интегральных уравнений $\gamma(r,z)$, $\eta(r,z)$ в этой области удовлетворяли на её границе q нелинейному соотношению (3).

Предметом настоящей диссертации является численное исследование задачи о форме кольца электронов. Уравнения (I)-(2) являются моделью этой задачи. Первоначальный интерес к изучению проблем с неизвестной границей, ярко выраженный нелинейный характер которых обнаруживается уже в простейших постановках, делает задачу очень интересной с математической стороны. Одним из вопросов является получение численных методов, дающих возможность отыскания приближенных решений изучаемых задач. Решающим шагом в этом направлении явилось обнаружение функциональной природы решений рассматриваемых задач. Именно решения на границе удовлетворяют нелинейному соотношению. Известно, что общая теория нелинейных операторов наиболее полно разработана для случая, когда они действуют в каком-либо банаховом пространстве, то есть когда операторы каждый элемент банахова пространства преобразуют в элемент, вообще говоря, другого банахова пространства. Поэтому и исследование уравнений с нелинейными операторами Φ удобно проводить в том случае, когда Φ действует в некотором функциональном пространстве и обладает нужными свойствами. Желательны, например, следующие свойства: непрерывность оператора, дифференцируемость (по Фреше или Гато) и т.п. Для этой цели нами в работе /II/ введены соответствующие функциональные пространства, а сама задача была сформулирована на языке функционального анализа следующим образом. Пусть нелинейный оператор Φ преобразует из пространства Q семейство гладких замкнутых кривых

$$q:\begin{cases} r=r(\lambda) \\ z=z(\lambda)\end{cases} \quad 0\le\lambda\le 1 \quad \begin{matrix} r(0)=r(1),\ r'(0)=r'(1) \\ z(0)=z(1),\ z'(0)=z'(1),\end{matrix}$$

удовлетворяющих условию $r_\lambda'^2+z_\lambda'^2\ne 0$, в пространство $C_{[0,1]}$. Требуется найти такую кривую q, принадлежащую $\mathcal{D}(\Phi)\subset Q$, чтобы

$$\Phi(\lambda)=0. \qquad (4)$$

Далее в этой работе найдена линейная по отношению $\delta r(\lambda)$ и $\delta z(\lambda)$ часть приращения $\Phi(\lambda)$ (дифференциал Гато).

Обратная задача определения приращения границы $\delta z(\lambda)$, $\delta \bar{z}(\lambda)$ сводится к решению линейного интегрального уравнения I рода. Это говорит о том, что исходная задача (I)-(2) является некорректной. В связи с этим наряду с (I)-(2) рассмотрим следующую задачу.

б). Пусть дано уравнение

$$K[x, z(s)] = \int_a^b \mathcal{K}(x, s, z(s))ds = \mathcal{U}(x) \quad c \le x \le d. \tag{5}$$

Оператор $K[x, z(s)]$ действует из пространства $C_{[a,b]}$ в пространство $\mathcal{L}_{2[c,d]}$. При этом мы будем предполагать, что:

1°. $K[x, z_1(s)] \neq K[x, z_2(s)]$, если $z_1(s) \neq z_2(s)$.

2°. Оператор $K[x, z(s)]$ непрерывен из $C \to \mathcal{L}_2$, т.е., если последовательность функций $z_n(s) \in C$ равномерно сходится к $z_0(s)$, то

$$K[x, z_n(s)]_{\mathcal{L}_2} \longrightarrow K[x, z_0(s)]_{\mathcal{L}_2}$$

при $n \to \infty$.

3°. $\mathcal{K}_z'(x, s, z)$ и $\mathcal{K}_{zz}''(x, s, z)$ непрерывны по z в окрестности $\bar{z}(s)$.

4°. Линейное уравнение I рода

$$\int_a^b \mathcal{K}_z'(x, s, z(s))h(s)ds = 0$$

имеет только тривиальное решение в W_2^1.

Рассматриваемая задача является некорректной задачей, так как не для всякой $\mathcal{U}(x)$ существует решение этой задачи, а если для некоторых $\bar{\mathcal{U}}(x)$ решения $\bar{z}(s)$ и существуют, то

малым возмущением $\bar{\mathcal{U}}$ (в норме $\mathcal{L}_2$) могут соответствовать большие возмущения $\bar{z}$ (в норме C). Заметим, что условиям 1°-4°, в частности, удовлетворяет нелинейное интегральное уравнение I рода, к которому сводится обратная задача гравиметрии.

Развитию некоторых численных методов решения нелинейных некорректно поставленных задач и их применению в задачах физики (а)-(б) и посвящена диссертация.

Основной материал диссертации изложен в пяти главах.

В главе I рассматривается непрерывный аналог метода Ньютона применительно к нелинейному абстрактному уравнению.

Пусть

$$y = \varphi(x)$$

нелинейный оператор, переводящий пространство Банаха $X (x \in X)$ в пространство Банаха $\mathcal{Y} (y \in \mathcal{Y})$. Оператор φ может быть определен не на всем пространстве X, а лишь в некоторой его области G.

Требуется решить уравнение

$$\varphi(x) = 0, \tag{6}$$

т.е. найти такой элемент $x^* \in G$, который переводится в нулевой элемент пространства $\mathcal{Y}$. Элемент x^* может быть не единственным.

Предположим, что $x \in X$ зависит от вещественного неотрицательного параметра t таким образом, что удовлетворяется дифференциальное уравнение

$$\frac{d\varphi[x(t)]}{dt} = -\varphi(x(t)). \qquad (7)$$

Предположив, что $\varphi^{\cdot}(x) \neq 0$ (производная Фреше оператора $\varphi(x)$), перепишем это соотношение в виде:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\varphi'(x)^{-1}\cdot\varphi(x). \qquad (8)$$

Последнее соотношение представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $x = x(t)$. Если к тому дифференциальному уравнению присоединить начальное условие

$$x|_{t=0} = x_0, \qquad (9)$$

(начальное приближение искомого решения), то, решая задачу Коши (8) и (9), получим функцию $x = x(t)$, причем можно ожидать, что

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*, \qquad (10)$$

где x^* – искомое решение уравнения (6).

Решение задачи Коши для (8)-(9) вместо уравнения (6) представляет собой непрерывный аналог метода Ньютона. Сходимость решения $x(t)$ задачи Коши для (8)-(9) при $t\to\infty$ при ограничении

$$\|\varphi'(x)^{-1}\| \leq L, \quad L = const \qquad (11)$$

получена в работах (см./6,4,5/). В отличие от первой работы в двух последних решение уравнения (6) предполагается существующим. Однако процесс, описываемый уравнением (7), не всегда

приводит к цели. Нас будет интересовать случай, когда оператор $\varphi'(x)^{-1}$ не является ограниченным при некоторых x из области определения оператора $\varphi(x)$. Это типичный случай некорректной задачи. Здесь целесообразно применять известный метод регуляризации А.Н.Тихонова для решения некорректных задач, т.е. обобщить непрерывный аналог метода Ньютона на некорректно поставленные задачи. Идея этого обобщения состоит в следующем. Пусть B_1 и B_2 – Банаховы пространства, $\varphi(x)$ – непрерывный оператор, $B_1 \xrightarrow{\varphi} B_2$ и $\varphi'(x)$ при каждом $x \in B_1$ – непрерывный линейный оператор, переводящий все пространства B_1 в B_2. Здесь $\varphi'(x)$ – производная Фреше оператора $\varphi(x)$ в точке x.

Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) = 0. \qquad (12)$$

Предположим, что x^* – решение (12) и что в области

$$\mathcal{D} = \{x : \|x - x^*\| \leq k\}$$

других решений уравнения (12) нет. Наряду с (12) рассматриваются операторные уравнения

$$\varphi'(x)\cdot x'_t = -\varphi(x) \qquad (13)$$

и

$$\varphi'(x)\cdot x'_t = y. \qquad (14)$$

В этих уравнениях неизвестной является x'_t, которую нужно найти при произвольном $x\in\mathcal{D}$. Последнее уравнение отличается от уравнения (13) тем, что его правая часть может пробегать все пространство B_2. В уравнении (13) правая часть ограничена областью значений оператора $\varphi(x)$.

Пусть уравнение (I4) равномерно регуляризуемо по А.Н.Тихонову (см. /I-3/). Здесь мы также будем предполагать, что решение задачи (8)-(9) существует и условие (I0) выполнено. Тогда задача (I4) рассматривается на промежутке $0 \le t \le T$ (где T - достаточно велико) в следующем виде:

$$x'_{\alpha t} = \mathcal{R}(\varphi(x), \alpha), \qquad x_\alpha(0) = x_0, \tag{I5}$$

где $\mathcal{R}(\varphi(x), \alpha)$ - равномерно регуляризующий оператор уравнения (I4).

Получена следующая теорема сходимости /I2/.

<u>Теорема</u>. Пусть $\mathcal{R}_\alpha$ равномерно в области $\mathcal{D}$, регуляризующий оператор (I4) при $0 \le \alpha \le \alpha_0$ и пусть, кроме того, $\mathcal{R}_\alpha$ при $0 \le \alpha \le \alpha_0$ удовлетворяет в области $\mathcal{D}$ пространства X условиям:

$$\|\mathcal{R}_\alpha[\varphi(x), \alpha]\| \le M \tag{I6}$$

$$\|\mathcal{R}_\alpha[\varphi(x_1), \alpha] - \mathcal{R}_\alpha[\varphi(x_2), \alpha]\| \le \mathcal{L}_2 \|x_1 - x_2\|. \tag{I7}$$

Константы M и $\mathcal{L}_2$ не зависят от α, x_1, x_2 и x. Зададимся произвольными $\varepsilon > 0$. Тогда:

I. Найдется такое $\alpha_1 < \alpha_0$ и такая окрестность $S_d(x^*)$ точки x^*, что для любого $0 \le \alpha < \alpha_1$ уравнение

$$x'_{\alpha t} = \mathcal{R}_\alpha[\varphi(x), \alpha] \tag{I8}$$

с начальным условием $x_\alpha(t=0) = x_0 \subset S_d(x^*)$ имеет единственное решение $x_\alpha(t)$ в промежутке $0 \le t \le T$, содержащееся в $\mathcal{D}$.

2. $\|x_\alpha(T) - x^*\| < \varepsilon$ для всех $0 \le \alpha < \alpha_1$.

При доказательстве этой теоремы используются идеи и методика работы /4/,/7/.

Далее обосновывается метод Эйлера для приближенного интегрирования уравнения вида (I5). Этот метод в дальнейшем используется для дискретного представления обобщенного непрерывного ньютоновского процесса.

Глава II посвящена исследованию условий, при которых обобщенный непрерывный аналог метода Ньютона применим для приближенного нахождения решений интегрального уравнения I рода (задача δ настоящего реферата).

$$K[x, z(s)] = \int_a^b \mathcal{K}(x, s, z(s))\,ds = \mathcal{U}(x) \qquad c \le x \le d. \tag{I9}$$

Оператор K действует из пространства $C_{[a,b]}$ в пространство $\mathcal{L}_{2\,[c,d]}$.

Как уже отмечалось, необходимость рассмотрения задачи (I9) и их численного решения возникает в ряде физических проблем.

В соответствии с методами первой главы уравнение (I9) заменяется системой

$$K'[x, h(s,t)] = \int_a^b \mathcal{K}'_z(x, s, z(s))\,h(s,t)\,ds = \mathcal{U}(x) - \int_a^b \mathcal{K}(x, s, z(s))\,ds \qquad c \le x \le d \tag{20}$$

$$\frac{\partial z(s,t)}{\partial t} = h(s,t) \qquad z(s,0) = z_0(s), \quad 0 \le t \le T. \tag{2I}$$

При предположении равномерной регуляризуемости уравнения (20) доказывается, что задача (20)-(2I) разрешима для всех $0 \le t \le T$ и $\|z^\alpha(s,T) - \bar{z}(s)\| < \varepsilon$ для всех $0 \le \alpha < \alpha_1$.

Предметом третьей главы является нелинейное операторное уравнение, зависящее от области, представляющее собой непосредственное обобщение задачи определения формы замкнутого электронного пучка с большим током (задача a настоящего реферата). Для абстрактного рассмотрения поставленной выше задачи введены соответствующие функциональные пространства, а сама задача сформулирована на языке функционального анализа следующим образом. Требуется найти кривую

$$q: \begin{cases} r = r(\lambda) \\ z = z(\lambda) \end{cases} \qquad 0 \le \lambda \le 1 \qquad \begin{matrix} r(0)=r(1),\ r'(0)=r'(1) \\ z(0)=z(1),\ z'(0)=z'(1), \end{matrix}$$

принадлежащую $q \subset Q$, чтобы

$$\Phi(\lambda) = 0. \tag{22}$$

Нелинейный оператор Φ действует из пространства Q гладких замкнутых кривых, удовлетворяющих условию $r_\lambda'^2 + z_\lambda'^2 \ne 0$, в пространство $C_{[0,1]}$. Также показано, что оператор Φ дифференцируем по Гато. Далее, для численного решения этой задачи в диссертации используется обобщенный непрерывный аналог метода Ньютона. Согласно этому методу, линеаризуя уравнение (22) с помощью непрерывного аналога метода Ньютона /4/, в окрестности искомого решения, приходим к уравнению

$$\int_0^1 \mathcal{K}(r(\varepsilon), z(\varepsilon), r(\lambda), z(\lambda)) f(\lambda,t)\, d\lambda = -\Phi(r(\varepsilon,t), z(\varepsilon,t)) \tag{23}$$
$$0 \le \varepsilon \le 1$$

где $\mathcal{K}(r(\varepsilon), z(\varepsilon), r(\lambda), z(\lambda)) = 2\gamma(r(\varepsilon), z(\varepsilon))\gamma(r(\lambda), z(\lambda))\Gamma(r,z,r(\lambda),z(\lambda)) -$
$- 2\eta(r(\varepsilon), z(\varepsilon))\cdot\eta(r(\lambda), z(\lambda))\cdot\bar{\Gamma}(r,z,r(\lambda),z(\lambda)),$

причем $\Gamma(r,z,r(\lambda),z(\lambda))$, $\bar{\Gamma}(r,z,r(\lambda),z(\lambda))$ являются резольвентами уравнений

$$\frac{d\gamma(r,z)}{dt} = \iint_\Omega G(r,z,r',z')\frac{d\gamma(r',z')}{dt}dr'dz' + \int_0^1 G(r,z,r(\lambda),z(\lambda))\gamma(r(\lambda),z(\lambda))\cdot f(\lambda,t)\,d\lambda \tag{24}$$

$$\frac{d\eta(r,z)}{dt} = \iint_\Omega A(r,z,r',z')\frac{d\eta(r',z')}{dt}dr'dz' + \int_0^1 A(r,z,r(\lambda),z(\lambda))\eta(r(\lambda),z(\lambda))f(\lambda,t)\,d\lambda.$$

Кроме того, заметим, что $\Gamma(r,z,r(\lambda),z(\lambda))$, $\bar{\Gamma}(r,z,r(\lambda),z(\lambda))$ удовлетворяет следующим двум интегральным уравнениям:

$$\Gamma(r,z,r(\lambda),z(\lambda)) = G(r,z,r(\lambda),z(\lambda)) + \iint_\Omega G(r',z',r(\lambda),z(\lambda))\Gamma(r(\varepsilon),z(\varepsilon),r',z')\,dr'dz' \tag{25}$$
$$\bar{\Gamma}(r,z,r(\lambda),z(\lambda)) = A(r,z,r(\lambda),z(\lambda)) + \iint_\Omega A(r',z',r(\lambda),z(\lambda))\bar{\Gamma}(r(\varepsilon),z(\varepsilon),r',z')\,dr'dz'.$$

В уравнениях (23)-(24)

$$r_\lambda' \frac{\partial z(\lambda,t)}{\partial t} - z_\lambda' \frac{\partial r(\lambda,t)}{\partial t} = f(\lambda,t). \tag{26}$$

Будем деформировать границу q области Ω, смещая её точки по нормали к кривой. Для определения $\frac{\partial r(\lambda,t)}{\partial t}$ и $\frac{\partial z(\lambda,t)}{\partial t}$ в данной точке границы q области Ω мы имеем систему двух линейных уравнений

$$\int_0^1 \mathcal{K}(r(\varepsilon), z(\varepsilon), r(\lambda), z(\lambda)) f(\lambda,t)\,d\lambda = -\Phi(r(\varepsilon,t), z(\varepsilon,t))$$
$$0 \le \varepsilon \le 1 \tag{27}$$

$$r_\lambda' \frac{\partial r(\lambda,t)}{\partial t} + z_\lambda' \frac{\partial z(\lambda,t)}{\partial t} = 0 \qquad 0 \le t \le T$$

с начальными условиями

$$r(\lambda,0) = r_0(\lambda), \quad z(\lambda,0) = z_0(\lambda). \tag{28}$$

В системе (27) первое уравнение является некорректным, но оно равномерно регуляризуемо по А.Н.Тихонову /I-3/. Это говорит о том, что исходная рассматриваемая задача (α), вообще говоря, в нашей постановке является некорректной. При этом, если существует равномерно $\bar{f}(\lambda)=\lim_{\alpha\to 0} f^{\alpha}(\lambda,t)$, то решение $z^{\alpha}(\lambda,t), z^{\alpha}(\lambda,t)$, полученное методом обобщенного непрерывного аналога метода Ньютона при $t=T$ является приближением к $\bar{z}(\lambda)$, $\bar{z}(\lambda)$ - искомому решению задачи (α) с точностью, зависящей от δ (ошибки задания $\Phi(\lambda)$) и выбора T.

В четвертой главе рассматриваются некоторые примеры нелинейных некорректных задач (интегральное уравнение I рода и методический пример нелинейного оператора, зависящего от области), которые были решены на ЭВМ, методом обобщенного непрерывного аналога Ньютона. Эти задачи интересны тем, что их точное решение в рассматриваемом случае заранее известно. Поэтому её численное решение с помощью предлагаемого метода дает возможность сравнивать с точным.

Пятая глава диссертации посвящена расчету стационарного состояния электронного кольца во внешнем магнитном поле (конкретная физическая задача типа α настоящего реферата) с помощью метода, описанного в главе 3. Нами найдена форма сечения электронного кольца при числе электронов $N=10^{12}$; $N=10^{13}$; $N=10^{14}$.

В заключение в диссертации отмечается:

В данной работе обоснован новый метод для численного решения нелинейных некорректно-поставленных задач. Этот метод основан на обобщении непрерывного аналога метода Ньютона, на принципе регуляризации, применительно к приближенному решению нелинейных (как корректных, так и некорректных) задач. Основной предпосылкой при исследовании сходимости обобщенного непрерывного ньютоновского процесса является предположение равномерной регуляризуемости решения линеаризованной задачи. Эти предположения позволяют получить сходимость обобщенного непрерывного аналога метода Ньютона при естественных требованиях гладкости нелинейной части уравнения в некоторой окрестности искомого решения. Кроме того, разделение проблемы исследования существования решений, рассматриваемой задачи и задачи их приближенного нахождения позволяет при решении последней снять конкретные численные ограничения на нелинейные части, к которым применим построенный метод численного решения. Наличие дополнительной переменной в исследованном методе придает дискретной схеме, полученной на его основе, большую гибкость и способность оптимальным образом меняться в зависимости от конкретной вычислительной ситуации. Это позволяет применять разработанный метод к задачам, в которых имеющиеся численные методы не приводят к цели.

Другие вычислительные аспекты, в частности, проблема устойчивости, требуют дополнительных рассмотрений. Приложение рассмотренного метода к некоторым конкретным задачам позволяет отнестись к решению этой задачи оптимистически.

Работы, положенные в основу диссертации, выполнены автором совместно с Е.П.Жидковым и содержатся в публикациях /I0-I4/.

Основные результаты докладывались на Всесоюзном совещании по ускорителям (Москва, I970), на Совещании по программированию и математическим методам решения физических задач (Дубна,I973) и на семинарах в отделах вычислительной математики ЛВТА и ОНМУ ОИЯИ.

Л И Т Е Р А Т У Р А:

I. А.Н.Тихонов.
Решение некорректно поставленных задач и метод регуляризации.
ДАН I5I, № 3, (I963).

2. А.Н.Тихонов.
О решении нелинейных интегральных уравнений первого рода.
ДАН I56, № 6, (I964).

3. А.Н.Тихонов.
О регуляризации некорректно поставленных задач.
ДАН I53, № I, (I963).

4. Е.П.Жидков, Г.И.Макаренко, И.В.Пузынин.
Непрерывный аналог метода Ньютона в нелинейных задачах физики.
ЭЧАЯ, т.4, вып.I, I973.

5. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин.
Об одном методе введения параметра при решении краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка.
ЖВМ и МФ, I967, т.7, № 5.

6. М.К.Гавурин.
Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов.
Известия вузов, Математика, № 5(6), I958.

7. В.К.Иванов.
О равномерной регуляризации неустойчивых задач.
Сиб.матем.журнал т.7, № 3, (I966).

8. О.И.Ярковой.
Стационарное состояние пучка в накопителе с большим током.
Препринт ОИЯИ, 2I82, Дубна, I965.

9. Э.А.Перельштейн, О.И.Ярковой.
О стационарном состоянии поляризационного самофокусирующегося кольца (ускорение электрон-ионного сгустка).
Препринт ОИЯИ Р9-4423, Дубна, I969.

I0. С.Будняم и др.
Стационарное состояние электронного кольца во внешнем магнитном поле.
ЖФМ и МФ, I97I, т.II, № 4.

II. С.Будням, Е.П.Жидков.
Дифференциал Гато одного нелинейного оператора, зависящего от области.
Сообщение ОИЯИ 5-6860, I972.

I2. С.Будням, Е.П.Жидков.
Об одном обобщении непрерывного аналога метода Ньютона.
Сообщение ОИЯИ РII-7448, I973.

I3. С.Будням и Е.П.Жидков.
Применение обобщенного непрерывного аналога метода Ньютона в некорректно поставленных задачах.
Сообщение ОИЯИ, РII- 7501 , I973.

I4. С.Будням и Е.П.Жидков.
Расчет стационарного состояния электронного кольца во внешнем магнитном поле. Препринт ОИЯИ, РII- 7495 , I973.

Рукопись поступила в издательский отдел
I7 октября I973 года.